

Úvod

Doba, kdy k základní výzbroji studentů matematiky ale i fyziky neodmyslitelně patřila kromě Jarníkových a dalších knih i Sběrka úloh z matematické analýzy B. P. Děmidoviče, je již za námi. Letošní (2002) srpnová povodeň, která mimo jiné zlikvidovala i veškerou ruskojazyčnou literaturu v karlínské knihovně, tak jen zvýraznila pozvolný konec éry, ve které podstatnou část odborné knihovny matematiků a fyziků u nás tvořila literatura psaná v tomto jazyce, nyní již nečitelném pro většinu studentů. Uvedená sbírka přitom bývala první, mnohdy na dlouhou dobu jedinou (někdy i poslední...) cizojazyčnou knihou v rukou generací jejich předchůdců.

Vzpomínám (M.Z.) na kolegu ze studií, chlubicího se v letním semestru druhého ročníku, že konečně vlastnoručně dopočítal všech 4460 příkladů té sbírky! (Šlo o několikátý přetisk pátého vydání z roku 1961, které přineslo 200 nových úloh.) Tahle doba je již pryč, podobní jedinci se dnes již asi sotva najdou — a pokud ano, tak spíš tráví většinu času v počítačové laboratoři. Obrázek cvičícího matematické analýzy držícího v ruce (často již značně rozpadlou) Děmidovičovu sbírku patří však dodnes ke koloritu MFF UK.

Paralelní sbírka Proskurjakova z lineární algebry se u nás těšila relativně menší pozornosti. Nezaslouženě! Stojí za to, prokousávat se jejími rafinovanými determinanty či kvadratickými formami stejně podrobně a důsledně, jako probojovávat se řadou limit a integrálů. Přesto asi patří sbírka [Prosk] k ohroženějšímu druhu knih, než kniha [Děm], jejíž odkaz žije neztenčenou silou v početné obci vyučujících a studentů matematické analýzy nejen na MFF UK.

Nebyl to však pouze takovýto altruistický důvod, totiž zachránit pro studenty prvních ročníků hodnotné znalosti předchozí generace, který nás vedl k napsání předložené nové sbírky. Doba je prostě již jiná, než před 50 lety, kdy výše uvedené sbírky vznikaly. Některé tehdejší, příliš speciální postupy a problémy byly pozapomenuty, jiné naopak vznikly či nabyly elegantnější a stručnější podoby. Naším cílem bylo sestavit moderněji pojatou sbírku řešených úloh (a menších esejí) z lineární algebry, psanou podobně jako kniha [PLA], tedy s důrazem na aplikace ve fyzice i jinde v matematice.

Předložená nová sbírka je kolektivním dílem autorů, kteří byli v době jejího psaní většinou ještě studenty MFF UK a kteří

s nadšením odpověděli na výzvu autorů knihy [PLA]. Máme radost, jaké velikosti dosáhl autorský tým: můžete se sami přesvědčit ze zkratek jmen za každým příkladem.

I když mají různí autoři samozřejmě různý styl uvažování, nezdálo se nám účelné (a popravdě řečeno ani možné) sbírku zcela sjednotit. Přístup k problému bude jiný u studenta a jiný u odborníka a nemá vždy smysl, zvláště ne v knížce podobného určení jako je tato, přepisovat formulace toho prvního abstraktnějšími výrazovými prostředky specialisty. Stane se tedy, že čtenář narazí, třeba i ve dvou po sobě následujících příkladech psaných různými autory, na dost odlišný způsob vyjadřování a třeba i odlišnou míru toho, co jeden již považuje za triviální a druhý ještě nikoliv. Ale to je normální, student 1. ročníku může mít na přiměřenou obecnost a abstraktnost výkladu zcela jiný názor než specialista s dlouhodobým tréninkem v oboru. (Někdy je i tomu specialistovi jen kolem 20 let, ale to není rozhodně typické.) Budiž zdůrazněno, že tato sbírka je hlavně studentskou prací. Nejstarší člen autorského kolektivu (M.Z.) přitom nechtěl nijak hrát roli cenzora — ať již tlakem na změnu výkladu těch částí, v nichž se cítí kompetentním posoudit „adekvátní abstraktnost“ zvoleného přístupu, či ovlivňováním použitého jazyka.

Rádi bychom na tomto místě vyzdvihli práci Dalibora Šmída, který kromě toho, že celou sbírku přečetl a opravil v ní mnoho chyb, také pomohl srovnat ty největší rozdíly mezi styly jednotlivých příkladů. Na vytváření elektronické verze sbírky se kromě editora K.V. významně podílel Luboš Motl a na závěrečných korekturách se podílel také David Ondřích. Těmto kolegům a ještě jednou všem, kteří něčím do sbírky přispěli, patří naše steré díky.

Podobně jako sbírky uvedené na začátku, ani předložená sbírka nekopíruje úplně přesně nějaký závazný sylabus. Je členěna s původním úmyslem přizpůsobit se knize [PLA], ale obsahuje i další témata, například úlohy na lineární algebru nad konečnými tělesy. Orientaci mezi příklady snad usnadní stručné obsahy uvedené na konci knihy. Sbírka není vždy členěna stylem „od jednoduššího k složitějšímu“, což plyne i z procesu jejího vzniku. Určitou omluvou nám budiž, že například ani prvně zmíněné sbírky nejsou takto systematicky členěny a mají na mnoha místech, a to i po desetiletích, vždy trochu charakter soupisu, výběru popř. přepracování sbírek minulých s doplněním nových originálních příkladů stylem „co dům

dal”. Co se starých sovětských sbírek týče, šlo samozřejmě o velmi ctihodný „dům” ruské, speciálně moskevské matematiky, a kromě výběru z předchozích světových sbírek do nich byla přidána i mnohá nová tvorba, nápady pramenící z vlastní pedagogické nebo výzkumné matematické činnosti autorů a jejich kolegů.

Chtěli jsme, aby i tato sbírka přinesla nějaké nové nápady, nejen přepis příkladů ze starších zdrojů, a chtěli jsme též, aby zde byly (kromě těch zcela standardních) i nové partie, které nebývají částí starších sbírek. Takže, kromě (ne tak rozsáhlých) partií beze studu a beze změny okopírovaných¹ třeba z Proskurjakova (metody výpočtu determinantů), jsou ve sbírce i originální zpracování mnoha modernějších témat. Věříme, že některé z nových (či nově pojatých) příkladů budou stát za převzetí i autorům sbírek budoucích.

Sbírka obsahuje jistě ještě dost chyb a nedokonalostí (zvláště v poslední kapitole, která byla doplněna na poslední chvíli). Budeme rádi, když na ně čtenáři upozorní. Elektronickou verzi sbírky považujeme do jisté míry za otevřený projekt, kam mohou být, třeba zatím jen s provizorní a nehotovou grafickou úpravou, později přidávána další zajímavá témata. Budeme vděčni za reakce a náměty nových příkladů, elektronická verze knihy by jim měla být otevřena.

Sbírka je určena pro 1.–5. ročník MFF UK, přičemž převahu tvoří příklady určené skutečně pro první ročník. Mnohé elegantní aplikace lineární algebry však potřebují hlubší znalosti i z jiných oborů. Zdálo se nám škoda je sem nezařadit, ač kromě dobrých znalostí LA vyžadují pokročilejší znalosti třeba z analýzy, teoretické fyziky nebo přinejmenším vyžadují zájem o další obory matematiky, jakými jsou kombinatorika či diskrétní matematika obecně. Prostě matematika je jen jedna (což je z hlediska LA obzvláště dobře patrné), je navíc provázána s fyzikou a ostatními vědami, dokonce i její klasické oblasti jsou stále ve stadiu vývoje. Toto vědomí chce naše sbírka mezi studenty těchto oborů a obecně uživateli LA dále posilovat.

Karel Výborný, Miloš Zahradník

¹Kopírování beze změny, pokud se děje v přiměřeném rozsahu, považujeme za výraz nejvyššího uznání těm, jejichž text kopírujeme.

Seznam autorů

Autora či autory úlohy lze poznat podle zkratky uvedené vždy za hvězdičkou na konci úlohy. V následující tabulce jsou uvedeny všechny použité zkratky.

MB	Milan Berta
RB	Robert Babilon
TB	Tomáš Brauner
PC	Pavel Cahyňa
ZD	Zdeněk Dvořák
ZJ	Zdenka Jakubková
PK	Petr Kalina
JK	Jan Kašpar
DKo	David Kofroň
BK	Bohdan Koudelka
KK	Karel Kouřil
DK	Daniel Král'
AK	Antonín Krása
SK	Svatopluk Krýsl
LM	Luboš Motl
VP	Vít Průša
DŠ	Dalibor Šmíd
MV	Martin Veis
PV	Petr Veselý
ZV	Zuzana Vokáčová
JV	Jan Vybíral
KV	Karel Výborný
MZ	Miloš Zahradník
JZ	Jan Zemen

Krátkou charakterizaci většiny příkladů naleznete v závěru knihy za seznamem literatury. Aktuální stav elektronické verze sbírky naleznete na stránce M.Z., která byla koncem roku 2002 umístěna na

<http://adela.karlin.mff.cuni.cz/~mzahrad/>

Obsah

1	Geometrie a soustavy rovnic	12
1.1	Jedna obyčejná soustava lineárních rovnic	12
1.2	Soustava 4×4 s parametrem	13
1.3	Odpor osmistěnu	16
1.4	Soustavy lineárních rovnic a elektrické obvody	17
2	Hrátky s grupami a permutacemi	21
2.1	Grupová rozcvička aneb Symetrie čtyřstěnu	21
2.2	Jednoduché grupy	25
2.3	Grupy a teorie čísel	28
2.4	Nevelké grupy	29
2.5	Grupa generovaná Pauliho maticemi	31
2.6	Konjugované prvky	32
2.7	Rozklady grup, přímé a polopřímé součiny	33
2.8	Znaménko permutace	35
2.9	Permutace devětkrát jinak	36
2.10	Lloydova patnáctka a permutace	40
3	Konečná i jiná tělesa	43
3.1	Tělesa modulo prvočíslo	43
3.2	Zmatené výpočty s inverzní maticí	43
3.3	Podprostory nad konečným tělesem	45
3.4	Konečná tělesa polynomů	46
3.5	Vzorec pro Ludolfovo číslo od Johna Machina	48
3.6	Sudé podmnožiny se sudými průniky	49
3.7	Doplňování systému sudých podmnožin se sudými průniky	51
3.8	Liché podmnožiny s lichými průniky	52
3.9	Liché podmnožiny se sudými průniky	53
3.10	Sudé podmnožiny s lichými průniky	54

4	Vektorová odlysea	56
4.1	Rozklad degenerovaného rovnoběžnostěnu	56
4.2	Tři základní vektorové prostory	60
4.3	Jeden neobvyklejší vektorový prostor	61
4.4	Je to podprostor, není to podprostor...	62
4.5	Lineární závislost vektorů z \mathbb{R}^4	65
4.6	Dimenze lineárního obalu	67
4.7	Hodnost lineárního zobrazení	68
4.8	Složky vektoru vzhledem k ortogonální bázi	70
4.9	Báze, souřadnice, homomorfizmy	71
4.10	Magické čtverce	77
4.11	Vektory se sudým počtem jedniček	80
4.12	Bernštejnovy polynomy	81
5	Úlohy pro ortogonalisty	83
5.1	Ortogonální doplněk	83
5.2	Grammova-Schmidtova ortogonalizace	85
5.3	Ortogonální doplněk jednoho řádkového prostoru	89
5.4	Různé normy v \mathbb{R}^n	89
5.5	Normy pro matice	92
5.6	Jak daleko jsou vektory od matic, aneb Hrušky s jab- kama	93
5.7	Lineární regrese tak nebo jinak	95
6	Matice a jim podobné	100
6.1	Pauliho spinové matice	100
6.2	Matice homomorfizmu	104
6.3	Ortogonální projektory na podprostor	106
6.4	Matice vektorového součinku	110
6.5	Výpočet inverzní matice	113
6.6	Modulární grupa	114
6.7	Fisherova nerovnost	119
6.8	Cykličnost stopy	120
7	Lineární algebra pro grafiky	122
7.1	Je to strom nebo není to strom?	122
7.2	Laplaceova matice	123
7.3	Počet koster	124

7.4	Prostor cyklů grafu	124
7.5	Spektrum matice incidence grafu	125
7.6	Vlastnosti matice incidence grafu	127
7.7	Spektrum matice incidence Petersenova grafu	130
7.8	Rozklad úplného grafu na tři Petersenovy grafy	131
7.9	Spektrum matice incidence součinu grafů	131
7.10	Jak poznat stupeň souvislosti v grafu?	133
7.11	Expandéry	135
8	Determinátoři	136
8.1	Obyčejné determinanty s čísly	145
8.2	Determinant s řeckými písmeny	147
8.3	Vandermondův determinant	148
8.4	Výpočet cirkulantu využitím znalosti spektra	150
8.5	Zobecněná Hilbertova matice	151
8.6	Rezultant	153
8.7	Poloha bodu vůči nadrovině	155
8.8	Cauchy–Binetova věta	156
9	Naše první vlastní čísla	160
9.1	Fibonacciho posloupnost	160
9.2	Gershgorinova věta	162
9.3	Vlastní čísla jedné obyčejné matice	163
9.4	Vlastní čísla pro začátečníky	164
9.5	Vlastní čísla matice 4×4	165
9.6	Sinus matice	167
9.7	Odmocnina z matice	169
9.8	Sinus či odmocnina matice jinak	170
9.9	Napůl normální, napůl nilpotentní zobrazení	173
9.10	Jak počítat charakteristický polynom matice 3×3 pomocí jejích invariantů	175
9.11	Jednorozměrný model krystalu	178
10	Grupy matic a otců	182
10.1	Jak zatočit s maticemi v \mathbb{R}^2	182
10.2	Matice otočení v \mathbb{R}^3	185
10.3	Grupa Lorentzových transformací	189
10.4	Reprezentace	191

11	Exponenciála se nebojí	194
11.1	Dvouhadinový systém aneb Hrátky s maticí 2×2 . . .	194
11.2	Soustava diferenciálních rovnic s rezonancí	197
11.3	Diferenciální rovnice s pravou stranou	201
11.4	Komplexně půvabná diferenciální rovnice	203
11.5	Soustava 3 diferenciálních rovnic	206
11.6	Lineární nezávislost řešení soustavy diferenciálních rovnic	208
11.7	Jsou exponenciála a logaritmus opravdu navzájem inverzní?	209
11.8	Generátory $SU(2)$ aneb Výpočet exponenciály trikem pro speciální matici	212
11.9	Jedna exponenciální formule pro determinant	214
12	Lieovy hlavolamy	220
12.1	Jak připravit kysličník sírový	220
12.2	Algebra \mathfrak{so}_3 a vektorový součin	222
12.3	Řešitelné algebry	225
12.4	Anihilátor	225
12.5	Nebojte se Dynkinových diagramů	227
13	Duální prostory k pronájmu	232
13.1	Transformace složek formy při změně báze	232
13.2	Duální báze	233
13.3	Jedna opravdová forma	239
14	Matice pro středně pokročilé	241
14.1	Konvergence k vlastním číslům	241
14.2	Matice hustoty	242
14.3	Spektrum polynomu	244
14.4	Ještě jednou polynomy matic	245
14.5	Polynomy matic potřetí	246
14.6	Vlastní čísla nerozložitelných matic	248
14.7	Hadamardovy matice	249
14.8	Základní vektorové identity v \mathbb{R}^3	251
14.9	Chování smíšeného součinu při lin. transformacích . . .	252
14.10	Komutátorová binomická formule	254
14.11	Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích	254

15	Jordan hledí pozitivně	259
15.1	Birkhoffova věta	259
15.2	Stochastické matice	260
15.3	Nilpotentní matice	261
15.4	Jordanův tvar poprvé	268
15.5	Jordanův tvar podruhé	270
15.6	Jordanův tvar potřetí	272
15.7	Jordanův tvar počtvrté	274
15.8	Jordanův tvar naposledy	276
15.9	Jsou si ty matice opravdu podobné?	278
16	Ortogonální funkce a trochu kvantové mechaniky	281
16.1	Ortogonální polynomy	281
16.2	Variace na kreační operátory	287
16.3	$\mathbb{SO}(4)$ symetrie atomu vodíku	290
16.4	Vícerozměrný anizotropní harmonický oscilátor	298
16.5	Kvantování momentu hybnosti	301
17	Lepé tvary kvadratické	306
17.1	Klasifikace kvadrik aneb Vzorečky, vzorečky	306
17.2	Klasifikace kvadrik aneb Jak to vymyslet sám	311
17.3	Diagonalizace kvadratické formy: řádkové a sloupcové úpravy	314
17.4	Diagonalizace kvadratické formy: vlastní čísla	316
17.5	Signatura kvadratické formy	318
17.6	Signatura stručně	320
17.7	Průmět průniku paraboly a nadroviny	321
17.8	Poloha bodu vůči sféře	322
17.9	Chladicí věže poprvé: \mathbb{R}^3	323
17.10	Chladicí věže podruhé: \mathbb{R}^n	325
18	Rozklady polárníka při teplotní pseudoinverzi	331
18.1	Polární rozklad deformačního gradientu	331
18.2	Polární rozklad singulární matice	336
18.3	Nejbližší řešení soustavy rovnic	337
18.4	Lineární regrese potřetí jinak	337

19	Poklady ukryté v tenzorech	340
19.1	Jak může vypadat tenzor typu $(2, 1)$	340
19.2	Jednoduchý tenzor typu $(0, 2)$	342
19.3	Tenzor setrvačnosti	343
19.4	Tenzory ve speciální relativitě	345
19.5	O Levi–Civitově tenzoru	350
19.6	Symetrické a antisymetrické tenzory	354
19.7	Tenzorové součiny operátorů	357
19.8	Rozložitelné antisymetrické tenzory a vektorový součin	358
20	Několik dalších příkladů	362
20.1	Násobení blokových matic; výpočet inverze blokové matice	362
20.2	Gaussovské integrály v \mathbb{R}^n — základní výpočty	362
20.3	Integrály polynomů a exponenciály (vytvorující funkce) vůči gaussovské míře	366
20.4	Exponenciála mocninné řady a rozvoj logaritmu	371
20.5	Přibližné výpočty velkých mocnin matic	373
20.6	Násobení blokových matic typu 2×2	374
20.7	Cyklické vektory operátorů	375
20.8	Zobecněný Vandermondův determinant	377
20.9	Výpočet odmocniny symetrické matice	379
20.10	Pfaffián antisymetrické matice	380
20.11	Populační model	382
20.12	Resolventa matice a operátoru	384
20.13	Signatura kvadratické formy	387
20.14	Rozsazení u kulatého stolu	388
20.15	Signatura cyklické kvadratické formy	390
20.16	Přibližný výpočet $A^n x$	392
20.17	Ortogonalizace posloupnosti	393
20.18	Ortogonalizace posloupnosti funkcí	394
20.19	Goniometrický Vandermondův determinant	395
20.20	Jednoduchý příklad na spektrum	396
20.21	Systémy oscilátorů s vnější silou typu δ -funkce	396
20.22	Resonance v soustavách lineárních diferenciálních rovnic	398
20.23	Několik číselných příkladů na řešení lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty	399

20.24	Převedení obdélníkové matice $(A B)$ na tvar $(\cdot A^{-1}B)$. Co všechno z toho plyne.	401
20.25	Minima kvadratických forem a systémy mnoha spřažených harmonických oscilátorů	403
20.26	Interpretace výsledku úlohy 20.25 pro systém spřažených oscilátorů. Feynman–Kacova formule.	405
20.27	Anihilační a kreační operátor na konečněrozměrném prostoru se skalárním součinem	409
20.28	Projekce ortogonální báze	410
20.29	Translačně invariantní kvadratické formy a náhodné procházky na mříži	411
20.30	Lorentzovy transformace	421

1 Geometrie a soustavy rovnic

1.1 Jedna obyčejná soustava lineárních rovnic

Úkol: Nalezněte všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned}2x + (2 + 2i)y + 2iz &= 1 \\(1 - i)x + (1 + 3i)y + (i - 1)z &= 0 \\(1 + i)x + (1 - i)y + (1 + i)z &= 1.\end{aligned}$$

Řešení: Soustavu zapíšeme pomocí rozšířené matice a řádkovými úpravami ji převedeme na horní trojúhelníkový tvar (či přesněji tvar, kdy je v $(n + 1)$. řádku zleva alespoň o jednu nulu více než v řádku n -tém).

