Jordan

1 Polynomické matice

Definujte λ - *matici (polynomickou matici), součet matic a* $\varphi(\lambda)$-*násobek matice*. Co považujeme za *elementární úpravy* λ-matic? Definujte *kanonický tvar, invariantní faktory* a *hodnost* λ-matice. Definujte *unimodulární matici*. Jaké má vlastnosti?

1. Určete kanonické tvary následujících polynomických matic
a) pomocí elementárních úprav
b) výpočtem invariantních faktorů

$$\begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3\lambda^2-2\lambda+1 & 2\lambda^2+\lambda-1 & 3\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda-1 \\ 2\lambda^3-2\lambda & \lambda^2-1 & 2\lambda^3+\lambda^2-2\lambda-1 \\ 5\lambda^3-4\lambda+1 & 3\lambda^2+\lambda-2 & 5\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda-2 \end{pmatrix}$$

2. Rozhodněte, zda zadané matice jsou unimodulární, v kladném případě určete odpovídající matici inverzní a matice $U(\lambda), V(\lambda)$, které danou matici převádějí na kanonický tvar. Jsou určeny jednoznačně?

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3+5 \\ \lambda^2-\lambda-4 & \lambda^4-\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+i\lambda & -i\lambda^3+(1+2i)\lambda^2-2\lambda+1 \\ 1 & -i\lambda+2i \end{pmatrix}$$

2 Jordanův normální tvar a podobnostní transformace

Definujte *Jordanovu submatici, Jordanovu matici* a *Jordanův normální tvar* matice A. Definujte *podobnost* matic a dokažte, že se jedná o relaci ekvivalence na množině čtvercových matic řádu n.

1. Rozhodněte, zda zadané matice jsou podobné a nalezněte nějakou podobnostní transformaci.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 26 & 11 \end{pmatrix}$$

2. Pro zadanou Jordanovu matici určete kanonický tvar její charakteristické matice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Je zadán kanonický tvar charakteristické matice $J - \lambda E$, určete příslušnou matici Jordanovu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-5)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)^3(\lambda-5)^2 \end{pmatrix}$$

4. Kdy lze třídu podobných matic (nad R, resp. nad C) reprezentovat Jordanovou maticí?

5. Určete Jordanův normální tvar následujících matic.

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 9 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Uvědomte si souvislosti Jordanova normálního tvaru matice, reprezentující danou lineární transformaci s vlastnostmi této transformace.

- Kdy lze lineární transformaci ve $\mathcal{V}_n$ reprezentovat diagonální maticí?

- Za jakých podmíne lze z vlastních vektorů utvořit bázi?

- Jaká je dimenze podprostoru, který generují vlastní vektory, příslušné téže vlastní hodnotě?

- Kdy je dimenze podprostoru, který generují vlastní vektory, příslušné téže vlastní hodnotě λ_i rovna násobnosti kořene λ_i charakteristického polynomu?

- Co jsou to elementární dělitelé a jak souvisí s počtem lineárně nezávislých vlastních vektorů?

3 Jordanův normální tvar a hledání báze

1. Nechť $\varphi, \psi \in L(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n)$ jsou lineární transformace a systém vlastních vektorů každé z nich nechť generuje celý prostor $\mathcal{V}_n$. Dokažte, že tyto transformace komutují právě tehdy, existuje-li jejich společný systém vlastních vektorů. Je předpoklad, který vyžaduje, aby vlastní vektory každé z nich generovaly celý prostor, nezbytný? Odpověď zdůvodněte.

2. V následujících příkladech představuje A matici reprezentující danou lineární transformaci $\varphi \in L(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n)$ v bázi (e_i). Určete alespoň jednu bázi (f_j), v níž je φ reprezentována Jordanovou maticí. Příslušnou Jordanovu matici rovněž určete a najděte odpovídající podobnostní transformaci.

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 9 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

3. Nechť $\varphi, \psi \in L(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n)$ komutují. Dokažte, že pro každý vlastní vektor $\vec{a}$ transformace φ je i vektor $\psi(\vec{a})$ jejím vlastním vektorem, příslušným téže vlastní hodnotě jako $\vec{a}$.

