Domácí úkol — cvičení 6

- Nechť $\varphi, \varphi^+ \in L(\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_n)$ jsou navzájem sdružené lineární transformace. Zjistěte, jaký je vztah mezi jejich spektry a soubory vlastních vektorů. Prověřte, zda je získaný výsledek v souhlasu také s případem euklidovského prostoru.
- Samoadjungované lineární transformace jsou v ortonormální bázi zadány následujícími maticemi. Najděte jejich spektrální reprezentace (oběma způsoby).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

- Dokažte, že ortogonální projekce na podprostor je samoadjungovaná.
- Zjistěte nutné a postačující podmínky pro to, aby složení (resp. součet, resp. násobek skalárem) dvou samoadjungovaných lineárních transformací byla opět samoadjungovaná lineární transformace.
- Ukažte, že pro libovolnou matici A je matice A^TA symetrická a všechny vlastní hodnoty matice A^TA jsou kladné.
- Ukažte, že symetrická matice A je ortogonální právě tehdy, když $A^2 = E$.