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} 2 & 2 + 2i & 2i & | & 1 \\ 1 - i & 1 + 3i & i - 1 & | & 0 \\ 1 + i & 1 - i & 1 + i & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2)=2\cdot(2)-(1-i)\cdot(1) \\ (3)=2\cdot(3)-(1+i)\cdot(1)}}} \\ & \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 + 2i & 2i & | & 1 \\ 0 & -2 + 6i & -4 & | & -1 + i \\ 0 & 2 - 6i & 4 & | & 1 - i \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{(3)=(3)+(2)} \begin{pmatrix} 2 & 2 + 2i & 2i & | & 1 \\ 0 & -2 + 6i & -4 & | & -1 + i \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Z posledního řádku vidíme, že celá soustava obsahuje jen dvě nezávislé rovnice (a neobsahuje vzájemně si protirečící rovnice — to by odpovídalo například poslednímu řádku $(0\ 0\ 0\ |1)$), a bude mít proto nekonečně mnoho řešení.

Nejprve nalezneme jedno (libovolné) řešení $(x, y, z)^T$ takto upravené nehomogenní soustavy. Poslední řádek neklade žádnou podmínku na z , zvolíme si například² $z = 1$. Ze druhého řádku dopočítáme $y = (4z - 1 + i)/(-2 + 6i) = -\frac{1}{2}i$ a konečně z prvního řádku $x = (1 - 2iz - (2 + 2i)y)/2 = -\frac{1}{2}i$. *Partikulární řešení* je tedy $(-\frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}i, 1)^T$.

²Zde můžeme volit libovolné číslo, řídíme se jen podle toho, s čím se nám bude později lépe počítat.

Dále budeme hledat všechna řešení odpovídající homogenní soustavě, tedy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2+2i & 2i & 0 \\ 1-i & 1+3i & i-1 & 0 \\ 1+i & 1-i & 1+i & 0 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2+2i & 2i & 0 \\ 0 & -2+6i & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Homogenní soustava má vždy tu vlastnost, že pokud jsou nějaké vektory $(x, y, z)^T$ a $(x', y', z')^T$ jejími řešeními, pak i vektor $(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')^T$ je řešením pro libovolné $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Řešení homogenní soustavy lineárních rovnic tedy tvoří vektorový prostor, a abychom jej popsali, stačí najít jeho bázi, nebo řečeno jinými slovy, najít všechna lineárně nezávislá řešení (maximální množinu lineárně nezávislých řešení).

V našem případě bude existovat jediné nezávislé řešení (tři neznámé, dvě rovnice) a najdeme ho podobně jako řešení partikulární. Poslední řádek neklade podmínku na z , zvolíme tedy³ $z = 1$ a z druhého řádku dopočítáme $y = 4z/(-2 + 6i) = -(1 + 3i)/5$. Vidíme, že si můžeme zjednodušit život, když místo $z = 1$ zvolíme $z = 5$; pak vyjde samozřejmě $y = -1 - 3i$ a konečně $x = -i - 2$. Obecné řešení homogenní soustavy je proto $\lambda(-i - 2, -1 - 3i, 5)^T$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Libovolné řešení celé (nehomogenní) soustavy lze tedy zapsat ve tvaru $(-\frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}i, 1)^T + \lambda(-i - 2, -1 - 3i, 5)^T$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Tato množina tvoří *afinní vektorový prostor*: netvoří tedy vektorový podprostor \mathbb{C}^3 , má tvar „vektor plus vektorový podprostor“ (jinak řečeno, je to prvek *faktorprostoru* \mathbb{C}^3/\mathbb{C}). *KV

1.2 Soustava 4×4 s parametrem

Úkol: Řešte soustavu vzhledem k parametru $a \in \mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right)$$

³Zde nelze volit $z = 0$, protože pak bychom dostali triviální řešení $x = y = 0$.

Řešení: Můžeme gaussovsky eliminovat:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(1)=(4) \\ (4)=(1)}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\substack{(2)=(1)-(2) \\ (3)=(1)-(3) \\ (4)=a(1)-(4)}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 & a^2-1 & a-1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(4)=(4)+(2) \\ \text{a v dalším} \\ \text{kroku} \\ (4)=(4)+(3)}}} \\
 & \xrightarrow{\substack{(2)=(2)/(a-1) \\ (3)=(3)/(a-1) \\ a \neq 1}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a+3)(a-1) & a-1 \end{array} \right) \xrightarrow{} \\
 & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a+3) & 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

tedy pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$ jde o soustavu nezávislých rovnic s jedním řešením $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3})$. Prohazování rovnic v prvním kroku nám ušetřilo více práce, než se může zdát: pokud bychom totiž použili během eliminace úpravu typu $(2) = a \cdot (2) + \dots$, museli bychom případ $a = 0$ diskutovat zvlášť (stejně jako to uděláme pro $a = 1$), neboť pro $a = 0$ není tato úprava ekvivalentní. V našem postupu se mohlo nejvýše stát, že jsme například přičetli ke čtvrté rovnici nulový násobek jiné rovnice, což je dovoleno.

Pro $a = -3$ jsme dostali soustavu, která nemá řešení (poslední rovnici nelze splnit).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Pro $a = 1$ jsou v soustavě čtyři shodné rovnice a hledáme proto v \mathbb{R}^4 obecné řešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Nejprve najdeme jedno *partikulární řešení* — např. $(1, 0, 0, 0)$. Pak nalezneme v \mathbb{R}^4 obecné řešení homogenní rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, tedy lineární kombinaci kterýchkoli tří lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice (neboli kterékoli baze prostoru řešení rovnice, například $(1, -1, 0, 0)$, $(0, 1, -1, 0)$, $(0, 0, 1, -1)$). Obecné řešení pro $a = 1$ je proto

$$(1, 0, 0, 0) + \alpha(1, -1, 0, 0) + \beta(0, 1, -1, 0) + \gamma(0, 0, 1, -1), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Speciálně tuto soustavu lze vyřešit i „upřeným pohledem“, když využijeme její *symetrii* (co máme na mysli „symetrií“ vysvětlíme za chvíli): nejprve budeme postupovat intuitivně. Čtyři rovnice soustavy nečiní rozdíl mezi neznámými x_1, \dots, x_4 , a tedy by mělo platit $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x$. Dosazením do libovolné z rovnic máme $3x + ax = 1$, tedy $x = 1/(a + 3)$ pro $a \neq -3$. Všimněte si, že pro $a = 1$ jsme nezjistili žádné význačné chování.

Nyní upřesníme, co máme na mysli symetrií soustavy: pokud v celé soustavě libovolně zaměníme proměnné x_1, \dots, x_4 , dostaneme opět původní soustavu. Například, píšeme-li všude x_2 místo x_3 a naopak, stane se z druhé rovnice třetí, ze třetí rovnice druhá a první a čtvrtá rovnice se nezmění. Celkem jsme ale dostali zase původní soustavu. Z toho plyne, že pokud je řešením (x_1, x_2, x_3, x_4) , pak i například (x_1, x_3, x_2, x_4) musí být řešením. Tuto úvahu lze zopakovat pro libovolnou dvojici proměnných, takže pokud má mít soustava jediné řešení, pak z toho plyne, že $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ (k tomu ale samozřejmě potřebujeme invarianci vůči libovolné záměně proměnných). Pokud má soustava řešení více, pak takto nalezneme jen jediné z nich.

Předchozí dva odstavce lze shrnout i jinak: pokud všechny čtyři rovnice sečteme a dělíme $(a + 3)$, dostaneme $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4/(a + 3)$. Pokud tuto rovnici odečteme postupně od první až čtvrté rovnice dostaneme $(a - 1)x_i = 1 - 4/(a + 3)$ pro $i = 1, 2, 3, 4$, což dává náš výsledek. Tentokrát vidíme také, že pro $a = 1$ nastává význačný případ, ale museli jsme zase na oplátku trochu počítat. *PK,KV

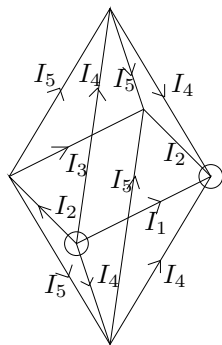
1.3 Odpor osmistěnu

Úkol: Procvičte si řešení soustav lineárních rovnic. Mějte drátěný pravidelný osmistěn. Každá z jeho dvanácti hran necht' má odpor R .

- Prívody jsou připojeny na protější vrcholy a procházející proud je I . Spočítejte napětí mezi těmito vrcholy. Využijte maximálně symetrie problému.
- Zopakujte předchozí bod, ovšem s prívody na sousedních vrcholech.

Řešení:

a) V každém vrcholu končí 4 hrany. Díky symetrii musí v prvním případě do každé hrany téci proud $\frac{1}{4}I$. Napětí na každé z těchto 4 hran je $\frac{1}{4}RI$, totéž platí i pro protější 4 hrany. Celkově jsou mezi protějšími vrcholy dvě takové hrany, čili celkové napětí je rovno $2\frac{1}{4}RI = \frac{1}{2}RI$, což je odpověď na první otázku. Čtyřmi hranami čtverce v rovině kolmé na spojnici připojených vrcholů neprotéká díky symetrii žádný proud.



b) Na obrázku jsme označili proudy I_i . Díky symetrii problému jsme mohli označit některé proudy protékající různými hranami stejným symbolem. Kroužky označují elektrické prívody. Kontinuita proudu u prívodů, resp. kontinuita proudu ve vrcholu vlevo uprostřed, resp. kontinuita proudu v horním vrcholu (Kirchhoffův zákon poprvé) nám dává rovnice

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + 2I_4 &= I, & I_2 - I_3 - 2I_5 &= 0, \\ (1 - 1)(I_4 + I_5) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Všimněte si, že poslední podmínka je triviální právě proto, že horní vrchol leží symetricky mezi prívody. Podmínky pro napětí na přední stěně, zadní stěně a levé stěně (Kirchhoffův zákon podruhé) dávají postupně

$$R(I_1 - 2I_4) = 0, \quad R(I_3 - 2I_5) = 0, \quad R(I_2 + I_5 - I_4) = 0. \tag{2}$$

Ostatní podmínky jsou díky symetriím buď totožné s podmínkami (1) a (2), nebo jsou to jejich součty a rozdíly, (čemuž říkáme *lineární kombinace*).

Pohledem na (1) a (2) zjistíme, že máme 5 netriviálních rovnic pro 5 neznámých. Vyjádřením $I_4 = \frac{1}{2}I_1$ a $I_3 = 2I_5$ z (2) a dosazením do poslední rovnice z (2) a do (1) dostáváme tři rovnice pro I_1, I_2, I_5

$$I_2 + I_5 - \frac{1}{2}I_1 = 0, \quad 2I_1 + I_2 = I, \quad I_2 - 4I_5 = 0.$$

Sečtením čtyřnásobku první rovnice s třetí rovnicí dostáváme rovnici

$$5I_2 - 2I_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{2}{5}I_1$$

a dosazením do druhé rovnice v (3) máme

$$2I_1 + \frac{2}{5}I_1 = I \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{5}{12}I.$$

Napětí mezi přívody je tedy $RI_1 = \frac{5}{12}RI$. *LM

1.4 Soustavy lineárních rovnic a elektrické obvody

Úkol: Uvažujme nějakou elektrickou síť obsahující zdroje stejnosměrného proudu a spotřebiče (odpory). Formálně ji lze popsat jako (orientovaný 2-souvislý) graf o N vrcholech, ve kterém každé větvi (hraně) je přiřazena velikost a směr protékajícího proudu. Tyto proudy vyhovují Kirchhoffovým zákonům

$$\sum_{j, (kj) \in H} I_{kj} = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (3)$$

$$\sum_{(i,j) \in C} I_{ij} R_{ij} = \sum_{(i,j) \in C} U_{ij}, \quad C \text{ je libovolný cyklus v } H, \quad (4)$$

kde I_{kj} znamená proud tekoucí hranou spojující j -tý a k -tý vrchol (uzel) grafu a U_{ij} , resp. R_{ij} označuje elektromotorické napětí zdroje, resp. odpor v příslušné větvi (hraně). V (3) se sčítá přes všechny uzly j spojené s k -tým uzlem hranou (což značíme $(kj) \in H$, H je množina všech hran grafu), ve (3) je tedy tolik rovnic, kolik je vrcholů grafu (uzlů v obvodu). V (4) se sčítá přes všechny hrany (ij)

obsažené v daném cyklu grafu; v (4) je tedy tolik rovnic, kolik je v celém obvodu cyklů (uzavřených smyček).

Dokažte, že soustava rovnic (3) a (4) má jednoznačné řešení pro daná napětí U_{ij} a odpory $R_{ij} > 0$.

Řešení: Kdyby existovala dvě různá řešení Kirchhoffových zákonů, potom bychom jejich odečtením dostali netriviální řešení pro tentýž obvod, avšak bez zdrojů napětí. Odhlédněme nyní na chvíli od fyzikální interpretace, podle níž je takové řešení nepřípustné (neboť bez baterie nám v obvodu proud nepoteče), a podívejme se na lineárně algebraickou podstatu problému. Na řešení této úlohy budeme demonstrovat jednu praktickou metodu řešení elektrických obvodů, tzv. metodu uzlových napětí.

Na našem grafu zavedeme potenciál u (jakožto funkci na vrcholech grafu) následujícím způsobem. Vybereme libovolný uzel grafu, nechť je to třeba uzel 1, a přiřadíme mu potenciál $u_1 = 0$. Pro libovolný jiný uzel k existuje díky souvislosti cesta $i_1 i_2 \dots i_n$, spojující jej s uzlem 1, tj. $i_1 = 1$, $i_n = k$. V uzlu k pak definujeme potenciál (zápis je jenom formální — musíme být trochu opatrní s orientací proudů a polaritou napětí)

$$u_k = \sum_{j=1}^{n-1} (U_{i_j i_{j+1}} - I_{i_j i_{j+1}} R_{i_j i_{j+1}}).$$

Díky druhému Kirchhoffovu zákonu (4) je tento potenciál dobře definován, tj. nezávisí⁴ na volbě cesty spojující vrcholy 1 a k .

Každému řešení (3) a (4) lze takto přiřadit potenciál a naopak ze znalosti potenciálu můžeme jednoznačně rekonstruovat proudy podle

$$I_{ij} = \frac{1}{R_{ij}}(u_i - u_j + U_{ij}).$$

Budeme tedy hledat potenciál (a pro něj také dokážeme jednoznačnost řešení), přičemž rovnice (4) jsou pak splněny automaticky a rovnice (3) přejdou na

$$\sum_{j, (kj) \in H} \frac{1}{R_{kj}}(u_k - u_j + U_{kj}) = 0, \quad k = 2, \dots, N. \quad (5)$$

⁴Pokud do cesty i_1, \dots, i_k přidáme libovolnou smyčku C , pak se u_k změní o $\sum_{(i,j) \in C} U_{ij} - \sum_{(i,j) \in C} R_{ij} I_{ij} = 0$.

Uvažujeme přitom rovnice pro všechny uzly $k \neq 1$, pro $k = 1$ už je rovnice (5) lineárně závislá na rovnicích ostatních, neboť neznámých je jen $N - 1$, a to u_2, \dots, u_N .

Vidíme, že když soustavu (5) pro potenciály u_k zapíšeme maticově jako $Zu = U$ s vektory

$$u = (u_2, \dots, u_N)^T, \quad U = \left(\sum_{j, (2j) \in H} U_{2j}/R_{2j}, \dots, \sum_{j, (Nj) \in H} U_{Nj}/R_{Nj} \right)^T,$$

potom v k -tém řádku čtvercové matice Z bude v k -tém sloupci koeficient

$$Z_{kk} = \sum_{j, (kj) \in H} \frac{1}{R_{kj}}$$

a v j -tém sloupci ($j \neq k$) koeficient

$$Z_{jk} = \begin{cases} -1/R_{jk} & \text{pokud } (jk) \in H \text{ a } j \neq 1 \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

samozřejmě bereme $R_{kj} = R_{jk}$.

Díky $R_{ij} > 0$ budou elementy matice Z splňovat nerovnost

$$\sum_{j \neq k} |Z_{jk}| \leq |Z_{kk}|, \quad k = 2, \dots, N, \quad (6)$$

přičemž existuje takové k , že pro něj nastane ostrá nerovnost (jsou to právě ty uzly, které jsou spojeny s uzlem 1). Říkáme, že Z je *diagonálně dominantní*.

Zbývá dokázat, že za podmínek (6) už je matice Z regulární. Nechť tedy (pro spor) existuje nějaká netriviální lineární kombinace řádků matice Z , která je nulová, tj. existují čísla a_j , z nichž aspoň jedno je nenulové, že

$$\sum_{j=2}^N a_j Z_{jk} = 0, \quad \forall k = 2, \dots, N.$$

Jestliže nemají všechna a_j stejnou velikost, vybereme z nich takové a_{j_0} , které je v absolutní hodnotě největší. Pro j_0 -tý sloupec matice

Z potom platí (použijeme (6))

$$|a_{j_0} Z_{j_0 j_0}| = \left| \sum_{j \neq j_0} a_j Z_{j j_0} \right| \leq$$

$$\sum_{j \neq j_0} |a_j Z_{j j_0}| < |a_{j_0}| \sum_{j \neq j_0} |Z_{j j_0}| \leq |a_{j_0} Z_{j_0 j_0}|,$$

což je spor. Jestliže jsou všechna a_j v absolutní hodnotě stejně velká, dostaneme spor analogicky tak, že se podíváme na ten sloupec, pro který nastane v (6) ostrá nerovnost.