4 Nilpotentní zobrazení a invariantní podprostory

Definujte *nilpotentní* a *cyklické* zobrazení. Definujte *invariantní* podprostor. Co je to *kořenový podprostor*?

1. Uveďte příklady nilpotentních zobrazení, určete jejich stupeň nilpotentnosti.

2. Ukažte, že každé cyklické zobrazení je nilpotentní. Uveďte příklad nilpotentního zobrazení, které není cyklické.

3. Lze najít příklad zobrazení, jehož jedinou vlastní hodnotou je nula, ale přesto není nilpotentní?

4. Je součet nilpotentních zobrazení opět nilpotentní? Je složení dvou nilpotentních zobrazení nilpotentní. V kladném případě ukažte,

v opačném příkladě uveďte protipříklad. (poznámka: součet resp. složení nilpotentních komutujících zobrazení je nilpotentní, obecně to však neplatí, existují nilpotentní zobrazení, která nekomutují a jejich součet, nebo složení není nilpotentní, ale existují také taková nilpotentní nekomutující zobrazení, jejichž součet i složení nilpotentní jsou. Uveďte příklady. Lze najít příklad dvou nilpotentních zobrazení, jejichž složení je nilpotentní, ale součet ne? Lze najít příklad dvou nilpotentních zobrazení, jejichž součet je nilpotentní, ale složení ne?

5. Uvažujme prostor polynomů $P_n[x]$ a zobrazení $\varphi : P_n[x] \ni p(x) \to \varphi(p(x)) = p''(x) \in P_n[x]$ (druhá derivace). Ukažte, že toto zobrazení je nilpotentní, určete stupeň nilpotentnosti, určete jeho obraz a jádro, určete invariantní podprostory vzhledem k φ. Nalezněte bázi, ve které je φ reprezentováno maticí v Jordanově normálním tvaru, jak tato matice vypadá? Totéž udělejte také pro zobrazení $\varphi(p(x)) = x \cdot p'(x)$, (resp. $\varphi(p(x)) = x \cdot p''(x) + p'(x)$, atd.).

6. Nechť V je vektorový prostor na $\mathbf{C}$. Ukažte, že zobrazení $\varphi \in L(V,V)$ je nilpotentní právě tehdy, když jeho jediným vlastním číslem je nula. (A jak to bude nad $\mathbf{R}$?)

7. Nechť $\varphi, \psi \in L(V,V)$ a $U \subset V$ je invariantní podprostor vzhledem k φ i vzhledem k ψ. Pak U je invariantní podprostor také vzhledem k jejich libovolné lineární kombinaci. Ukažte.

8. Nechť $V = U_1 \oplus U_2$, kde U_1, U_2 jsou invariantí vhledem k φ. Ukažte, že existuje báze ve V, v níž je zobrazení φ reprezentováno blokově diagonální maticí.

9. Ukažte, že množina kořenových vektorů zobrazení φ, příslušných témuž číslu a, doplněná nulovým vektorem je podprostor. (tzv. kořenový prostor $R_a = \{\vec{u} \in V | \exists k \in \mathbf{N}, (\varphi - a \cdot \mathrm{id})^k(\vec{u}) = \vec{o}\}$.)

10. Ukažte, že faktorový prostor V/U s operacemi definovanými $[\vec{w}] + [\vec{v}] = [\vec{w} + \vec{v}]$ a $\alpha[\vec{v}] = [\alpha\vec{v}]$ je vektorovým prostorem.

11. Nechť $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ je taková báze ve V, že posledních k vektorů je bází podprostoru U. Ukažte, že systém tříd $\{[\vec{e}_1], \ldots, [\vec{e}_{n-k}]\}$ je bází prostoru V/U.

12. Nechť U je invariantní podprostor vzhledem k φ. Ukažte linearitu indukovaného zobrazení $\varphi_{V/U}[(\vec{a})] = [\varphi(\vec{a})]$.