Jednoduché příklady na Jordanův normalní tvar

Příklad 1: Nechť $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$ je standardní báze vektorového prostoru $V = \mathbf{C}^4$. Je dáno lineární zobrazení $f : V \to V$ takto:

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3} \\
f(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_2 \\
f(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_3 \\
f(\mathbf{e}_4) &= \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_1
\end{aligned}
$$

Nalezněte bázi, ve které je zobrazení reprezentováno Jordanovou maticí a tuto Jordanovu matici určete.

Poznámka:
Uvažujme bázi $\overline{B} = \{\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3, \overline{\mathbf{e}}_4\}$:

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{e}}_1 &= \mathbf{e}_4 \\
\overline{\mathbf{e}}_2 &= \mathbf{e}_1 \\
\overline{\mathbf{e}}_3 &= \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\
\overline{\mathbf{e}}_4 &= \mathbf{e}_3
\end{aligned}
$$

S využitím linearity zobrazení určíme obrazy vektorů báze $\overline{B}$:

$$
\begin{aligned}
f(\overline{\mathbf{e}}_1) &= f(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_1 = \overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\mathbf{e}}_2 \\
f(\overline{\mathbf{e}}_2) &= f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3} = \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + \overline{\mathbf{e}}_\mathbf{3} \\
f(\overline{\mathbf{e}}_3) &= f(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 = \overline{\mathbf{e}}_3 \\
f(\overline{\mathbf{e}}_4) &= f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 = \overline{\mathbf{e}}_4
\end{aligned}
$$

Matice, reprezentující zobrazení f v bázi $\overline{B}$ (tj. obrazy pruhovaných bázových vektorů, vyjádřené ve složkách v pruhované bázi a poskládané do řádků matice) je

$$
\mathbf{J} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Příslušná matice přechodu T (tj. složky pruhovaných vektorů v nepruhované bázi poskládané do řádků) je

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Určíme matici A, která reprezentuje zobrazení f v bázi B (tj. obrazy bázových vektorů bez pruhů vyjádřené ve složkách v NEpruhované bázi a poskládané do řádků matice):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vypočteme determinant chrakteristické matice:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^4.$$

Zobrazení f má jednu čtyřnásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 1$. Nyní je třeba určit vlastní vektory, příslušné této vlastní hodnotě, jejichž rovnice mají tvar:

$$(x, y, z, w) \cdot \mathbf{A} = \lambda \cdot (x, y, z, w).$$

Maticí této homogenní soustavy je matice $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^T = (\mathbf{A} - \mathbf{E})^T$ a budeme ji upravovat na schodovitý tvar:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice soustavy má hodnost 2, její řešení bude tedy obsahovat $4 - 2$ volné neznámé (parametry). Podprostor vlastních vektorů je dvourozměrný (dva lineárně nezávislé vlastní vektory odpovídají tomu, že Jordanova matice bude mít dva bloky):

$$\check{\mathrm{R}} = L_\lambda = \{(0, t, s, 0) \mid t, s \in \mathbf{C}\}.$$

Vlastních vektorů není dostatek na vytvoření báze, zobrazení nemá diagonální reprezentaci, je třeba řešit nehomogenní soustavu pro další vektor v „řetízku“ (x', y', z', w'):

$$(x', y', z', w') \cdot \mathbf{A} = \lambda \cdot (x', y', z', w') + (0, t, s, 0).$$

Matice soustavy je opět $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^{\mathbf{T}}$, ale doplněná o pravou stranu $(0,t,s,0)$:

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & t \\ -1 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Pozor: klíčový moment, kdy se rozhoduje o tom, jak bude vypadat Jordanův normální tvar. Tato nehomogenní soustava má řešení pouze za předpokladu

$$\underline{t+s=0}$$

Pouze pro tuto volbu existuje „řetízkový“ vektor (x',y',z',w'). Je tedy jasné, že Jordanova matice bude mít jeden blok řádu tři a jeden blok řádu jedna. Řešení nehomogenní soustavy je

$$\check{\mathrm{R}}\text{'} = \{(t,T,S,0) \mid t=-s, T,S \in \mathbf{C}\}.$$

Nyní nám chybí již jen poslední „řetízkový“ vektor (x'',y'',z'',w''), který je řešením nehomogenní soustavy:

$$(x'',y'',z'',w'')\cdot\mathbf{A} = \lambda\cdot(x'',y'',z'',w'') + (t,T,S,0):$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & T \\ -1 & 0 & 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T+S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

soustava má řešení pouze pro $\underline{T+S=0}$,

$$\check{\mathrm{R}}\text{”} = \{(T,u,v,t) \mid t=-s, T=-S, u,v \in \mathbf{C}\}.$$

Nyní zbývá poskládat vypočítané vektory do matice přechodu $\mathbf{T}$ (první řádek odpovídá vektoru Ř”, druhý vektoru Ř’, třetí vlastnímu vektoru s volbou $t=-s$ a poslední vlastnímu vektoru s volbou nezávislou, tj. $t+s\neq 0$:

$$\mathbf{T} \quad = \quad \begin{pmatrix} T & u & v & t \\ t & T & -T & 0 \\ 0 & t & -t & 0 \\ 0 & c & d & 0 \end{pmatrix} \quad T,u,v,t,c,d \in \mathbf{C}, t\neq 0, c\neq -d.$$

Pro každou z těchto matic pak platí, že $\mathbf{T}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{J}$, kde $\mathbf{J}$ je Jordanova matice uvedená v poznámce za zadáním příkladu. Pro konkrétní volbu: $c = 0, d = 1, t = 1, T = 0, u = 0, v = 0$ pak získáme matici přechodu $\mathbf{T}$ uvedenou v poznámce.

Příklad 2: Nechť $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$ je standardní báze vektorového prostoru $V = \mathbf{C}^4$. Je dáno lineární zobrazení $f : V \to V$ takto:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} \\ g(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{e}_2 \\ g(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_3 \\ g(\mathbf{e}_4) &= \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Nalezněte bázi, ve které je zobrazení reprezentováno Jordanovou maticí a tuto Jordanovu matici určete.

Poznámka:

Podobně jako v předchozí poznámce zkoumejte, jak se chová zobrazení (a jakou maticí je reprezentováno) v pruhované bázi $\overline{B} = \{\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3, \overline{\mathbf{e}}_4\}$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{e}}_1 &= \mathbf{e}_1 \\ \overline{\mathbf{e}}_2 &= -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \overline{\mathbf{e}}_3 &= \mathbf{e}_4 \\ \overline{\mathbf{e}}_4 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Komentář: Při řešení postupujte analogicky. Rozdíl bude v tom, že v řešení první nehomogenní soustavy (té pro řetízkový vektor (x', y', z', w')) nenarazíte na žádnou omezující podmínku pro parametry t a s. Soustava bude mít řešení pro dvě (libovolné) nezávislé volby vlastního vektoru (tj. parametrů t a s). Z toho je jasné, že Jordanova matice má dva dvojnásobné bloky. Žádný další (dvoučárkovaný) řetízkový vektor již hledat nebudeme.

Výsledek:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{s-t}{2} & T & S & \frac{t+s}{2} \\ 0 & t & s & 0 \\ \frac{v-u}{2} & U & V & \frac{u+v}{2} \\ 0 & u & v & 0 \end{pmatrix},$$

$T, S, u, v, t, s, U, V \in \mathbf{C}, (t, s) \neq k \cdot (u, v)$.

Matici přechodu z poznámky dostaneme pro konkrétní volbu: $u = v = 1, U = V = T = S = 0, t = -1, s = 1$.