Na závěr poznamenejme, že stejnou myšlenku lze použít i pro důkaz jednoznačnosti řešení Kirchhoffových zákonů v případě obvodů se střídavých proudem. Tam se kondenzátorům a cívkám přiřazují místo odporů obecně komplexní impedance. Pro jednoznačnost řešení pak bude stačit, když například impedance každé součástky bude mít kladnou reálnou část. *TB

2 Hrátky s grupami a permutacemi

2.1 Grupová rozcvička aneb Symetrie čtyřstěnu

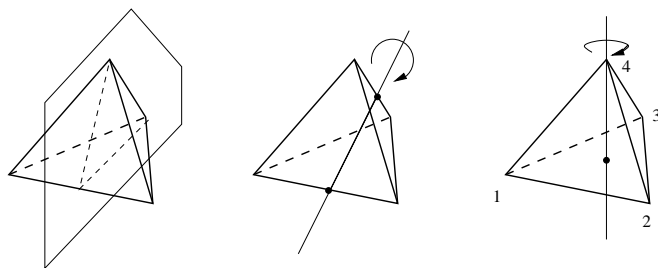
Úkol: Popište grupu symetrií tetraedru a ukažte, že není komutativní. Nalezněte všechny její netriviální podgrupy neobsahující zrcadlení a zjistěte, které jsou komutativní. Studujte strukturu grupy i podgrup (rozložte je na součin podgrup). Srovnajte s rozkladem \mathbb{S}_4 v kapitole „Řešil byste rovnici pátého stupně?“ Pěstitelské příručky [PLA].

Prvkem symetrie daného tělesa je každé shodné zobrazení (tj. které zachovává vzdálenosti libovolných dvou bodů), které zobrazí těleso samo na sebe. Pro čtyřstěn to znamená, že zobrazí každý z vrcholů do některého z vrcholů.

Řešení: Kdo nemá zkušenosti s grupami, nechť si nejprve ověří, že množina symetrií čehokoliv je skutečně grupa (s operací skládání): to znamená, že skládání je uzavřené, asociativní a má jednotkový a inverzní prvek. Studium symetrií je hlavní aplikací teorie grup.

Odpověď na první otázku je velmi jednoduchá. Označíme-li vrcholy čísly 1,2,3,4, je grupa symetrií izomorfní s grupou permutací této množiny \mathbb{S}_4 (*symetrickou grupou*). A proč? Je zřejmé, že \mathbb{S}_4 obsahuje všechny symetrie, neboť při shodném zobrazení zachovávajícím tetraedr se libovolný vrchol jednoduše *musí* zobrazit zase na místo některého z vrcholů. Naopak libovolná permutace představuje symetrii, neboť libovolné dva vrcholy jsou vždy ve stejném vztahu, tedy sousedí. Nemůže se proto stát, že by se některá hrana (či jiná vzdálenost dvou bodů) natáhla či zkrátila.

Geometricky se jedná o tyto symetrie: rotace o $\pm 120^\circ$ kolem os procházejících vrcholem a středem protilehlé stěny (8 různých), rotace o 180° kolem os, které spojují středy dvou protilehlých hran (3 různé) a identitu; to je celkem 12 *přímých* symetrií, odpovídajících sudým permutacím \mathbb{A}_4 . Zbýlých dvanáct operací získáme složením libovolného zrcadlení s (které zachovává čtyřstěn; rovina zrcadlení prochází jednou hranou a je kolmá na protější hranu) s postupně jmenovanými přímými symetriemi; takto získáme 12 různých lichých permutací, mezi nimi i jednoduchá zrcadlení.



Obrázek 1: Symetrie čtyřstěnu: zrcadlení, rotace kolem dvoučetné a tříčetné osy.

Označíme-li $\mathbb{S}_2 = \{1, s\}$ (grupu⁵ generovanou oním jedním zrcadlením), pak jsme právě řekli, že \mathbb{S}_4 je kartézským součinem dvou svých podgrup \mathbb{A}_4 a \mathbb{S}_2 ; každý prvek $g \in \mathbb{S}_4$ lze zapsat například jako as , $a \in \mathbb{A}_4$, $s \in \mathbb{S}_2$. Všimněte si, že s (tedy \mathbb{S}_2) můžeme vybrat více způsoby a stále dostaneme stejnou \mathbb{S}_4 . Pokud ale zvolíme \mathbb{S}_2 pevně, je pro každé $g \in \mathbb{S}_4$ rozklad $g \mapsto (a, s)$ jednoznačný. Takový rozklad je jednoznačný pro libovolnou podgrupu.

Nyní jsme ale grupu rozložili pouze jako množinu prvků a nezajímali se o to, jak operace na grupě „dodržuje“ tento rozklad. Naším cílem je psát $g_1g_2 = g_3$ jako $(a_1, s_1) * (a_2, s_2) = (a_3, s_3)$; chceme rozložit i grupovou operaci: násobení dvou prvků g_1, g_2 v \mathbb{S}_4 proběhne tak, že každý rozložíme na dvě složky, a provedeme určitou operaci s prvními složkami (přičemž zůstáváme v \mathbb{A}_4) a pak určitou operaci s druhými složkami (zůstáváme v \mathbb{S}_2) a získáme přímo rozklad výsledku g_1g_2 do složek. Tím definitivně rozdělíme \mathbb{S}_4 na dvě menší „nezávislé“ části.

Jak musí vypadat operace $*$? Nejjednodušší myslitelný předpis $(a_1, s_1) * (a_2, s_2) = (a_1a_2, s_1s_2)$ nefunguje, neboť to bychom tvrdili, že $a_1s_1a_2s_2 = g_1g_2$ (tedy to, co je vlevo) je totéž co $a_1a_2s_1s_2$ (to, co je vpravo). Prvky z grup \mathbb{A}_4 a \mathbb{S}_2 spolu ale nekomutují, takže musíme

⁵Můžeme si ji představit jako $\{1, -1\}$ s operací násobení. Tomuto ztotožnění se říká izomorfismus.

použít složitější předpis

$$(a_1, s_1)(a_2, s_2) = (a_1 s_1 a_2 s_1^{-1}, s_1 s_2).$$

Ten odpovídá $a_1 s_1 a_2 s_2 = a_1 s_1 a_2 s_1^{-1} s_1 s_2$, což platí. Abychom splnili naše předsevzetí, že násobení „na prvním místě“ se bude odehrávat pouze v \mathbb{A}_4 , musíme k tomu předpokládat, že \mathbb{A}_4 je *invariantní podgrupa*⁶, tedy že pro libovolné $s_1 \in \mathbb{S}_2$ zůstane $s_1 a_2 s_1^{-1}$ stále v \mathbb{A}_4 . Tento předpis se zapisuje jako $(a_1, s_1)(a_2, s_2) = (a_1 \alpha_{s_1}^f(a_2), s_1 s_2)$ a máme jím na mysli, že jsme každému prvku ze \mathbb{S}_2 přiřadili pomocí f nějaký automorfismus $\mathbb{A}_4 \rightarrow \mathbb{A}_4$; zde jsme tedy k s_1 přiřadili zobrazení $a_1 \mapsto s_1 a_1 s_1^{-1}$, což je druhá nejjednodušší volba f , která může nastat. K nejjednoduššímu příkladu se vrátíme za chvíli.

Celý tento popis se zapisuje jako *grupové násobení*⁷ $\mathbb{S}_4 = \mathbb{A}_4 \rtimes^f \mathbb{S}_2$ (*polopřímý součin* daný zobrazením $f : \mathbb{S}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{A}_4)$) či $\mathbb{S}_2 = \mathbb{S}_4/\mathbb{A}_4$, čili faktorizace (rozložení) grupy \mathbb{S}_4 na třídy $\mathbb{A}_4 \cdot 1$ a $\mathbb{A}_4 \cdot s$.

Zaměříme se nyní na podgrupy \mathbb{A}_4 a odložme nekomutativitu. Náš plán bude najít všechny malé (a dobře „viditelné“) podgrupy a zkoumat, co vznikne za grupu, když k takovým podgrupám přidáme další prvek. V \mathbb{A}_4 jsou obsaženy *cyklické podgrupy*, tedy ty, které jsou izomorfní se \mathbb{Z}_p (sčítáním modulo prvočíslo p). Jsou tudíž vždy komutativní a typicky se jedná o rotace kolem n -četné⁸ osy symetrie; takové podgrupy najdeme čtyři tříprvkové \mathbb{Z}_3 (rotace o 120° , t_1, t_2, t_3, t_4 , jejich inverzní prvky a identita) a tři dvouprvkové \mathbb{Z}_2 (rotace o 180° , d_1, d_2, d_3). Složením dvou různých rotací o 180° dostaneme rotaci o 180° podle třetí dvoučetné osy:

$$[1, 2, 3, 4] \rightarrow [2, 1, 4, 3] \rightarrow [3, 4, 1, 2], \text{ nebo } d_1 d_2 = d_3$$

čili vidíme, že všechny rotace o 180° tvoří (čtyřprvkovou) podgrupu, která je v [PLA] označena \mathbb{B}_4 ; ta je samozřejmě⁹ izomorfní s kartézským součinem \mathbb{Z}_2 se \mathbb{Z}_2 s operací sčítání po složkách, tzv.

⁶Což je pravda: \mathbb{A}_4 jsou sudé permutace, tedy $z^{-1}az$, $a \in \mathbb{A}_4$ je opět sudá permutace. Používá se také pojem normální podgrupa.

⁷Svislá čárka se píše u grupy, která *není* invariantní. Mnemotechnická pomůcka: vezmete-li prvek z \mathbb{A}_4 , proženete ho grupou \mathbb{S}_2 (pomocí automorfizmu), dostanete opět prvek z \mathbb{A}_4 .

⁸Osa, vzhledem ke které je rotace o $2\pi/n$ symetrií.

⁹V příkladu 2.4 je vysvětleno, proč existují pouze dvě neizomorfní čtyřprvkové grupy. Cyklická a diedrická (definovaná vztahem $a^2 = b^2 = c^2 = 1$).

diedrickou grupou \mathbb{D}_2 , a tedy je i komutativní. V geometrickém modelu \mathbb{B}_4 vidíme komutativitu tak, že složením rotací o 180° kolem dvou os dostaneme rotaci kolem třetí osy, a ta je jen jedna (nezávisle na tom, v jakém pořadí jsme ony dvě rotace složili).

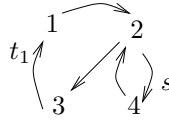
Diedrickou grupu (viz také 2.2) lze opět získat pomocí grupového násobení \mathbb{Z}_2 a \mathbb{Z}_2 . Prvek $d_i \in \mathbb{D}_2$ zapíšeme jako (r_i, s_i) , $r_i, s_i \in \mathbb{Z}_2$ ¹⁰ a násobení nyní můžeme (na rozdíl od $\mathbb{A}_4 \rtimes^f \mathbb{Z}_2$) provést jednodušeji: $(r_1, s_1) * (r_2, s_2) = (r_1 r_2, s_1 s_2)$, a to díky $r_2 s_1 = s_1 r_2$. V terminologii polopřímého součinu to znamená, že f přiřadí každému s_1 identitu (přesněji identický automorfismus), čili $\alpha_{s_1}^f(r_2) = r_2$. Tento případ se nazývá *přímý součin* a značí se $\mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Když složíme dvě rotace okolo dvou trojčetných os, vznikne rotace okolo osy dvoučetné:

$$[1, 2, 3, 4] \rightarrow [3, 1, 2, 4] \rightarrow [3, 4, 1, 2], \text{ nebo } t_1 t_2 = d_1$$

Z toho již plyne, že v \mathbb{A}_4 další podgrupy nenalezneme. Představme si, jak bychom takovou podgrupu budovali: k identitě bychom přidali nějakou z uvedených rotací. U t_1 bychom kvůli úplnosti museli přidat i t_1^{-1} . Pokud bychom přidali ještě například t_2 , museli bychom zahrnout i d_1, d_2, d_3 , a tudíž posléze i t_3, t_4 . Pokud bychom přidali d_1 , získali bychom t_2^{-1} ($t_1 t_2 = d_1 \Rightarrow d_1 t_1 t_2 = 1 \Rightarrow d_1 t_1 = t_2^{-1}$). Podobně můžeme rozebrat i případ, kdy bychom začali s d_1 a přidali t_1 . Můžeme takto rovněž ukázat, že \mathbb{B}_4 je invariantní podgrupa \mathbb{A}_4 , a z toho plyne $\mathbb{A}_4 = \mathbb{B}_4 \rtimes^f \mathbb{Z}_3$.

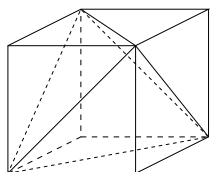
Podgrupy neobsahující zrcadlení jsou tedy $\mathbb{A}_4, \mathbb{D}_2$ a cyklické grupy: tři \mathbb{Z}_2 , a čtyři \mathbb{Z}_3 . Dodejme, že cyklické grupy \mathbb{Z}_p nelze rozložit v součin, pokud je p prvočíslo či mocnina prvočísla (první případ je jasný; ve druhém si uvědomte, že $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \mathbb{D}_2 \neq \mathbb{Z}_4$). V \mathbb{S}_4 je obsaženo několik (dvojec) cyklických podgrup, jejichž cykly se „protínají“, ale neleží na sobě. Prvky takových cyklů s největší pravděpodobností nebudou komutovat (vskutku, například $st_1 \neq t_1 s$ — viz obrázek 2). Pro lepší ilustraci si představte Rubikovu kostku,



Obrázek 2: Cyklické podgrupy v \mathbb{S}_4 , které se „protínají“.

¹⁰Nezapomeneme ale, že $r_i \in \{1, z\}$ a $s_i \in \{1, z'\}$, kde z, z' jsou různá zrcadlení (tj. -1 na prvním místě není totéž, co -1 na druhém místě).

kde d_1 znamená otočení vodorovného prostředního pásu o 90° a t_1 otočení svislého prostředního pásu o 90° (t_1, d_1 by nyní generovaly dvě čtyřprvkové podgrupy). Kde se ocitne políčko z průsečíku obou pásů při $t_1 d_1$ a kde při $d_1 t_1$?



Obrázek 3: Symetrie tetraedru tvoří podgrupu symetrií krychle.

Zcela na závěr poznamenejme, že grupa symetrií čtyřstěnu je podgrupou symetrií krychle \mathbb{L}_6 . Zvolíme-li totiž v krychli stěnové úhlopříčky v protilehlých stěnách (a to ty dvě, které *nejsou* rovnoběžné), vidíme v nich dvě protilehlé hrany čtyřstěnu.

Každé shodné zobrazení, které zachovává tento čtyřstěn zachovává samozřejmě i „opsanou“ krychli. Naopak to ovšem neplatí, rotace o 90° čtyřstěn zřejmě nezachovávají. Lze ukázat, že $\mathbb{L}_6 = \mathbb{S}_4 \rtimes^f \mathbb{S}_2$.

*KV

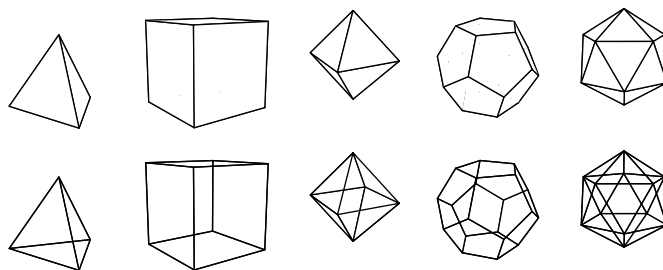
2.2 Jednoduché grupy

Úkol: *Dokažte, že následující množiny jsou grupy a nalezněte počet jejich prvků, který též nazýváme řádem grupy. Určete, které páry grup v seznamu jsou vzájemně izomorfní¹¹ a které grupy jsou komutativní.*

- Množina $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ se sčítáním modulo n . Slovo „modulo n “ znamená, že z výsledku vždy vezmeme jen zbytek po dělení n .
- Množina všech permutací n prvků. Tuto grupu značíme \mathbb{S}_n a nazývá se symetrická grupa.
- Množina \mathbb{A}_n všech sudých permutací n prvků.
- Množina \mathbb{D}_n všech geometrických operací (rotací a zrcadlení), které ponechávají na místě pravidelný n -úhelník pro $n \geq 2$; pravidelným dvojúhelníkem budeme rozumět tenký obdélník.

¹¹Prvky izomorfních grup lze jednoznačně přiřadit nějakým zobrazením ϕ tak, že $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, tudíž dvě izomorfní grupy lze považovat za stejnou grupu, kde jen prvky nazýváme různými jmény; místo značky pro izomorfismus si proto dovolíme užívat rovnítko.

- Množiny \mathbb{L}_4 , \mathbb{L}_6 , \mathbb{L}_8 , \mathbb{L}_{12} a \mathbb{L}_{20} všech izometrií (symetrií) každého z pěti pravidelných Platónových těles (čtyřstěnu, krychle, osmistěnu, dvanáctistěnu a dvacetistěnu).



Obrázek 4: Pravidelná tělesa. Zleva: čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn.

Řešení: Všechny uvedené množiny mají *neutrální prvek*, v aditivní grupě \mathbb{Z}_n je jím prvek 0, u grup permutací je jím identická permutace 1, u geometrických grup geometrická identita 1, ponechávající geometrický objekt na místě. Všechny uvedené množiny mají *inverzní prvek* ke každému svému prvku a jsou *uzavřeny* vzhledem ke grupové operaci: součet $a + b$ modulo n v grupě \mathbb{Z}_n opět náleží množině \mathbb{Z}_n , permutace složená s jinou permutací dá zase permutaci, stejně tak každá množina geometrických operací definovaná tím, že „něco“ zachovává, je uzavřena na násobení, jelikož pokud b i a „něco“ zachovává, potom to zachovává i ab . Jakákoliv kompozice je *asociativní*, součin $(ab)c = a(bc)$ odpovídá jednoduše postupnému provedení operací c, b, a .

Jaké jsou řády grup? \mathbb{Z}_n má zjevně n prvků, \mathbb{S}_n má $n!$ prvků. Grupa \mathbb{A}_n pro $n > 1$ má $n!/2$ prvků; sudých a lichých permutací musí totiž být stejně, protože je lze jednoznačně přiřadit násobením nějakou *transpozicí*¹² (která existuje pro $n > 1$).

Stejně tak grupa \mathbb{D}_n symetrií n -úhelníka¹³ obsahuje $2n$ prvků: n různých rotací plus zrcadlení (osová souměrnost) vůči n různým

¹²Permutace, která se od identity liší jen tím, že prohodí dva prvky.

¹³Tyto symetrie si lze dobře představit takto: očíslováme-li vrcholy 1 až n , pak operaci symetrie odpovídá taková permutace těchto čísel, která zachovává

osám. Tato zrcadlení lze také chápat jako kompozici jednoho zvoleného zrcadlení a jednoho z n možných otočení. Všimněte si, že také grupa \mathbb{D}_2 symetrií obdélníka má $2n = 4$ prvky.

