# Invariantní podprostory a nilpotentní zobrazení

1. Uveďte příklady nilpotentních zobrazení, určete jejich stupeň nilpotentnosti.

2. Ukažte, že každé cyklické zobrazení je nilpotentní. Uveďte příklad nilpotentního zobrazení, které není cyklické.

3. Lze najít příklad zobrazení, jehož jedinou vlastní hodnotou je nula, ale přesto není nilpotentní?

4. Je součet nilpotentních zobrazení opět nilpotentní? Je složení dvou nilpotentních zobrazení nilpotentní. V kladném případě ukažte, v opačném příkladě uveďte protipříklad. (poznámka: součet resp. složení nilpotentních komutujících zobrazení je nilpotentní, obecně to však neplatí, existují nilpotentní zobrazení, která nekomutují a jejich součet, nebo složení není nilpotentní, ale existují také taková nilpotentní nekomutující zobrazení, jejichž součet i složení nilpotentní jsou. Uveďte příklady. Lze najít příklad dvou nilpotentních zobrazení, jejichž složení je nilpotentní, ale součet ne? Lze najít příklad dvou nilpotentních zobrazení, jejichž součet je nilpotentní, ale složení ne?

5. Uvažujme prostor polynomů $P_n[x]$ a zobrazení $\varphi : P_n[x] \ni p(x) \to \varphi(p(x)) = p''(x) \in P_n[x]$ (druhá derivace). Ukažte, že toto zobrazení je nilpotentní, určete stupeň nilpotentnosti, určete jeho obraz a jádro, určete invariantní podprostory vzhledem k $\varphi$. Nalezněte bázi, ve které je $\varphi$ reprezentováno maticí v Jordanově normálním tvaru, jak tato matice vypadá? Totéž udělejte také pro zobrazení $\varphi(p(x)) = x \cdot p'(x)$, (resp. $\varphi(p(x)) = x \cdot p''(x) + p'(x)$, atd.).

6. Nechť $V$ je vektorový prostor na $\mathbf{C}$. Ukažte, že zobrazení $\varphi \in L(V, V)$ je nilpotentní právě tehdy, když jeho jediným vlastním číslem je nula. (A jak to bude nad $\mathbf{R}$?)

7. Nechť $\varphi, \psi \in L(V, V)$ a $U \subset V$ je invariantní podprostor vzhledem k $\varphi$ i vzhledem k $\psi$. Pak $U$ je invariantní podprostor také vzhledem k jejich libovolné lineární kombinaci. Ukažte.

8. Nechť $V = U_1 \oplus U_2$, kde $U_1$, $U_2$ jsou invariantí vhledem k $\varphi$. Ukažte, že existuje báze ve $V$, v níž je zobrazení $\varphi$ reprezentováno blokově diagonální maticí.

9. Ukažte, že množina kořenových vektorů zobrazení $\varphi$, příslušných témuž číslu $a$, doplněná nulovým vektorem je podprostor. (tzv. kořenový prostor $R_a = \{\vec{u} \in V | \exists k \in \mathbf{N}, (\varphi - a \cdot \mathrm{id})^k(\vec{u}) = \vec{o}\}$.)

10. Ukažte, že faktorový prostor $V/U$ s operacemi definovanými $[\vec{w}] + [\vec{v}] = [\vec{w} + \vec{v}]$ a $\alpha[\vec{v}] = [\alpha\vec{v}]$ je vektorovým prostorem.

11. Nechť $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ je taková báze ve $V$, že posledních $k$ vektorů je bází podprostoru $U$. Ukažte, že systém tříd $\{[\vec{e}_1], \dots, [\vec{e}_{n-k}]\}$ je bází prostoru $V/U$.

12. Nechť $U$ je invariantní podprostor vzhledem k $\varphi$. Ukažte linearitu indukovaného zobrazení $\varphi_{V/U}[(\vec{a})] = [\varphi(\vec{a})]$.