Dále budeme mluvit o *symetriích*, nebo také o *izometriích*, pokud budeme chtít zdůraznit, že operace zachovává vzdálenosti.

Nejsložitější jsou grupy \mathbb{L}_i . Uvažujme nejprve dvanáctistěn, který má 12 pětiúhelníkových stěn. Izometrie musí zobrazit zvolenou stěnu na jednu z 12 stěn a může tento pětiúhelník otočit či zrcadlit celkem $2 \cdot 5 = 10$ způsoby (jako řád \mathbb{D}_5), \mathbb{L}_{12} má tedy 120 prvků. Kupodivu i \mathbb{L}_{20} má obdobně $20 \cdot 2 \cdot 3 = 120$ prvků. Stejnou taktikou zjistíme, že \mathbb{L}_8 má $8 \cdot 2 \cdot 3 = 48$ prvků a \mathbb{L}_6 má také $6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$ prvků. Nakonec \mathbb{L}_4 má $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24 = 4!$ prvků.

Lze se ptát: je náhoda, že \mathbb{L}_{12} i \mathbb{L}_{20} mají 120 prvků? Není to náhoda, tyto grupy jsou ve skutečnosti izomorfní, jelikož každý vrchol dvanáctistěnu lze ztotožnit se stěnou dvacetistěnu (a naopak). Totéž platí pro krychli a osmistěn. Zmíněné dvojice těles jsou *duální*, jak se lze dočíst v [PLA] v kapitole Dualita (15.2). Úplný seznam izomorfních grup v našem případě je

$$\mathbb{A}_3 = \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{L}_{20} = \mathbb{L}_{12}, \quad \mathbb{L}_8 = \mathbb{L}_6, \quad \mathbb{D}_3 = \mathbb{S}_3, \quad \mathbb{L}_4 = \mathbb{S}_4.$$

První rovnost ukazuje, že sudá permutace 3 prvků je identita nebo cyklus, poslední dvě platí proto, že libovolná permutace 3 resp. 4 vrcholů rovnostranného trojúhelníka resp. čtyřstěnu je izometrií (všimněte si, že obě grupy mají 6 resp. 24 prvků). Také lze najít rovnost $\mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (srov. s příkladem 2.1), jelikož symetrie obdélníka lze vnímat jako dvě nezávislé a komutující grupy \mathbb{Z}_2 , které ho převracejí podle svislé nebo vodorovné osy. Co se týče komutativity, z daného výčtu grup jsou komutativní

$$\mathbb{Z}_n, \quad \mathbb{S}_1 = \mathbb{Z}_1 = \mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_2, \quad \mathbb{S}_2 = \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{A}_3 = \mathbb{Z}_3$$

jak lehce ověříte, ostatní grupy $\mathbb{S}_n, \mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n$ pro $n > 2$ a \mathbb{L}_i jsou nekomutativní. *LM

vlastnost „sousedit s“. Tedy v praxi lze pouze „protočit“ cyklus o 1 až n poloh či obrátit směr obíhání.

2.3 Grupy a teorie čísel

Úkol:

a) Dokažte, že pro každou konečnou grupu \mathbb{G} je její řád $|\mathbb{G}|$ dělitelný řádem libovolné její podgrupy \mathbb{P} (Lagrangeova věta).

b) Použijte předchozího výsledku k důkazu malé Fermatovy věty: je-li p prvočíslo a $n \in \mathbb{N}$, potom n^p a n dávají stejný zbytek při dělení p , neboli

$$n^p \equiv n \pmod{p}.$$

c) Pro dané $n \in \mathbb{N}$ označme $\varphi(n)$ počet přirozených čísel menších než n a nesoudělných s n (včetně jedničky, tzv. Eulerova funkce). Dokažte, že když $(k, n) = 1$ (kulatá závorka znamená zde největšího společného dělitele), potom

$$k^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Řešení: Na úvod připomeňme dvě známé skutečnosti. Množina $M_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ s operací násobení modulo p tvoří pro prvočíselné p grupu: inverzní prvek k n musí existovat, neboť čísla $0, n, 2n, \dots, (p-1)n$ dávají různé zbytky po dělení p (pokud $jn \equiv j'n \pmod{p}$, pak p dělí $(j-j')n$, což nelze pro $|j-j'| < p$). Jelikož je jich $p-1$, musí mezi těmito zbytky být i jednička. Toto je v kostce obsah příkladu 3.1.

Druhá skutečnost je, že pro p neprvočíselné tvoří multiplikativní grupu čísla z M_p , která jsou nesoudělná s p . Důkaz se provede podobně.

a) \mathbb{P} budiž podgrupa $\mathbb{G} = \{g_1, \dots, g_n\}$. Pro libovolné $g \in \mathbb{G}$ definujeme *levou třídu* $g\mathbb{P} := \{gp \mid p \in \mathbb{P}\}$. Dokažte si, že relace \diamond na $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$, definovaná $g_1 \diamond g_2 \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{P}, g_1 = g_2p$, je ekvivalence (viz úlohu 2.6). Je-li $g \in \mathbb{G}$ pevný prvek, pak $g\mathbb{P}$ je množina všech prvků \mathbb{G} ekvivalentních (podle \diamond) s g . Všechny třídy $g\mathbb{P}$ tvoří rozklad množiny \mathbb{G} , tzn. každé dvě takovéto třídy jsou buď totožné, nebo disjunktní a sjednocení $g_1\mathbb{P} \cup \dots \cup g_n\mathbb{P} = \mathbb{G}$. Zřejmě ale všechny třídy mají stejný počet prvků jako \mathbb{P} (při důkazu předpokládejte, že dva prvky $g\mathbb{P}$ jsou stejné), odkud už plyne dokazované tvrzení.

b) Uvažujme multiplikativní grupu $\mathbb{G} = \{1, 2, \dots, p-1\}$ s násobením modulo p . Každý její prvek n prostřednictvím násobení se sebou samým generuje *cyklickou podgrupu* $\{1, n, n^2, \dots, n^{r-1}\}$, jejíž řád r je nejmenší přirozené číslo takové, že $n^r \equiv 1 \pmod{p}$. Dle bodu a) ale r dělí řád \mathbb{G} , tj. $p-1$. Platí tedy také

$$n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

a po přenásobení celé kongruence n

$$n^p \equiv n \pmod{p},$$

což bylo dokázat. Předchozí úvaha samozřejmě platí jen pro n , které není dělitelné p . V opačném případě je ale tvrzení triviální.

Skutečnost, že p je prvočíslo, je potřeba k tomu, aby \mathbb{G} byla grupa, pro p neprvočíselné nenajdeme vždy inverzní prvek. Právě pro prvočíselné p je $\mathbb{G} \cup \{0\}$ také *těleso* (s operacemi násobení a sčítání) — viz příklad 3.1. Závěrem dodejme, že obrácená implikace k malé Fermatově větě neplatí.

c) Vzpomeňme si na *okruh* $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ se sčítáním a násobením modulo n . Tento okruh obecně *není tělesem*, neboť pro ty prvky $k \in \mathbb{Z}_n$, pro které $(k, n) > 1$, neexistuje inverzní multiplikativní prvek. Uvažujme nyní množinu $\mathbb{P} = \{k \in \mathbb{Z}_n, (k, n) = 1\}$, která tvoří s násobením modulo n grupu, jejíž řád je právě $\varphi(n)$. Stejně jako v b) pak pro $k \in \mathbb{P}$ využijeme jím generované cyklické podgrupy grupy \mathbb{P} k tomu, abychom dokázali

$$k^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

*TB

2.4 Nevelké grupy

Úkol: Nalezněte všechny grupy s nejvýše 7 prvky.

Řešení: Jednoprvková grupa je jediná, triviální. V dvojprvkové grupě máme kromě neutrálního prvku 1 (jehož součiny s libovolnými prvky jsou dány definicí grupy $1k = k = k1$) další prvek, který značme (-1) , a $(-1)(-1)$ se nemůže rovnat (-1) , jelikož „krácením“

zprava (které je v grupě povoleno díky existenci inverzního prvku) bychom dokázali $(-1) = 1$. Existuje tedy jen jedna dvojprvková grupa, \mathbb{Z}_2 , kterou si lze představit (reprezentovat) jako čísla $\{\pm 1\}$ s násobením, nebo třeba souměrnost podle jedné přímky či roviny.

Trojprvková grupa obsahuje neutrální prvek, který značme pro změnu 0, a další dva prvky 1, 2. Značme operaci „+“. Analogicky jako výše, $1 + 2$ se nesmí rovnat ani 1, ani 2 (krácení zprava či zleva), tudíž $1 + 2 = 0$. Podobně $1 + 1$ už nemůže být ani 0 (což by implikovalo $1 = 2$), ani 1 (což by implikovalo $0 = 1$), čímž docházíme k překvapivému závěru $1 + 1 = 2$. Podobně lze ukázat $2 + 2 = 1$ a $2 + 1 = 0$ a máme tedy grupu \mathbb{Z}_3 jako jedinou tříprvkovou grupu.

Dále se nám bude hodit, že je-li \mathbb{H} podgrupou \mathbb{G} , pak řád \mathbb{H} dělí řád \mathbb{G} . Důkaz naleznete v příkladu 2.3.

Čtyřprvková grupa obsahuje prvky $1, a, b, c$. Nyní může být a^2 rovno buď 1, nebo jednomu z prvků b, c , řekněme b (volba c odpovídá jen přejmenování b, c). Pokud je $a^2 = b$, potom $a^4 = b^2 = 1$, protože řád každého prvku musí být dělitelem řádu grupy (různé mocniny a tvoří podgrupu $\{1, a, a^2, \dots, a^{r-1}\}$ a mohou prostřídát nejvýše tolik hodnot, kolik má grupa prvků). Každopádně nalezneme nějaký prvek řádu 2, buď a , nebo b . Zbylé dva pak mají řád buď také roven 2 a dostaneme grupu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, nebo mají řád 4 a získáme \mathbb{Z}_4 , která *není* izomorfní $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Grupu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ si lze jednoduše představit jako $\{(x_1, x_2), x_1, x_2 \in \{0, 1\}\}$ se sčítáním modulo dva po složkách. Grupa \mathbb{Z}_4 je naproti tomu čtyřprvková cyklická grupa, tedy například $\{\pm 1, \pm i\}$ s násobením.

Podobně pětprvková grupa musí být izomorfní \mathbb{Z}_5 (a sedmiprvková \mathbb{Z}_7). Všimněte si, že všechny grupy s nejvýše pěti prvky jsou Abelovy, neboli *komutativní grupy*. Nejmenší nekomutativní grupou je šestiprvková \mathbb{S}_3 . Další šestiprvková grupa $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ je opět komutativní. Klasifikovat grupy s několika prvky nebo Abelovy grupy je snadné, na klasifikaci všech konečných grup musely pracovat generace algebraiků a nedávno dokončené výsledné dílo má řádově tisíce stran. *LM

2.5 Grupa generovaná Pauliho maticemi

Úkol: Zkonstruuje multiplikativní grupu \mathbb{P} , která je generována prvky $i\sigma^x, i\sigma^y, i\sigma^z$, kde $i^2 = -1$ a[‡]

$$(\sigma^x)^2 = (\sigma^y)^2 = (\sigma^z)^2 = 1, \quad \sigma^x\sigma^y = i\sigma^z = -\sigma^y\sigma^x. \quad (7)$$

Grupa generovaná danými prvky je nejmenší grupa, která je obsahuje, tj. množina součinů libovolného počtu těchto prvků (a prvků k nim inverzních) v libovolném pořadí. Nalezněte řád této grupy, třídy konjugovaných prvků a jejich řády. Srovnajte s grupou \mathbb{D}_4 symetrií čtverce a ukažte, že nejsou izomorfní navzdory stejnému řádu grupy.

Rada: zkuste chápat $i\sigma^{x,y,z}$ jako abstraktní algebraické objekty, o kterých víme pouze to, že splňují vztahy 7. Přemýšlejte, jak by se daly realizovat třeba jako matice.

Řešení: Uvedená grupa generovaná $i\sigma^x, i\sigma^y, i\sigma^z$ obsahuje osm prvků:

$$\mathbb{P} = \{\pm 1, \pm i\sigma^x, \pm i\sigma^y, \pm i\sigma^z\}. \quad (8)$$

Kromě identického prvku a generátorů musíme do grupy zahrnout i $(i\sigma^x)^2 = -1$, jakož i inverzní prvky ke generátorům $(i\sigma^j)^{-1} = -i\sigma^j$, kde $j = x, y, z$. Postupným pronásobováním ověříte, že (8) je uzavřena na násobení, například $i\sigma^x \cdot i\sigma^y = -i\sigma^z$. Řád grupy je tedy osm.

Co se týče tříd konjugovaných prvků, neutrální prvek 1 má vždycky svoji vlastní třídu, jak jsme řekli; řád prvku 1 je samozřejmě 1. Stejně tak prvek -1 má svoji třídu, protože i ten komutuje se všemi prvky grupy; jeho řád je 2, neboť $(-1)^2 = 1$. Lze ověřit, že pro všechna $g, h \in \mathbb{P}$ je $ghg^{-1} = \pm h$, tudíž $i\sigma^x$ a $i\sigma^y$ nemohou být konjugované. Naopak $i\sigma^x \sim -i\sigma^x$ (a podobně pro y, z), jelikož například

$$(i\sigma^y)(i\sigma^x)(i\sigma^y)^{-1} = (i\sigma^y)(i\sigma^z) = -i\sigma^x. \quad (9)$$

[‡]V posledním vztahu lze také cyklicky zaměňovat indexy, aniž by to mělo vliv na jeho platnost. Celkově jej lze zapsat $\sigma^k\sigma^j = i\varepsilon_{kjl}\sigma^l$, kde za k, j, l dosazujeme x, y, z a sčítáme přes index l v duchu Einsteinovy sumační konvence. Symbol ε^{kjl} je roven nule s výjimkou případů $\varepsilon^{xyz} = \varepsilon^{zyx} = 1$, $\varepsilon^{yxz} = \varepsilon^{zxy} = \varepsilon^{xzy} = -1$.

Tudíž máme pět různých tříd:

$$\{\{1\}, \{-1\}, \{i\sigma^x, -i\sigma^x\}, \{i\sigma^y, -i\sigma^y\}, \{i\sigma^z, -i\sigma^z\}\} \quad (10)$$

Řád každého z šesti prvků ($\pm i\sigma^j$) je roven čtyřem, zatímco v grupě \mathbb{D}_4 máme jen dva prvky řádu 4 (rotace o $\pm 90^\circ$), tudíž tyto grupy nemohou být izomorfní. Shodný řád je nutnou, nikoliv postačující, podmínkou pro izomorfnost.

Pro zajímavost uveďme, že grupu \mathbb{P} lze *reprezentovat* pomocí Pauliho matic 2×2 , které najdete jako vzorec 29 v příkladu 6.1. Tato reprezentace je ireducibilní. *LM

2.6 Konjugované prvky

Úkol: Říkejme, že dva prvky $B, C \in \mathbb{G}$ jsou konjugované, pokud existuje $A \in \mathbb{G}$ takové, že $B = ACA^{-1}$. Dokažte, že relace „býti konjugovaný“, kterou budeme značit $B \sim C$, je reflexivní ($\forall A \in \mathbb{G}$ platí $A \sim A$), symetrická ($A \sim B$ právě tehdy, pokud $B \sim A$) a tranzitivní (pokud $A \sim B$ a $B \sim C$, pak také $A \sim C$); tyto tři vlastnosti shrneme do pojmu ekvivalence. Definujme řád prvku $A \in \mathbb{G}$ jako nejmenší kladné celé číslo n takové, že $A^n = 1$, kde 1 značí neutrální prvek. Ukažte, že konjugované prvky mají stejný řád.

Řešení: Zmíněná relace je reflexivní proto, že $A = KAK^{-1}$ určitě platí pro $K = 1$. Symetrická je proto, že když $A \sim B$ tj. $A = KBK^{-1}$, tak také $B = K^{-1}AK = LAL^{-1}$ pro $L = K^{-1}$, tj. $B \sim A$. Relativně nejsložitější je tranzitivita. Pokud $A \sim B$ a $B \sim C$, tedy pokud $A = KBK^{-1}$ a $B = LCL^{-1}$, potom $A = K(LCL^{-1})K^{-1} = MCM^{-1}$ pro $M = KL$.

Každou relaci, která splňuje tato kritéria, nazýváme *ekvivalencí* a prvky grupy \mathbb{G} lze rozdělit na *třídy ekvivalence*, což jsou množiny M_i takové, že pro $A \in M_i$ a $B \in M_j$ platí $A \sim B$ právě když $i = j$.

Pokud máme $A \sim B$ tj. $A = KBK^{-1}$, potom $A^n \sim B^n$, neboť

$$A^n = KBK^{-1} \cdot KBK^{-1} \dots KBK^{-1} = KB^nK^{-1},$$

jelikož činitele $K^{-1}K$ uvnitř se zkrátí. A má řád n , pokud n je nejmenší kladné celé číslo, že $A^n \sim 1$. Ale neutrální prvek je konjugovaný jedině sobě, poněvadž $K1K^{-1} = KK^{-1} = 1$ pro každé K . Tudíž $A^n \sim B^n$ je konjugované k 1 právě tehdy, když $B^n = 1$; jinými slovy A a B mají stejný řád. *LM

2.7 Rozklady grup, přímé a polopřímé součiny

Úkol:

1. Uvažujme polopřímý součin dvou grup \mathbb{N}, \mathbb{H} daný zobrazením (morfismem) $f : \mathbb{H} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{N})$, $\mathbb{G} = \mathbb{N} \rtimes^f \mathbb{H}$. Ukažte, že \mathbb{N} je invariantní podgrupa \mathbb{G} .
2. Pro přímý součin $\mathbb{G} = \mathbb{N} \times \mathbb{H}$ ukažte, že \mathbb{N} i \mathbb{H} jsou invariantní podgrupy \mathbb{G} .
3. Necht' \mathbb{N}, \mathbb{H} jsou disjunktní¹⁴ invariantní podgrupy \mathbb{G} . Dokažte, že prvky \mathbb{N} a \mathbb{H} mezi sebou komutují (ačkoliv ani \mathbb{N} ani \mathbb{H} nemusí být komutativní).

Řešení:

1. Polopřímý součin¹⁵ dvou grup \mathbb{N}, \mathbb{H} je grupa $\mathbb{G} = \{(n, h) \mid n \in \mathbb{N}, h \in \mathbb{H}\}$ s operací definovanou $(n_1, h_1) * (n_2, h_2) = (n_1 \alpha_{h_1}^f(n_2), h_1 h_2)$. Potom je $\tilde{\mathbb{N}} = \{(n, 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ podgrupou \mathbb{G} , která je izomorfní s \mathbb{N} :

$$n_1 n_2 = n \Rightarrow (n_1, 1) * (n_2, 1) = (n_1 \alpha_1(n_2), 1) = (n_1 n_2, 1).$$

Využili jsme toho, že f je morfismus, tedy α_1 přiřadí jednotkovému prvku \mathbb{H} jednotkový prvek $\text{Aut}(\mathbb{N})$, čili identické zobrazení. Tím jsme ospravedlnili nonšalantní tvrzení¹⁶, že \mathbb{N} je podgrupou \mathbb{G} .

Invariantnost dokážeme přímočaře. Zvolíme-li $y = (a, b) \in \mathbb{G}$, pak můžeme z rovnice $y^{-1}y = 1$ vypočítat $y^{-1} = (\alpha_{b^{-1}}^f(a^{-1}), b^{-1})$. Dále pak musí platit

$$\begin{aligned} y^{-1}xy &= \\ &= (\alpha_{b^{-1}}^f(a^{-1}), b^{-1}) * (x, 1) * (a, b) = (\alpha_{b^{-1}}^f(a^{-1})\alpha_{b^{-1}}^f(x), b^{-1}) * \\ &* (a, b) = (\alpha_{b^{-1}}^f(a^{-1})\alpha_{b^{-1}}^f(x)\alpha_{b^{-1}}^f(a), 1) = (\alpha_{b^{-1}}^f(a^{-1}xa), 1) \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

¹⁴Až na společný jednotkový prvek.

¹⁵Viz také příklad 2.1.

¹⁶Nonšalantní je ale už i tvrzení, že \mathbb{G} je grupa. Při důkazu asociativity budeme potřebovat $\alpha_a^f \alpha_b^f = \alpha_{ab}^f$ (f je morfismus). Neutrální prvek je $(1, 1)$, inverzní prvek najdeme dále.

Pokud bychom vzali $z = (1, z) \in \mathbb{H}$ a počítali $y^{-1}zy$, zjistili bychom

$$y^{-1}zy = (\alpha_{b^{-1}}^f(a^{-1})\alpha_{b^{-1}x}^f(a), b^{-1}xb) \notin \mathbb{H} \text{ obecně.}$$

\mathbb{H} tedy nemusí být obecně invariantní podgrupa.

2. Příímý součin je speciální případ polopříímého součinu, kdy $f : x \mapsto \text{Id}_{\mathbb{N}}, \forall x \in \mathbb{H}$. To lze říct i tak, že je to opět kartézský součin množin \mathbb{N} a \mathbb{H} s operací $(n_1, h_1) * (n_2, h_2) = (n_1n_2, h_1h_2)$. Můžeme se proto odvolat na předchozí výpočty, z čehož plyne, že tentokrát je i \mathbb{H} normální podgrupa, jelikož $\alpha_{b^{-1}}^f(a^{-1})\alpha_{b^{-1}x}^f(a) = \text{Id}_{\mathbb{N}}(a^{-1})\text{Id}_{\mathbb{N}}(a) = 1$.

Důkaz se ale také jednoduše provede přímo. Například

$$y^{-1}zy = (a^{-1}, b^{-1}) * (1, z) * (a, b) = (a^{-1}a, b^{-1}zb) = (1, b^{-1}zb) \in \mathbb{H}.$$

3. Vezmeme dva libovolné prvky $n \in \mathbb{N}$ a $h \in \mathbb{H}$. Díky invarianci \mathbb{N} a \mathbb{H} v \mathbb{G} musí platit $h^{-1}nh = n_1 \in \mathbb{N}$ a $n^{-1}hn = h_1 \in \mathbb{H}$. Z první rovnice vyjádříme například $n^{-1}h = hn_1^{-1}$ a dosadíme do druhé rovnice:

$$hn_1^{-1}n = h_1 \Rightarrow n_1^{-1}n = h^{-1}h_1.$$

Na levé straně poslední rovnice je prvek z \mathbb{N} , na pravé straně prvek z \mathbb{H} . Jelikož jsou tyto množiny disjunktní až na jednotkový prvek, musí být $n_1^{-1}n = 1$ a $h^{-1}h_1 = 1$. Není tedy rozdílu mezi n a n_1 a první vztah $h^{-1}nh = n$ dokazuje nyní komutativitu $hn = nh$.

Poučení z tohoto příkladu je následující. Chceme-li grupu \mathbb{G} zapsat jako součin dvou svých podgrup \mathbb{N} a \mathbb{H} , musí být předně $\mathbb{G} = \mathbb{N}\mathbb{H}$ (ve smyslu, že každý prvek $g \in \mathbb{G}$ lze jednoznačně rozložit na $g = nh$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $h \in \mathbb{H}$). Abychom mohli rozložit i grupovou operaci na \mathbb{G} , musí být alespoň jedna z podgrup invariantní. Pokud jsou invariantní obě dvě, lze zapsat \mathbb{G} jako jejich příímý součin, jinak musíme použít polopříímý součin.

Vzhledem k tomu, že \mathbb{N} je invariantní, lze provést rozklad \mathbb{G}/\mathbb{N} a tento musí být izomorfní s \mathbb{H} (to je právě rozklad $g = nh$). Z toho plyne, že \mathbb{N} a \mathbb{H} jsou disjunktní až na jednotkový prvek a musí platit $|\mathbb{N}||\mathbb{H}| = |\mathbb{G}|$.

Postup při rozkladu \mathbb{G} tedy je najít dvě „disjunktní“ podgrupy, součin jejichž řádů je roven řádu \mathbb{G} , ověřit, zda platí¹⁷ $\mathbb{G} = \mathbb{N.H}$, a zjistit, zda jsou obě invariantní. Pokud je jenom jedna (viz příklad 2.1), lze použít polopřímý součin s $f : h \mapsto \alpha_h^f(n) = h^{-1}nh$, pokud žádná, musíme najít jiné podgrupy. Skutečnost, že podgrupy spolu navzájem nekomutují, nás varuje, že tyto grupy nemohou být obě invariantní. *KV

2.8 Znaménko permutace

Úkol: Je zadána permutace

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Určete znaménko π různými způsoby: z počtu inverzí, transpozic a cyklů sudých délek.

b) Proveďte totéž pro π^2 .

Řešení:

a) Inverze je každá dvojice (i, j) , $i < j$, pro kterou je $\pi(i) > \pi(j)$. Pro naši permutaci jsou to $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, tedy lichý, a permutace je proto lichá.

Transpozice (i, j) je permutace σ , pro kterou $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ a $\sigma(k) = k$ pro $k \neq i, j$. Jinými slovy permutace, která vymění prvky i, j a ostatní nechá na místě. Každou permutaci lze získat složením konečně mnoha transpozic (viz body 2 a 3 v příkladu 2.9). Pro naši permutaci π to lze provést například následovně: $(2413) \rightarrow (2143) \rightarrow (1243) \rightarrow (1234)$. Počet transpozic je opět lichý a π je i podle této definice lichá.

Konečně π obsahuje jediný *cyklus* $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ a ten má sudou délku. Celkový počet cyklů sudé délky je tedy lichý a permutace je lichá. Tato metoda je pro většinu permutací zdaleka nejrychlejší.

b) Jak obecně vypadá π složená s ϱ ? Prvek i se zobrazí na $\pi(\varrho(i))$. Všimněte si, že tudíž nemusí platit $\pi \circ \varrho = \varrho \circ \pi$.

¹⁷To není formalita: srovnejte $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$ a \mathbb{Z}_{100} . V první grupě mají všechny prvky řád menší nebo roven 10 (tj. $g^{10} = 1, \forall g \in \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$).

V našem případě je $\pi^2(1) = \pi(2) = 4$, $\pi^2(2) = \pi(4) = 3$, $\pi^2(3) = \pi(1) = 2$, $\pi^2(4) = \pi(3) = 1$, tedy

$$\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

V této permutaci jsou v inverzi každé dva prvky. Takových dvojic je celkem šest, a permutace je tedy sudá.

Permutaci π^2 lze také zapsat dva cykly délky dva: $2 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4$. To jsou zároveň dvě transpozice.

Znaménko permutace definuje pěkný *morfismus* ze *symetrické grupy* S_n (permutace n -prvkové množiny) do C_2 ($\{1, -1\}$ s operací násobení). Obecně je morfismus grupy G_1 do grupy G_2 zobrazení $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$, které zachovává grupovou operaci, tedy $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ pro $\forall a, b \in G_1$.

Pokud je grupa G_2 tvořena lineárními zobrazeními na vektorovém prostoru dimenze n , pak hovoříme o n -rozměrné *reprezentaci* grupy G_1 . V našem případě je $n = 1$.

Více o reprezentacích (symetrických grup) naleznete v příkladu 10.4. *KV

2.9 Permutace devětkrát jinak

Úkol:

1. Kolik nejvíc inverzí může být v permutaci množiny o n prvcích?
2. Stačí $n - 1$ transpozic na vytvoření libovolné permutace na n prvcích?
3. Jaký je horní odhad složitosti bublinkového třídění?
4. Známe počet inverzí v permutaci a_1, a_2, \dots, a_n . Kolik je inverzí v permutaci a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 ?
5. Kolik je inverzí ve všech permutacích na n prvcích dohromady?
6. Kolik nejméně transpozic sousedních prvků je třeba k převedení permutace o k inverzích na tvar $1, 2, \dots, n$?

7. Označme $[n, k]$ počet permutací na n prvcích, které obsahují právě k inverzí. Odvoďte rekurentní relaci

$$[n + 1, k] = [n, k] + [n, k - 1] + [n, k - 2] + \dots + [n, k - n],$$

přičemž dodefinujeme $[n, j] = 0$ pro j mimo rozmezí 0 až $\frac{1}{2}n(n - 1)$.

8. Mějme permutaci

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 8 & 11 & 9 & 13 & 2 & 6 & 12 & 5 & 10 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Spočtěte A^{111} . Pro jaké mocniny je A^n identická permutace? Určete znak A a A^{111} .

9. Za jakých podmínek existuje druhá odmocnina z permutace? Kolik jich existuje?

Řešení:

1. Protože inverze je taková dvojice $i < j$, pro niž je $p(i) > p(j)$, bude nejvíc inverzí zřejmě v permutaci $n, n - 1, \dots, 2, 1$. Tam jsou v inverzi každé dva prvky, proto celkový počet inverzí je $\frac{1}{2}n(n - 1)$.

2. Stačí. Víme, že každou permutaci lze složit z jednoho či více cyklů. Cyklus na k prvcích se dostane složením $k - 1$ transpozic $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{k-1}, a_k)$. Permutace, skládající se z jediného cyklu, spotřebuje $n - 1$ transpozic, za každý další cyklus se odpočítá jednička. Je zřejmé, že méně transpozic obecně nestačí.

3. Bublínkové třídění spočívá v prohazování sousedních prvků, jinými slovy se tedy ptáme na maximální počet transpozic *sousedních* prvků, které jsou potřeba k sestavení libovolné permutace. Během prvního průchodu algoritmu se dostane určitě n na poslední místo, protože je větší než všechno a prohazujeme jej tudíž vždycky. Potřebujeme k tomu $n - 1$ porovnávání. Při druhém průchodu algoritmu tedy stačí jen $n - 2$ porovnávání, ve třetím $n - 3$, atd. celkem $\frac{1}{2}n(n - 1)$ porovnávání. Nejhorší, co se může stát, je, že po každém porovnávání musíme také prohazovat, to nastane v případě permutace $n, n - 1, \dots, 2, 1$. Tedy horní odhad časové složitosti algoritmu

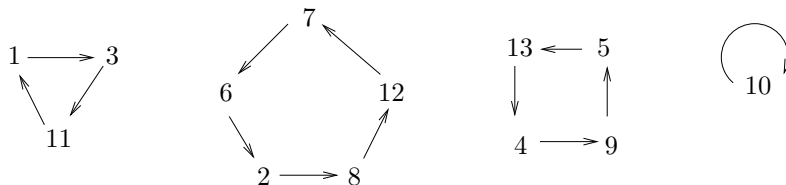
je $\frac{1}{2}Kn(n-1)$, kde K je čas potřebný na porovnání a prohození dvou prvků.

4. Při přechodu k druhé permutaci se obrací pořadí všech prvků, tedy jestliže nejprve jsme měli k inverzí, po obrácení jich bude $\frac{1}{2}n(n-1) - k$.

5. Sestavíme všech $n!$ permutací do dvojic, v nichž permutaci a_1, a_2, \dots, a_n je přiřazena obrácená permutace a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 . V každé dvojici je $\frac{1}{2}n(n-1)$ inverzí (viz předchozí otázku), tedy celkový počet inverzí ve všech dvojicích je $\frac{1}{2}n! \cdot \frac{1}{2}n(n-1)$

6. Také k . Stačí si uvědomit, že každý krok bublinkového třídění likviduje právě jednu inverzi a že bublinkové třídění je, co se počtu transpozic sousedů týče, nejúspornější možné.

7. Jakými způsoby lze realizovat $(n+1)$ -prvkovou permutaci s k inverzemi? První člen na pravé straně dokazované relace odpovídá umístění prvku $n+1$ na konec libovolné n -prvkové permutace o k inverzích (v této poloze není $n+1$ v inverzi s ničím) a k inverzím na zbylých prvcích. Druhý člen klade $n+1$ na předposlední místo, čímž generuje jednu inverzi a na zbylých n prvků zbývá $k-1$ inverzí, atd. Poslední člen odpovídá situaci, kdy je $n+1$ obrazem jedničky a je tak v inverzi se všemi zbylými n prvky.



Obrázek 5: Rozklad permutace A (viz 11) na cykly délek 3,5,4,1.

8. Rozložíme permutaci na cykly $(1, 3, 11)$; $(2, 8, 12, 7, 6)$; (10) ; $(4, 9, 5, 13)$, viz obrázek 5. Jelikož tato permutace obsahuje jeden cyklus sudé délky, je to lichá permutace. Ostatní metody určování znaménka (počítání transpozic či inverzí) by zde byly pracnější.

Mocnění permutace pouze točí s cykly, nanejvýš je může roztrhnout, pokud je počet prvků v cyklu soudělný s exponentem. V opačném případě zbytek po dělení počtu prvků v cyklu exponentem udává, o kolik se tento cyklus pootočí. V našem konkrétním případě je to 0, 1, 3, 0, výsledná permutace je kompozicí cyklů (1); (3); (11); (2, 8, 12, 7, 6); (4, 13, 5, 9); (10). Znaménko této permutace je opět minus, což jsme ostatně již věděli díky zn $A^n = (\text{zn } A)^n$ (viz příklad 2.8).

Zjevně identitu dostaneme pro libovolný společný násobek délek cyklů, tedy $n = 60k$, kde k je libovolné přirozené. Upozorňujeme, že $A^n = \text{Id}$ je něco jiného než $A^n = A$. Druhá rovnice je splněna pro $n = 60k + 1$.

9. Každý cyklus délky $2n$ se po umocnění na druhou rozpadne na dva cykly délky¹⁸ n . Cykly délky $2n - 1$ se mocněním převádějí opět na cykly délky $2n - 1$. Tedy pokud máme v zadané permutaci nějaký cyklus sudé délky, musel nutně vzniknout umocněním cyklu dvojnásobné délky. Tudíž takové permutace, které obsahují pro některé sudé k lichý počet cyklů délky k , druhou odmocninu nemají. K ostatním permutacím odmocninu najdeme vždycky, jednoznačně pouze za předpokladu, že pro lichá k máme nejvýše jeden cyklus délky k a pro sudá k žádný¹⁹, protože každé slévání cyklů delších než jedna lze provést více způsoby.

Pro permutaci rozloženou na N disjunktních lichých cyklů délky n lze celkový počet odmocnin nalézt následující úvahou: počet permutací na N prvcích je $N!$. Za pozice $0, 2, 4, \dots, N'$, kde N' je nejvyšší sudé číslo menší nebo rovno N , lze vsunout zarážku, která odděluje cykly, které budeme slévat do dvojic, od cyklů, které neslejeme. Slévat budeme vždy cykly, které se ocitnou na místech (1,2),(3,4) atd.; z nich můžeme slít celkem $k = 0, 1, \dots, \frac{1}{2}N'$ dvojic a zbylých $N - 2k$ dvojic cyklů neslít. Pro každé k zvláště pak musíme $N!$ vydělit permutacemi slévaných dvojic, kterých je $k!$, kde $2k$ je pozice zarážky. Dále musíme vydělit $(N - 2k)!$, což odpovídá

¹⁸Jeden obsahuje členy na sudých místech v původním cyklu, druhý členy na lichých místech.

¹⁹V rozporu s učebnicí Pěstujeme lineární algebru [PLA] zde pod pojmem délky cyklu rozumíme počet prvků cyklu se účastnících, viz obrázek 5. Pokud bychom se drželi tam uvedené definice, vedlo by to k matoucímu prohození významů slov „lichý“ a „sudý“.

permutacím na neslévaných cyklech (za zarážkou), a pak ještě 2^k , protože v každé dvojici lze vyměnit její členy mezi sebou. Nakonec musíme ještě vynásobit počtem způsobů, kolika lze slít dva cykly.

Umocnit dlouhý cyklus na druhou vlastně znamená oddělit členy na lichých pozicích od členů na sudých. Slévání tedy můžeme chápat jako vložení jednoho cyklu do mezer mezi členy druhého cyklu tak, že v každé mezeře sídlí právě jedno číslo a zachovává se pořadí. Takových vložení je zjevně tolik, kolik je délka sléváných cyklů. Celkový výraz pro počet odmocnin permutace, která obsahuje N cyklů liché délky n , je tedy

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \binom{n}{2}^k \frac{N!}{k!(N-2k)!},$$

$\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ označuje celou část čísla $\frac{N}{2}$ (tedy $\frac{N'}{2}$). Pro případ sudých cyklů nemáme na výběr, zda slévat, či neslévat, což situaci výrazně zjednoduší. Odvoláme-li se na představu použitou u lichých cyklů, smíme tentokrát dát zarážku pouze na konec a vzorec pro počet odmocnin je

$$\left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{(2k)!}{k!}, \text{ kde } k = \frac{N}{2}.$$

Počet odmocnin obecné permutace, v jejímž rozkladu jsou cykly různých délek, se dostane prostým součinem. Čtenář si může rozmyslet, jak by se řešila s -tá odmocnina — v prvočíselném případě se bude výsledek podobat vzorcům pro $s = 2$, neboť bude docházet pouze ke slévání s cyklů dohromady, pro s složené se bude moci slévat i r cyklů, kde r je nějaký dělitel s . Způsobů slévání bude $(r-1)n^{r-1}$, protože $r-1$ cyklů lze do mezer ukládat v libovolném pořadí a každý lze n způsoby pootčit. *DŠ

2.10 Lloydova patnáctka a permutace

Úkol: *Lloydova²⁰ patnáctka je hra s 4×4 hracími poli s ploškami (figurami) očíslovanými 1 až 15, přičemž číslo 16 je vyjmuto, viz (13). Úkolem je přesouvat hrací figury a docílit standardního pořadí, kdy po řádkách zleva vpravo čteme čísla 1 až 15. Pozice patnáctky tedy*

²⁰Sam Lloyd byl americký „král křížovek“.

odpovídá permutaci $i \mapsto p(i)$, kde $i = 1, 2, \dots, 16$ a $p(i)$ je číslo na pozici, kde má být správně i .

- a) Zjistěte, jak se chová znak příslušné permutace při vykonání tahu a jak se mění pozice prázdného pole 16, a vytvořte veličinu, která se zachovává při každém tahu. Dokažte takto, že nelze složit patnáctku, pokud jsou jen dvě figury (např. 14 a 15) prohozené. Obecněji dokažete, že nelze složit konfiguraci s prázdným polem vpravo dole, ovšem figurami 1 až 15 permutovanými lichou permutací.
- b) Nalezněte vhodné základní tahy, které generují cyklickou permutaci polí. Užijte výsledku k důkazu, že libovolnou sudou permutaci s prázdným polem vpravo dole naopak složit lze. Máte velkou volnost, jak k problému přistoupit, naše řešení je jednou z mnoha možností.

Řešení:

a) V jazyce permutací $i \mapsto p(i)$ pro $i = 1, \dots, 16$ není tah nic jiného než transpozice nějakého čísla s číslem 16 (prázdným polem). Každá transpozice je lichou permutací, proč tedy tvrdíme, že lze získat jen sudé permutace? Důvod je v tom, že každý tah zároveň mění o jednu buď číslo řádky s prázdným polem r , nebo číslo sloupce s prázdným polem s , kde $r, s = 1, 2, 3, 4$. Díky tomu veličina

$$Z = \text{znak } p \cdot (-1)^{(r+s)} \quad (12)$$

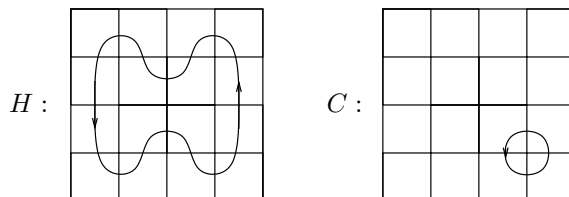
se zachovává, protože tah mění obě znaménka. Pokud tedy uvažujeme dvě konfigurace s dírou vpravo dole, $r = s = 4$, které mají opačný znak p , nelze je zjevně spojit libovolnou posloupností tahů, jelikož mají opačné Z .

b) Dokažme nyní, že se lze sekvencí tahů dostat z libovolné sudé permutace s dírou na místě $r = s = 4$ do standardní pozice 1 až 15 po řádkách. Jelikož prázdné pole 16 je v počátečním i koncovém stavu na místě, uvažujme nyní jen permutace 15 prvků. Pro větší názornost následujících úvah přelepme kameny 1, 2, 3, 4, ...

nálepkami $10', 9', 6', 5', \dots$ podle obrázku

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & \times \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 10' & 9' & 6' & 5' \\ \hline 11' & 8' & 7' & 4' \\ \hline 12' & 15' & 1' & 3' \\ \hline 13' & 14' & 2' & \times \\ \hline \end{array} \quad (13)$$

V pravé tabulce (13) vidíme, že kameny $1', 2', 3', \dots, 15'$ vytvářejí cyklus ve tvaru zdvojeného písmene \mathbb{H} (viz obrázek 6 vlevo); tato tabulka také ukazuje cílové srovnání čárkovaných kamenů. Je tedy jasné, že lze těchto 15 kamenů cyklicky permutovat (a díru ponechat na místě); příslušnou permutaci značme H . Kromě toho máme cyklickou permutaci 3 kamenů $1', 2', 3'$, kterou označíme C (obrázek 6 vpravo). Všimněte si, že obě permutace obsahují lichý počet kamenů, a jsou tedy sudé.



Obrázek 6: Užitečné permutace kamenů v Lloydově patnáctce.

Ačkoliv užití pouze dvou cyklů C, H je neekonomické pro praktické použití, je velmi efektivní pro teoretické účely. Při vhodné orientaci H (jako na obrázku 6) je jasné, že permutace $C_k = H^k C H^{-k}$ se chová jako $C \equiv C_0$, ovšem cyklicky permutuje kameny $(k+1)', (k+2)', (k+3)'$ modulo 15. Permutace C_k nám ve skutečnosti stačí na složení patnáctky²¹, jelikož libovolný kámen na začátku lze „probublat“ na správné místo. Začneme třeba s kamenem $15'$ a pokračujeme sestupně. Problém může nastat až v poslední fázi, kdy se snažíme přemístit kameny $1', 2', 3'$, zatímco kameny $4'$ a výše už jsou na správných místech. Povede se nám to jen v případě, že jsme začali se sudou permutací. Čtenář jistě detaily domyslí sám. *LM

²¹Říkáme, že C a H generují grupu všech sudých permutací množiny $\{1, \dots, 15\}$.

3 Konečná i jiná tělesa

3.1 Tělesa modulo prvočíslo

Úkol: Dokažte, že $\mathbb{Z}_p = \{0, \dots, p-1\}$ je pro p prvočíslo komutativní těleso s operacemi sčítání a násobení modulo p . Proč je potřeba žádat, aby bylo p prvočíslo?

Řešení: Asociativita, existence neutrálních prvků a komutativita jak sčítání tak i násobení a existence inverzních prvků vzhledem k sčítání je zřejmá. Zbývá tedy dokázat existenci inverzních prvků vzhledem k násobení. Pro $i = 1, \dots, p-1$ uvažme následující zobrazení: $f_i(x) = ix \bmod p$. Nejprve ukážeme, že f_i je na množině $\{0, 1, \dots, p-1\}$ prostá funkce. Nechť tomu tak není a tedy existují $x_1 \neq x_2$ takové, že $f_i(x_1) = f_i(x_2)$, a tedy p dělí $f_i(x_1) - f_i(x_2) = i(x_1 - x_2)$. Protože p je prvočíslo a $0 < i < p$ musí nutně platit p dělí $x_1 - x_2$. Z toho okamžitě plyne $x_1 = x_2$. Funkce f_i je tedy prostá, ale protože zobrazuje p různých čísel do množiny p čísel, je nutně bijektivní. Potom ale existuje x , že $f_i(x) = 1$ a toto x je hledaný inverzní prvek vzhledem k i vůči násobení (tento důkaz je shrnut také v příkladu 2.3). Tím je důkaz, že \mathbb{Z}_p je těleso, hotov.

Pokud p není prvočíslo, tvoří množina $\{0, \dots, p-1\}$ se sčítáním a násobením pouze komutativní *okruh*. Pokud je totiž $p = p_1 p_2$, $p_{1,2} > 1$, pak pro žádný násobek p_1 či p_2 neexistuje inverzní prvek vůči násobení. Důkaz je jednoduchý: nechť platí $\alpha p_1 = 1 \bmod p$, tedy $\alpha p_1 = kp + 1$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Tato rovnost ale dává okamžitě spor $1 = 0 \bmod p_1$. *DK

3.2 Zmatené výpočty s inverzní maticí

Úkol: V tělese \mathbb{Z}_{11} , které obsahuje prvky $0, 1, \dots, 10$ a v němž všechno sčítání, odčítání i násobení probíhá modulo 11 (to znamená, že z každého výsledku vezmeme jen zbytek po dělení 11, neboli přičítáme násobky 11, dokud se nedostaneme do množiny $\{0, 1, \dots, 10\}$), spočtete inverzní matici k matici L níže (jako Ludolf, víte proč?), a to jak řádkovými úpravami ($L|I$), tak metodou sub-

determinantu (viz příklad 8.1)

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Řešení: Nejdříve musíme přijít do rytmu. Tak například $5 + 8 = 2$, $-6 = 5$, $4 \cdot 7 = 6$ atd. Je užitečné si napsat tabulku inverzních prvků

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^{-1}	-	1	6	4	3	9	2	8	7	5	10

V první metodě napíšeme vedle sebe L a I a řádkovými úpravami nejprve vynulujeme prostor pod diagonálou, a pak pokračujeme s řádkovými úpravami a nulujeme nad diagonálou. Ve výpočtu zapsaném níže jsme museli nejprve sedminásobek první řádky přičíst k druhé, abychom vynulovali jednotku vlevo (první řádek máme násobit $-\frac{1}{3}$, ale to je $(-1)/3 = 10 \cdot 3^{-1} = 10 \cdot 4 = 7$). V posledním kroku jsme první i třetí řádku násobili čtyřmi (tedy $1/3$), abychom získali vlevo jednotkovou matici. Celý postup je:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2)+7 \cdot (1) \rightarrow (2) \\ (3)+3 \cdot (1) \rightarrow (3)}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 6 & | & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\substack{2 \cdot (2) + (3) \rightarrow (3) \\ (1)+6 \cdot (3) \rightarrow (1)}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1)+6 \cdot (3) \rightarrow (1) \\ (2)+6 \cdot (3) \rightarrow (2)}} \\ & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 10 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & | & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-(2) \rightarrow (1)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 10 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & | & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\substack{4 \cdot (1) \rightarrow (1) \\ 4 \cdot (3) \rightarrow (3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 9 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 10 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Inverzní matici lze odečíst na konci vpravo od svislé čáry.

Spočteme ji ještě pomocí subdeterminantu, připomínáme že[‡] $(L^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} |L_{ji}| / \det L$, kde $|L_{ij}|$ je determinant matice L , v níž jsme vynechali i -tý řádek a j -tý sloupec (bývá označován jako *minor* či po opatření znaménkem $(-1)^{i+j}$ *algebraický doplněk*).

Determinant L je roven

$$\det L = (9 + 2 + 7) - (7 + 5 + 8) = -2 = 9$$

a inverzní matice je tedy (např. v pravém horním rohu inverzní matice vlevo máme $|L_{31}| / \det L = (1 \cdot 9 - 5 \cdot 4) / 9 = 0$)

$$L^{-1} = 9^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 2 & 7 & 10 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 10 & 2 & 6 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zkontrolujte $LL^{-1} = I$.

*LM

3.3 Podprostory nad konečným tělesem

Úkol: Určete, kolik různých k -dimenzionálních podprostorů má vektorový prostor \mathbb{Z}_p^n pro $0 \leq k \leq n$, kde p je prvočíslo.

Řešení: $(\mathbb{Z}_p)^n$ (psáno často bez závorek) nad tělesem \mathbb{Z}_p je podobně jako \mathbb{R}^n nad \mathbb{R} prostor dimenze n . Pouze je to konečná množina, která má p^n prvků. Díky konečnosti platí pěkná tvrzení, například že dva podprostory stejné dimenze k mají stejný počet prvků, který je samozřejmě roven p^k . Také platí (jako u všech vektorových prostorů), že všechny prostory stejné dimenze nad stejným tělesem jsou navzájem izomorfní, takže vlastnosti libovolného k rozměrného podprostoru \mathbb{Z}_p^n lze zkoumat i na \mathbb{Z}_p^k .

Nejprve spočteme, kolik existuje různých m -prvkových posloupností lineárně nezávislých vektorů prostoru \mathbb{Z}_p^n . Necht' je vybráno prvních $m - 1$ lineárně nezávislých vektorů; m -tý vektor lze vybrat libovolně z vektorů, které neleží v lineárním obalu již vybraných vektorů, těch je $p^n - p^{m-1}$; p^n je počet všech vektorů v prostoru dimenze n a p^{m-1} je počet vektorů v podprostoru dimenze $m - 1$. Celou m -prvkovou posloupnost lineárně nezávislých vektorů v prostoru dimenze n nad \mathbb{Z}_p lze tedy vybrat $\prod_{i=0}^{m-1} (p^n - p^i)$ způsoby. Každá

[‡]Dejte pozor na pořadí indexů.

k -prvková posloupnost lineárně nezávislých vektorů v \mathbb{Z}_p^n určuje k -dimenzionální podprostor \mathbb{Z}_p^n a každý takový podprostor je určen $\prod_{i=0}^{k-1} (p^k - p^i)$ různými posloupnostmi (tolika způsoby lze vybrat k -prvkovou posloupnost jeho lineárně nezávislých prvků — v prostoru \mathbb{Z}_p^k je to zřejmé, a ten je takovému podprostoru izomorfní). Tedy počet podprostorů dimenze k je:

$$\frac{\prod_{i=0}^{k-1} (p^n - p^i)}{\prod_{i=0}^{k-1} (p^k - p^i)}.$$

*DK

3.4 Konečná tělesa polynomů

Úkol: Uvažujte těleso \mathbb{T} všech polynomů $ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{Z}_7$, se sčítáním a násobením modulo polynom $x^2 + 2$. Takové těleso má 49 prvků, sčítání v každém řádu x probíhá modulo 7, například $5x + 6x = 11x = 4x$, $3 \cdot 6 = 18 = 4$, $-(2x+6) = 5x+1$, a pokud dostaneme polynom alespoň druhého stupně, odečteme vhodný násobek²² $x^2 + 2$, abychom získali polynom nejvýše prvního stupně, například $(3x + 5)(2x + 6) = 6x^2 + 28x + 30 = 6x^2 + 2 = 6x^2 + 2 - 6(x^2 + 2) = -10 = 4$. Nalezněte metodou subdeterminantu inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 5x & 3x \\ 1 & 4x + 5 \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme, že toto těleso nemá myšlenkou daleko k \mathbb{C} , kde ale reálná a imaginární část je ze \mathbb{Z}_7 . Místo polynomů $ax + b$ bychom mohli uvažovat dvojice (a, b) s následujícími pravidly pro sčítání a násobení (vše modulo 7):

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) + (a_2, b_2) &\stackrel{\text{df}}{=} (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &\stackrel{\text{df}}{=} (a_1 b_2 + a_2 b_1, b_1 b_2 - 2a_1 a_2). \end{aligned}$$

²²Například $5 \cdot (x^2 + 2)$, $(2x + 1) \cdot (x^2 + 2)$ atp. Druhou možností v tomto případě neuplatníme, ale pokud počítáme modulo polynom vyššího stupně, tak ano.

Komplexní čísla ($z = b + ia$) mají u násobení místo toho ($a_1b_2 + a_2b_1, b_1b_2 - a_1a_2$).

Řešení: Připomínáme

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

srovnajte s příklady 3.2 a 6.5.

Spočtème si nejdříve determinant matice A . Vyjde nám

$$\begin{aligned} \det A &= 5x(4x + 5) - 3x = 20x^2 + 22x = -x^2 + x = \\ &= -x^2 + x + (x^2 + 2) = x + 2. \end{aligned} \quad (14)$$

Nyní je třeba nalézt inverzní prvek k prvku $x + 2$ v tělese \mathbb{T} , bude jím nějaký polynom $ax + b$. Z podmínky

$$1 = (x + 2)(ax + b) = ax^2 + (2a + b)x + 2b = (2a + b)x + (2b - 2a)$$

dostáváme $2a + b = 0$, $2b - 2a = 1$ modulo 7. Sečtením obou rovnic získáme $3b = 1$, $b = 5$ (neb $3 \cdot 5 = 15 = 1$), $a = 1$ (neb $2 \cdot 1 + 5 = 0$). Inverzní prvek k $(x + 2)$ je tedy $(x + 5)$ a matici A^{-1} spočtème lehce:

$$A^{-1} = (x + 5) \begin{pmatrix} 4x + 5 & -3x \\ -1 & 5x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^2 + 25x + 25 & -3x^2 - 15x \\ -x - 5 & 5x^2 + 25x \end{pmatrix}$$

Po jednoduché úpravě dostáváme

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4x + 3 & 6x + 6 \\ 6x + 2 & 4x + 4 \end{pmatrix}.$$

Pilný čtenář může ověřit výsledek (15) také řádkovými úpravami ($A|1$). My už ale uděláme jen zkoušku (ověřte, že následující matice je skutečně jednotková).

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 20x^2 + 15x + 18x^2 + 6x & 30x^2 + 30x + 12x^2 + 12x \\ 4x + 3 + 24x^2 + 38x + 10 & 6x + 6 + 16x^2 + 36x + 20 \end{pmatrix}$$

Poznamenejme ještě, že při vytváření tělesa není volba polynomu $x^2 + 2$ jednoznačná, není ovšem ani neomezená. Polynom $x^2 + 2$ je ireducibilní, nedá se rozložit na součin jednodušších. Tohle by

neplatilo například pro polynomy x^2 , $x^2+6 = (x+1)(x+6)$, $x^2+3 = (x+2)(x+5)$, $x^2+5 = (x+3)(x+4)$. Díky tomu bychom nemohli například v „tělese“ modulo polynom x^2+5 nalézt inverzní prvek např. $k^{23}(x+3)$.

Celkově ale platí, že pro dané prvočíslo p a daný stupeň n polynomu q jsou všechna tělesa polynomů nad \mathbb{Z}_p modulo polynom q (která mají tedy p^n prvků) pro všechny ireducibilní polynomy q vzájemně izomorfní. Takto definovaná komutativní tělesa zároveň vyčerpávají seznam všech *konečných těles*; obyčejné těleso \mathbb{Z}_p získáme pro $n=1$ a například polynom x , v příkladu výše jsme pracovali s $p=7$, $n=2$, $q=x^2+2$. *LM

3.5 Vzorec pro Ludolfovo číslo od Johna Machina

Úkol: Zopakujte si násobení komplexních čísel. Užijte fakt, že $\arg(xy) = \arg(x) + \arg(y)$ modulo 2π , a dokažte pomocí násobení vhodných komplexních čísel vzorec pro výpočet π nalezený Johnem Machinem (1680–1752) v roce 1706 (autor tehdy spočetl π na 100 míst ručně!)

$$\pi = 16 \operatorname{arctg}(1/5) - 4 \operatorname{arctg}(1/239). \quad (15)$$

Řešení: Jelikož tangenta je poměrem protilehlé a přilehlé odvěsny, není těžké vidět, že $\operatorname{arctg}(1/5) = \arg(5+i)$. Podobně platí $-\operatorname{arctg}(1/239) = \arg(239-i)$. Uvažujme $\arg(re^{i\phi}) = \phi$ vždy v intervalu $(-\pi, \pi)$. Dokažme nyní rovnost (15) vydělenou čtyřmi. Díky vzorci $\arg(xy) = \arg(x) + \arg(y)$ lze psát

$$4 \operatorname{arctg}(1/5) - \operatorname{arctg}(1/239) = \arg[(5+i)^4 \cdot (239-i)]$$

Výsledek se má rovnat $\pi/4$, abychom dokázali (15). Spočteme tedy onen součin.

$$\begin{aligned} (5+i)^4(239-i) &= [(5+i)^2]^2(239-i) = \\ &= (24+10i)^2(239-i) = 2^2(12+5i)^2(239-i) = \\ &= 2^2(119+120i)(239-i) = 2^2(119 \cdot 239 + 120)(1+i). \end{aligned}$$

²³Podobně jako v „tělese“ \mathbb{Z}_{14} nenajdeme inverzní prvek k 2 a 7 (a jejich násobkům). Ireducibilita x^2+2 je tedy analogická k požadavku, že p je prvočíslo u \mathbb{Z}_p .

V posledním kroku jsme užili $120 \cdot 239 - 119 = 119 \cdot 239 + 120$, jelikož $119 + 120 = 239$. Vidíme, že výsledek (16) má shodnou (a kladnou) reálnou a imaginární část, tudíž jeho argument je skutečně roven $\pi/4$, čímž je důkaz hotov. Čtenář by mohl protestovat, že argument lze určit jen modulo 2π , ale snadno lze vidět, že o 2π jsme se zmýlit nemohli, jelikož zjevně $\arctg x < x$ pro $0 < x$, a tedy

$$0 < 4 \arctg(1/5) - \arctg(1/239) < \frac{4}{5}.$$

Poznamenejme závěrem, že vzorec (15) je jeden z mnoha poměrně efektivních způsobů, jak počítat číslo π numericky. Lze totiž využít řady

$$\arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (16)$$

a jelikož pro $x = 1/5$ nebo dokonce $x = 1/239$ členy velmi rychle klesají, stačí řádově N členů pro spočtení výsledku na N desetinných míst.²⁴ Pokud bychom počítali $\pi/4 = \arctg 1$ podle (16), potřebovali bychom řádově 10^N členů. Pokud jste ještě nedokazovali platnost vzorce (16), zderivujte ho a spatříte formuli pro geometrickou řadu $1/(1+x^2)$; integrační konstanta musí být nulová, jelikož $\arctg 0 = 0$.

Výpočet π na mnoho míst je samozřejmě výtečnou zábavou mnoha lidí. V době vydání knihy již rekord bude nejspíše zastaralý, ale v červnu 1997 spočetla skupina Japonců na stroji Hitachi SR2201 s 1024 procesory během dvou dnů 51 539 600 000 decimál π pomocí Borweinova algoritmu s konvergencí 4. řádu. Výsledek zkontrolovali během dalších dvou dní pomocí Gaussova–Legendrova algoritmu, jehož výklad přesahuje rámec této knihy. Z počtu míst je snad čtenáři zjevné, že tyto algoritmy jsou ještě mnohem rychlejší.

*LM

3.6 Sudé podmnožiny se sudými průniky

Úkol: *Nechť A je množina velikosti n . Nechť B je systém jejích podmnožin sudé velikosti takový, že průnik libovolných dvou množin tohoto systému má sudou velikost. Dokažte, že $|B| \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$; $\lfloor x \rfloor$ pro*

²⁴Formule (15) není výjimečná a lze najít i mnohem jednodušší, například Eulerův vztah $\arctg(1) = \arctg(1/2) + \arctg(1/3)$, který dokážeme podobně: $(2+i)(3+i) = (5+5i)$.

$x \in \mathbb{R}$ je nejbližší celé číslo menší nebo rovné x , tedy označuje zaokrouhlování dolů. Použijte větu o dimenzi jádra a obrazu zobrazení; pracujte nad tělesem \mathbb{Z}_2 . Dokažte, že tento odhad nelze zlepšit.

Řešení: Označme C matici, která jako řádky obsahuje charakteristické vektory množin systému B . Charakteristický vektor množiny $D \subseteq A$ je vektor z prostoru \mathbb{Z}_2^n , jehož i -tá složka je jedna právě tehdy, když i -tý prvek množiny A náleží množině D . Pro lepší porozumění uveďme příklad: $A = \{1, 2, \dots, 6\}$,

$$B = \left\{ \begin{array}{l} \{1, 2, 3, 4\} \\ \{2, 3\} \\ \{2, 3, 5, 6\} \end{array} \right\} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože všechny množiny mají sudou velikost a jejich průniky po dvou taktéž, je charakteristický vektor (v) libovolné množiny systému B prvkem jádra zobrazení odpovídajícího matici C (násobíme-li $Cv = u$, pak každá z komponent u je sudé číslo, tedy nula).

Označme h hodnotu matice C , tj. dimenzi obrazu zobrazení odpovídajícího matici C ; ta je určitě menší nebo rovná počtu řádků matice C . Jádro tohoto zobrazení obsahuje (právě díky podmínce na sudost průniků) všechny řádky matice C a tedy jeho dimenze je alespoň h . Dle věty o dimenzi jádra a obrazu zobrazení musí platit: $h + h \leq \dim \text{Ker } C + \dim \text{Im } C = n$. Tedy platí $h \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Všechny charakteristické vektory množin systému B leží v lineárním obalu řádků matice C , protože samy jsou řádky této matice; ten má dimenzi h a tedy obsahuje nejvýše 2^h různých vektorů (všechny h -dimenzionální podprostory mají stejný počet prvků). Systém B tedy obsahuje nejvýše $2^h \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ množin.

Nyní sestrojíme systém množin B , který má vlastnosti popsané v zadání příkladu, a jehož velikost je $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Sdružíme prvky množiny A do $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dvojic; je-li n liché, jeden prvek zbude. Vytvářený systém B bude obsahovat všechny podmnožiny množiny A takové, že je lze zapsat jako sjednocení právě vytvořených dvojic. Počet prvků takto vytvořeného systému B je $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ a zřejmě splňuje vlastnosti, které na něj klade zadání příkladu. *DK

3.7 Doplnování systému sudých podmnožin se sudými průniky

Úkol: Dokažte, že každý systém B podmnožin množiny A z předchozího příkladu lze rozšířit na systém B' splňující podmínky příkladu 3.6, jehož mohutnost je $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Řešení: Označme C matici, která jako řádky obsahuje charakteristické vektory množin systému B ; definice charakteristického vektoru množiny je uvedena v řešení příkladu 3.6. Nejprve ukážeme, že bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že libovolný vektor z lineárního obalu řádků matice C je zároveň jejím řádkem. Nechť tomu tak není a w je vektor, který není řádkem matice C a přitom zároveň náleží do lineárního obalu jejích řádků. Tento vektor leží v jádru matice zobrazení odpovídající matici C (viz příklad 3.6). Tedy jeho složkový součin²⁵ s libovolným z řádků C je nula, a protože je prvkem lineárního obalu řádků matice C , je jeho složkový součin se sebou samým taktéž nula (pracujeme stále nad \mathbb{Z}_2). Tedy počet prvků množiny odpovídající vektoru w je sudý a velikost průniku s libovolnou množinou ze systému B je taktéž sudá. Tedy množinu odpovídající vektoru w lze do systému přidat a takto lze postupovat, dokud všechny prvky lineárního obalu řádků matice C nejsou přímo jejími řádky.

Nechť tedy všechny prvky lineárního obalu řádků matice C jsou jejími řádky. Pokud je hodnota této matice $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, odpovídající systém množin má $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ prvků. Nechť je tedy hodnota této matice menší než $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Ukážeme, že existuje množina, kterou lze do tohoto systému přidat tak, aby byly nadále splněny všechny podmínky, které na něj klademe. K matici C přidejme řádek obsahující samé jedničky. Hodnota matice C tím vzroste nejvýše o jedna a tedy bude nejvýše $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Jádro zobrazení odpovídající takto upravené matici nadále obsahuje charakteristické vektory všech množin uvažovaného systému a dle věty o dimenzi jádra a obrazu zobrazení je jeho dimenze alespoň $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; obsahuje tedy alespoň jeden nenulový vektor w , který není charakteristickým vektorem žádné z množin systému B (lineární obal

²⁵Složkový součin dvou vektorů a a b je $a \cdot b = \sum_i a_i b_i$. V konečných tělesech $a \cdot b$ není skalárním součinem, neboť nesplňuje $a \cdot a \neq 0$ pro $a \neq 0$, a proto nebudeme označení skalární součin pro toto zobrazení používat.

charakteristických vektorů tohoto systému má dimenzi menší než $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$). Množinu odpovídající vektoru w lze k systému B přidat, aniž bychom porušili některou z podmínek, které má systém B splňovat. Takto rozšířený systém množin lze pak „lineárně uzavřít“ postupem popsaným v minulém odstavci, a tento postup případně několikrát zopakovat, dokud hodnota matice C nebude $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ a odpovídající systém množin nebude mít $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ prvků. *DK

3.8 Liché podmnožiny s lichými průniky

Úkol: Nechtě A je množina velikosti n . Nechtě B je systém jejích podmnožin liché velikosti takový, že průnik libovolných dvou prvků tohoto systému má lichou velikost. Dokažte, že $|B| \leq 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$. Dokažte, že tento odhad nelze zlepšit.

Návod: Pro liché n lze využít výsledků příkladu 3.6 – uvažte systém tvořený doplňky množin ze systému B . Pro sudé n (ale lze takto postupovat i pro liché n) zvolte $D \in B$ uvažte systém B' tvořenými symetrickými diferencemi²⁶ množin systému B a množiny D . Nyní již lze použít větu o dimenzi jádra a obrazu zobrazení, podobně jako v 3.6 příkladu, na charakterické vektory množin systému B' a množiny D .

Řešení: Postupujme dle návodu v příkladu zároveň pro sudé i liché n . Pracujme nad tělesem \mathbb{Z}_2 , označme d charakteristický vektor (viz příklad 3.6) množiny D a nechtě u a v jsou charakteristické vektory dvou libovolných (ne nutně různých) množin systému B . Označme \cdot složkový součin vektorů, tj. $a \cdot b = \sum_i a_i b_i$. Vektor $u + d$ je charakteristickým vektorem množiny, která je symetrickou diferencí množiny D a množiny odpovídající vektoru u . Tedy vektory $u + d$ jsou charakteristickými vektory množin systému B' a navíc charakteristické vektory všech množin tohoto systému jsou lze napsat v tomto tvaru. Podle zadání příkladu platí $u \cdot v = 1$. Tedy zejména platí: $(u + d) \cdot (v + d) = u \cdot v + u \cdot d + d \cdot v + d \cdot d = 4 = 0$ a $d \cdot (v + d) = d \cdot v + d \cdot d = 2 = 0$.

Uvažme nyní matici C , jejíž řádky jsou charakteristické vektory množin systému B' a charakteristický vektor množiny D . Zřejmě

²⁶Symetrická diference množin A, B je množina prvků, které leží jen v A nebo jen v B .

charakteristické vektory všech množin systému B' leží v jádře zobrazení odpovídajícího matici C ; označme dimenzi lineárního obalu těchto vektorů c . Hodnost matice C je $c + 1$, neboť vektor d nelze vyjádřit jako lineární kombinaci²⁷ ostatních řádků matice D : ostatní řádky (a i jejich součty) mají totiž vždy sudý počet jedniček. Tuto skutečnost lze ověřit i jinak: kdyby platilo $d = \sum_i w_i$, kde w_i jsou některé z ostatních řádků matice C , potom by nutně platilo $1 = d \cdot d = d \cdot (\sum_i w_i) = \sum_i (d \cdot w_i) = \sum_i 0 = 0$. To ale není možné a tedy d je vektor lineárně nezávislý na ostatních řádcích matice C a tedy hodnost této matice je $c + 1$. Dle věty o dimenzi jádra a obrazu zobrazení musí platit: $c + (c + 1) \leq \dim \text{Ker } C + \dim \text{Im } C = n$. Odtud plyne $c \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, neboli $|B| = |B'| \leq 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$.

Nechť x je libovolný prvek množiny A a označme $A' = A \setminus \{x\}$. Nechť B'' je maximální systém podmnožin A' sudé velikosti, jejichž průnik po dvou má sudou velikost. Dle výsledků příkladu 3.6 je velikost tohoto systému $2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$. Nyní ke všem množinám systému B'' přidejme prvek x a takto vzniklý systém množin označme B . Systém B má zřejmě velikost $2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$ a splňuje podmínky příkladu. Tedy odhad, dokázaný v minulém odstavci, nelze zlepšit. *DK

3.9 Liché podmnožiny se sudými průniky

Úkol: Nechť A je množina velikosti n . Nechť B je systém jejích podmnožin liché velikosti takový, že průnik libovolných dvou prvků tohoto systému má sudou velikost. Potom $|B| \leq n$. Postupujte podobně jako při důkazu Fisherovy nerovnosti²⁸ (příklad 6.7) a pracujte nad tělesem \mathbb{Z}_2 . Dokažte, že tento odhad nelze zlepšit.

Řešení: Označme C matici, jejíž řádky jsou charakteristické vektory množin systému B (viz příklad 3.6). Pracujme nad \mathbb{Z}_2 . Podle podmínek kladených na systém B v zadání příkladu je matice CC^T jednotková matice řádu $|B|$. Podle věty o hodnosti součinu matic musí být hodnost matice C alespoň $|B|$ a protože počet jejích sloupců je n , je její hodnost zároveň nejvýše n . Odtud tedy ihned plyne $|B| \leq n$.

²⁷Lineární kombinace v \mathbb{Z}_2^n je pouze sčítání vektorů.

²⁸Ta v podstatě říká, že v blokové matici (např. blokově diagonální matici) $n \times n$ je počet bloků vždy nejvýše roven n .

Uvažme systém B podmnožin A tvořený všemi jejími jednoprvkovými podmnožinami. Velikost tohoto systému je n a zřejmě splňuje podmínky, které na něj klade zadání příkladu. Tedy právě dokázaný horní odhad na velikost systému B nelze zlepšit. *DK

3.10 Sudé podmnožiny s lichými průniky

Úkol: Nechť A je množina velikosti n . Nechť B je systém jejích podmnožin sudé velikosti takový, že průnik libovolných dvou prvků tohoto systému má lichou velikost. Potom $|B| \leq n$ pro n liché a $|B| \leq n - 1$ pro n sudé. Postupujte podobně jako v příkladu 3.9, pro n sudé se zamyslete též nad regularitou matic vystupujících ve vyšetřovaném součinu. Dokažte, že tento odhad již nelze zlepšit.

Řešení: Nechť C je matice, jejíž řádky jsou charakteristické vektory množin systému B (viz příklad 3.6), pracujme nad \mathbb{Z}_2 . Potom CC^T je matice $I + J$, kde I je jednotková matice řádu $|B|$ a J je matice téhož řádu tvořená samými jedničkami. Dále rozlišme dva případy, podle parity n .

Nechť n je liché a předpokládejme existenci systému B s $n + 1$ prvky (množinami). Ukážeme, že matice (sudého řádu $n + 1$) $I + J$ je regulární. Nechť tedy existuje nenulový vektor w takový, že $(I + J)w = 0$, tedy $Jw = -w = w$. Protože všechny řádky matice J jsou stejné, musí být všechny složky vektoru Jw stejné a protože w je nenulový vektor, musí nutně platit $w = (1, \dots, 1)^T$, a tedy i $(I + J)w = w + (0, \dots, 0)^T = w$ — což je spor. Matice $I + J$ je tedy regulární. Potom ale hodnota matice C musí být, podle věty o hodnotě součinu matic, alespoň $n + 1$, což není možné, neboť matice C má pouze n sloupců. Tedy nemůže existovat $(n + 1)$ -prvkový (a tím spíše víceprvkový) systém B s uvedenými vlastnostmi. Uvedený odhad nelze zlepšit, což dosvědčuje systém B tvořený všemi $(n - 1)$ -prvkovými podmnožinami množiny A .

Nechť je naopak n sudé a předpokládejme existenci systému B s n prvky (množinami). Matice (sudého řádu n) $I + J$ je regulární. Tedy hodnota matice C musí být, podle věty o hodnotě součinu matic, alespoň n . To by ale znamenalo, že matice C je regulární (má n sloupců, n řádků a plnou hodnotu). Součet všech sloupců matice C je však nulový vektor (v každém řádku je sudý počet jedniček), a

tedy matice C je singulární — což je spor. Tedy nemůže existovat n -prvkový (a tím spíše víceprvkový) systém B s uvedenými vlastnosti.

Uvedený odhad nelze zlepšit. Zvolme si libovolnou $(n - 1)$ -prvkovou podmnožinu množiny A a do systému B zařadíme všechny její $(n - 2)$ -prvkové podmnožiny. Systém B splňuje podmínky zadání příkladu a obsahuje $n - 1$ podmnožin. *DK

4 Vektorová odysea

4.1 Rozklad degenerovaného rovnoběžnostěnu

Podívejme se na obrázek na obálce knihy *Pěstujeme lineární algebru* [PLA]. Vidíme projekce jednotkové krychle ve vícerozměrném prostoru \mathbb{R}^n ($n = 3, 5, 11, \dots$) do roviny (zde jde o velmi speciální ortogonální projekce do některého z invariantních podprostorů cyklické grupy operátorů „cyklická záměna souřadnic“, tedy například roviny kolmé na $(1, 1, 1)$ v \mathbb{R}^3). Zobecněme tyto obrázky následující formulací.

Úkol: Mějme n vektorů v_1, \dots, v_n v nějakém prostoru V dimenze d kde $d < n$. Necht' každá d -tice vybraných vektorů již tvoří nezávislý soubor vektorů (bázi V). Definujeme degenerovaný rovnoběžnostěn

$$L = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i, x_1, \dots, x_n \in \langle 0, 1 \rangle \right\}. \quad (17)$$

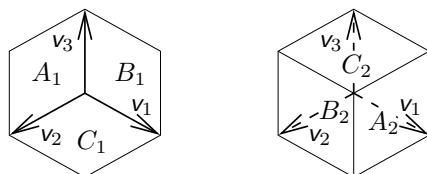
Dokažme, že (analogicky k obrázkům nakresleným na obálce skript [PLA]) lze každý takovýto „degenerovaný rovnoběžnostěn“ L rozložit na disjunktí sjednocení rovnoběžnostěnů dimenze d (speciálně pro $d = 2$ kosočtverců — neboli rhombů — v uvedeném příkladě).

Poznámka: Pro $d = n$ je vztahem 17 popsán obyčejný (nedegenerovaný) rovnoběžnostěn.

Řešení: Pro zadaný bod $u = \sum_i x_i v_i$ budeme x_i nazývat souřadnicemi u . Kvůli $n > d$ nejsou tyto souřadnice jednoznačné. Pokud z x_1, \dots, x_n libovolně, ale pevně zvolíme $n - d$ souřadnic a zbylých d necháme probíhat $\langle 0, 1 \rangle$, potom $\{\sum_i x_i v_i, x_i \in \langle 0, 1 \rangle\}$ popisuje nedegenerovaný d -rozměrný rovnoběžnostěn (viz obrázek 7).

Budeme se zabývat rozklady, u kterých mají pevně zvolené souřadnice hodnoty 0 nebo 1. Obtíž je v tom, že pro zadané d a vektory v_1, \dots, v_n existuje takových rozkladů rovnoběžnostěnu L více, viz opět obrázek 7. Při důkazu potřebujeme nějak označit jeden z rozkladů, abychom s ním mohli dále pracovat.

Obrázek 7 nás může svést k tomu, abychom zvolili „rozklad“, kde onech $n - d$ extrémálních souřadnic budou samé nuly. V následujícím



$$\begin{array}{ll}
 A_1 : (0, x_2, x_3) & A_2 : (1, x_2, x_3) \\
 B_1 : (x_1, 0, x_3) & B_2 : (x_1, 1, x_3) \\
 C_1 : (x_1, x_2, 0) & C_2 : (x_1, x_2, 1)
 \end{array}$$

Obrázek 7: Různé rozklady rovnoběžnostěnu $L = L(v_1, v_2, v_3)$, $d = 2$. Pro každou oblast $(A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2)$ je uvedeno, jak je parametrizován její vnitřek pomocí vektorů v_1, v_2, v_3 : pomocí (x_1, x_2, x_3) označujeme bod $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$, přičemž $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1$.

příkladem ale žádný rozklad nespĺňuje tuto podmínku

$$w_1 = (1, 0), \quad w_2 = (0, 1), \quad w_3 = (1, 1). \quad (18)$$

Možným rozkladem je například $(0, x_2, x_3), (x_1, 0, x_3), (x_1, x_2, 1)$. „Rozkladem“, kde by všechny extrémální souřadnice (tedy ona jedna v tomto případě) byly nula, bychom „nedosáhli“ do všech rohů L .

První způsob „označení jednoho rozkladu“ je založen na klíčové ideji „optimalizace souřadnic“ x_i zvoleného bodu (vektoru) $v = \sum_i x_i v_i \in L$, $x_i \in (0, 1)$. Optimalizací zde přesněji míníme minimalizaci sumy $s = \sum_i x_i$ při zachování podmínky $x_i \in (0, 1)$. Hodláme tedy tvrdit:

Tvrzení: *Optimalizujeme-li souřadnice bodu (vektoru) $v \in L$, tak výsledná n -tice koeficientů (x_1, \dots, x_n) je určena jednoznačně, a nejméně $n - d$ z těchto čísel x_i má extrémální hodnoty (tedy $x_i \in \{0, 1\}$).*

Toto tvrzení ovšem platí pouze tehdy, když je splněn

Předpoklad #: *Píšeme-li vztah lineární závislosti jakékoliv vybrané $(d + 1)$ -tice vektorů $v_{i_1}, \dots, v_{i_{d+1}}$ ve tvaru $\sum_{j=1, \dots, d+1} \alpha_j v_{i_j} = 0$, tak $\sum_j \alpha_j \neq 0$.*

Jinými slovy chceme pouze, aby jakákoliv $(d + 1)$ -tice vybraná z vektorů v_1, \dots, v_n byla už lineárně nezávislá, pokud ke každému vektoru $v_i = (v_i^1, \dots, v_i^d)$ přidáme ještě jednu souřadnici $v_i^{d+1} = 1$. Všechny d -tice takovýchto vektorů jsou už nezávislé podle předpokladu na začátku.

Příklad takové „optimální“ volby souřadnic je na obrázku 7 vlevo.

Není těžké pochopit, že výše uvedené tvrzení je skutečně již klíčem k hledané dekompozici L na disjunktní bloky rovnoběžnostěn; tyto bloky budou prostě zadány specifikací pořadových indexů a hodnot (0 či 1) příslušných $n - d$ extrémálních souřadnic. Volba zbylých d proměnných z intervalu $(0, 1)$ pak dává parametrický popis uvedeného bloku. Je ovšem možné, že některé z takto vytvořených bloků budou totožné.

Důkaz tvrzení: Necht' $v = \sum_i x_i v_i$ je vyjádření vektoru s nejmenším možným součtem $s = \sum_i x_i$. Předpokládejme například, že to jsou souřadnice x_1, x_2, \dots, x_{d+1} , které mají neextremální hodnoty, tzn. z otevřeného intervalu $(0, 1)$, a odvodíme spor. Vskutku, platí-li $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{d+1} v_{d+1} = 0$ a je-li přitom $\alpha_1 + \dots + \alpha_{d+1} \neq 0$, jak předpokládáme, můžeme souřadnice x_1, x_2, \dots, x_{d+1} „zlepšit“ (z hlediska zmenšení jejich sumy) tím, že vezmeme nové souřadnice, pro $i = 1, 2, \dots, d + 1$

$$\tilde{x}_i = x_i + \alpha \alpha_i$$

tak, aby nové souřadnice stále ještě náležely intervalu $(0, 1)$ (stačí vzít α dostatečně malé a vhodného znaménka). To ale je spor s předpokládanou optimalitou x_i . Tedy víc než d hodnot optimální volby souřadnic x_i prostě nemůže nabývat hodnot z otevřeného intervalu $(0, 1)$. \square

Je třeba ještě ukázat, že takto vytvořené bloky jsou skutečně disjunktní, přesněji řečeno, že není možno najít dvě různá optimální vyjádření $v = \sum_i x_i v_i$ a $v = \sum_i y_i v_i$ taková, u nichž by bylo nejvýše d indexů i s neextremálními hodnotami, tj. $x_i \in (0, 1)$ nebo $y_i \in (0, 1)$. Zkoumejme nyní výraz $\sum_i (x_i - y_i) v_i = 0$. Pokud je $x_i \neq y_i$ pro nejvýše d indexů, dostáváme spor s lineární nezávislostí (libovolné d -tice vektorů). Pokud je $x_i \neq y_i$ pro více než d indexů, pak je

$$v = \frac{1}{2}(v + v) = \sum_i \frac{1}{2}(x_i + y_i) v_i$$

rovněž optimální vyjádření vektoru v , které ovšem má více než d souřadnic s neextremálními hodnotami, což je spor.

Touto cestou jsme ovšem dokázali rozložitelnost L pouze za předpokladu $\#$. Případy, kdy zadaná dimenze d spolu s vektory v_1, \dots, v_n tento předpoklad nespĺňuje, mají „míru nula“, tedy stačí vektory (téměř) libovolně málo pozměnit a předpoklad $\#$ již bude splněn. Jako příklad si vezměme vektory $w_1, w_2, \frac{1}{2}w_3$, viz vztah (18). Lze tedy očekávat, že i pro vektory, které nespĺňují podmínku $\#$, bude možné rozklad provést, i když onen „optimální rozklad“ nebude jednoznačně určen. V našem příkladě jsou optimální rozklady

$$\begin{array}{ll} X_1 : (x_1, x_2, 0) & X_2 : (0, x_2, x_3) \\ Y_1 : (1, x_2, x_3) & Y_2 : (x_1, 0, x_3) \\ Z_1 : (x_1, 1, x_3) & Z_2 : (x_1, x_2, 1) \end{array}$$

Přesvědčte se, že například bod $w_1 + w_2$ lze pomocí rozkladu vlevo zapsat jako $(1, 1, 0)$ a pomocí rozkladu vpravo jako $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$. Tato dvě vyjádření dávají stejný součet $s = 2$.

Druhý způsob důkazu rozložitelnosti pouze načrtne, zkuste provést podrobně. Máme-li konvexní $(d + 1)$ -dimensionální těleso, můžeme ho (ortogonálně) promítnout na nějaký d -rozměrný podprostor (vraťte se k obrázku 7; tam jsme promítali na rovinu kolmou na tělesovou úhlopříčku $(1, 1, 1)$). Bylo-li těleso složeno z kvádrů či obecněji rovnoběžnostěnů, máme na povrchu tohoto tělesa viditelné d rozměrné hrany (tedy rovnoběžnostěny opět, ale v nižší dimenzi; na obrázku 7 jsou to tedy tři kosočtverce) těch bloků, které vystupují na povrch. Při uvedeném promítání jsou tyto hrany buď celé „osvětlené“ nebo naopak celé ve stínu (rozmyslete si, co tím asi míníme pro obecné d ; je možné například pomocí skalárního součinu srovnávat normály ke stěnám mířící ven z tělesa s normálou k nadrovině, na níž promítáme). Takže projekci daného tělesa můžeme rozložit na d -rozměrné rovnoběžnostěny dokonce dvěma způsoby: nakreslením projekce „osvětlené“ či naopak „zastíněné“ části povrchu.

Nyní je tento postup třeba iterovat. Začneme s rovnoběžnostěnem vybudovaným v \mathbb{R}^n nad vhodnými vektory w_1, \dots, w_n a postupně projektujeme vzniklé konvexní útvary do nižších dimenzí $k = n - 1, \dots, d$, rozkládajícíce vždy vzniklý k -rozměrný konvexní útvar do rovnoběžníkových bloků podle výše uvedeného argumentu.

Zde vidíme, že (pokud jsou všechny podprostory, na které promítáme, pevně zvoleny) máme celkem 2^{n-d} možností rozkladu (zkuste si rozmyslet, zda jsou vzájemně různé). Jak souvisí tyto rozklady s tím, který jsme dostali první metodou (optimalizací souřadnic)? Polohy nadrovin, na které postupně promítáme, je třeba zvolit tak, abychom z vektorů $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n$ dostali správné vektory $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$. Směr osvětlení pak souvisí s volbou nul a jedniček v extrémálních souřadnicích. *MZ

4.2 Tři základní vektorové prostory

Úkol: U následujících množin se zadanými operacemi sčítání a násobení prvkem z tělesa ukažte, že se jedná o vektorové prostory. Tělesa jsou zde vždy komplexní čísla se sčítáním a násobením.

1. n je pevně zadáno. $\mathbb{C}^n \equiv V_1 = \{(v_1, \dots, v_n), x_i \in \mathbb{C}\}$ s operací sčítání po složkách a násobení číslem rovněž po složkách.

$$v = (v_1, \dots, v_n), u = (u_1, \dots, u_n) \Rightarrow$$

$$v + u = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n), \quad \lambda v = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n).$$

2. Množina V_2 posloupností $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ s komplexními elementy. Sčítání a násobení číslem λ opět „po složkách“, tedy

$$(a_i)_{i=0}^{\infty} + (b_i)_{i=0}^{\infty} = (a_i + b_i)_{i=0}^{\infty}, \quad \lambda(a_i)_{i=0}^{\infty} = (\lambda a_i)_{i=0}^{\infty}.$$

Všimněte si, že plus na levé straně prvního vztahu značí sčítání vektorů (které chceme definovat), zatímco na pravé straně je obyčejné sčítání čísel. Podobně u druhého vztahu násobíme vlevo vektor číslem (prvkem z tělesa) a vpravo násobíme číslo číslem.

3. Množina V_3 všech spojitých funkcí $\langle 0; 1 \rangle \rightarrow \mathbb{C}$. Sčítání je definováno podobně jako u posloupností, tedy bodově

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Řešení: Důkaz provedeme pouze v prvním případě, ostatní příklady jsou naprosto analogické. Prvky z prostoru V_3 si můžeme představit

podobně jako vektor z \mathbb{C}^n , jednotlivé složky vektoru ale nejsou označeny čísly $i = 1, 2, \dots, n$, ani $i = 1, 2, \dots$ jako v případě V_2 , ale spojitým indexem $0 \leq x \leq 1$.

Uvažujme tedy dva libovolné vektory $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ z V_1 a jakákoliv dvě čísla $x, y \in \mathbb{C}$. Definici vektorového prostoru shrneme do následujících bodů

1. V_1 s operací sčítání je komutativní grupa. Vidíme, že $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ je opět prvek z V_1 a sčítání prvků z V_1 je zřejmě asociativní i komutativní. Neutrální prvek je $(0, \dots, 0)$ a inverzní prvek k \mathbf{v} je $-\mathbf{v} = (-v_1, \dots, -v_n)$, které oba leží ve V_1 .
2. Má platit $(xy)\mathbf{v} = x(y\mathbf{v})$; uvědomte si, že na levé straně násobíme nejprve čísla x a y a výsledkem násobíme vektor, zatímco vpravo násobíme dvakrát vektor číslem. Tvrzení platí, obě strany jsou rovny (xyv_1, \dots, xyv_n) .
3. $(x + y)\mathbf{v} = x\mathbf{v} + y\mathbf{v}$. Podobná situace jako v předchozím bodě: dáváme do souvislosti sčítání čísel a sčítání vektorů. V tomto případě jsou obě strany rovny $((x + y)v_1, \dots, (x + y)v_n)$.
4. $x(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = (xv_1 + xu_1, \dots, xv_n + xu_n) = x\mathbf{v} + x\mathbf{u}$.
5. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

*KV

4.3 Jeden neobvyklejší vektorový prostor

Úkol: Ukažte, že množina $A = \{\mathbf{a} = (a_1, a_2), a_1, a_2 \in (0; \infty)\}$ s operacemi

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 b_1, a_2 b_2), \quad x\mathbf{a} = (a_1^x, a_2^x)$$

tvoří vektorový prostor nad reálnými čísly. Najděte izomorfismus mezi tímto prostorem a \mathbb{R}^2 .

Řešení: Stejně jako v příkladu 4.2 projdeme pět bodů definice vektorového prostoru. Buďte opět $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ prvky z A a x, y libovolná reálná čísla.

1. Sčítání prvků z A dává opět vektor z a (součin dvou kladných čísel je kladné číslo) a je asociativní a komutativní, neboť těmito vlastnostmi oplývá i násobení kladných reálných čísel. Neutrální prvek, tedy nulový vektor, je $(1, 1)$ a inverzní prvek k $a \in A$ je $-a = (1/a_1, 1/a_2) \in A$.
2. $xya = (a_1^{xy}, a_2^{xy}) = ((a_1^y)^x, (a_2^y)^x) = x(ya)$
3. $(x + y)a = (a_1^{x+y}, a_2^{x+y}) = (a_1^x a_1^y, a_2^x a_2^y) = xa + ya$
4. $x(a + b) = ((a_1 b_1)^x, (a_2 b_2)^y) = (a_1^x b_1^x, a_2^x b_2^x) = xa + xb$
5. $1a = (a_1^1, a_2^1) = (a_1, a_2) = a$.

Zobrazení

$$\varphi : A \ni (a_1, a_2) \mapsto (\ln a_1, \ln a_2) \in \mathbb{R}^2$$

je bijekce mezi množinami A a \mathbb{R}^2 , neboť je surjektivní ($\varphi(A) = \mathbb{R}^2$) i injektivní (prosté). Protože se „chová správně“ k operacím

$$\varphi(a + b) = (\ln a_1 + \ln b_1, \ln a_2 + \ln b_2) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

$$\varphi(xa) = (x \ln a_1, x \ln a_2) = x\varphi(a),$$

je to také izomorfismus mezi vektorovými prostory A a \mathbb{R}^2 . Z toho například plyne, že oba prostory mají stejnou dimenzi. Takových izomorfismů existuje více: lze například volit logaritmy o různém základu, ale ani tím ještě nejsou všechny možnosti vyčerpány.

*KV

4.4 Je to podprostor, není to podprostor...

Úkol: U následujících podmnožin, které jsou součástí vektorových prostorů V_1, V_2, V_3 (z příkladu 4.2), určete, zda se jedná o vektorové podprostory. Pokud ano, určete jeho dimenzi. U konečnědimenzionálních podprostorů nalezněte nějakou jejich bázi. Tělesem je vždy \mathbb{C} .

1. $\{(x, y, z, u) \in \mathbb{C}^4, x + y + 5z = 0\}$
2. $\{(0, x, y, z, u) \in \mathbb{C}^5, x - 2y + 3z = 0, x + y = 0\}$

3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, x^2 + y = 0\}$
4. $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3, x + y + z = 1\}$
5. Posloupnosti z V_2 , pro které konverguje řada $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2$.
6. Všechny omezené funkce z V_3 neboli funkce, pro něž existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|f(x)| \leq M, \forall x \in \langle 0; 1 \rangle$.
7. Všechny funkce z V_3 , které splňují $|f(x)| < 1, \forall x \in \langle 0; 1 \rangle$.
8. Funkce z V_3 , které nemají žádný nulový bod.
9. Funkce z V_3 , které splňují $f(0) = f(1) = 0$ (homogenní okrajové podmínky).
10. Funkce z V_3 , které splňují $f(0) = f(1) = 5$.
11. Všechny po částech konstantní funkce z V_3 (funkce, pro něž lze rozdělit $\langle 0; 1 \rangle$ na konečný počet podintervalů, na nichž je funkce konstantní; používá se také název schodové funkce).
12. Polynomy stupně n spolu s identicky nulovou funkcí.
13. Polynomy stupně nejvýše n .
14. Polynomy stupně nejvýše n , které mají kořeny $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$.
15. Všechny funkce $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s (nejmenší) periodou 2π .
16. Všechny funkce $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s racionální periodou.
17. Všechny periodické funkce $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Poznámka: na příklady vektorových prostorů narazíte také v příkladu 12.1.

Řešení: Stačí vždy jen ověřit, zda je příslušný podprostor uzavřený vzhledem ke sčítání vektorů a násobení vektorů číslem a zda obsahuje nulový vektor. V některých případech zůstane tato práce čtenáři. První slovo v následujícím výčtu je vždy odpověď na otázku, zda je příslušná množina vektorový podprostor.

1. Ano. Pokud $x_1 + y_1 + 5z_1 = 0$ a $x_2 + y_2 + 5z_2 = 0$ pro nějaké dva vektory v_1, v_2 , pak to platí i pro $v_1 + v_2$ (stačí obě rovnice sečíst) a pro λv (stačí první rovnici násobit λ).
Dimenze tohoto prostoru je 3, neboť jej lze chápat jako množinu řešení soustavy s jednou nezávislou lineární rovnicí a čtyřmi neznámými. Báze je například $(1, -1, 0, 0)$, $(0, 5, -1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$.
2. Ano. Argumentace je podobná jako u bodu 1, dimenze je dvě ($5 - 3$, jedna rovnice je $v_1 = 0$), báze je například $(0, 1, -1, -1, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 2)$.
3. Ne. Příčina je, že rovnice podmínky není lineární. Následek pak je, že například pro prvek této množiny $v = (2, -4, 1)$ leží $2v$ mimo množinu.
4. Ne. Rovnice podmínky je sice lineární, ale není homogenní. Tedy pokud $v = (1, 1, -1)$ rovnici splňuje, pak $2v$ splňuje rovnici $x + y + z = 2$, nikoliv $x + y + z = 1$.
5. Ano. Pokud jsou $(a_i), (b_i)$ dvě posloupnosti, pro něž uvedená řada konverguje a součty jsou A a B , pak $(a_i + b_i)$ konverguje se součtem nejvýše $A + B$. To plyne z trojúhelníkové nerovnosti $|a_i|^2 + |b_i|^2 \leq |a_i + b_i|^2$, která platí pro každý sčítanec řady zvlášť. Prostor je nekonečnědimenzionální, označuje se někdy ℓ_2 .
6. Ano. Pokud jsou dvě funkce omezené konstantami M_1, M_2 , pak je součet těchto funkcí omezen $M_1 + M_2$.
7. Ne. Funkce $f(x) = \frac{1}{2} \sin \pi x$ v této množině leží, ale $2f(x)$ nikoliv.
8. Ne. Například už jenom proto, že v množině není nulový vektor (identicky nulová funkce).
9. Ano. Součet dvou funkcí, které mají v bodě nula hodnotu nula, má v bodě nula opět hodnotu nula. Prostor je nekonečnědimenzionální.
10. Ne. Už jen kvůli nulovému vektoru.

11. Ano. Prostor má nekonečnou dimenzi díky volnosti ve volbě dělení intervalu. Pokud bychom změnili definici této množiny a žádali, aby bylo dělení intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ vždy stejné, například na $\langle 0; x_0 \rangle, \langle x_0; x_1 \rangle, \dots, \langle x_n; 1 \rangle$, bude dimenze $n + 1$ (tedy počet intervalů). Všimněte si přímočaré podobnosti s \mathbb{R}^{n+1} .
12. Ne. Že jsme přidali nulový vektor, nám nepomůže. Součet polynomů $x^n + 1$ a $-x^n$ je polynom stupně nula, tedy nikoliv n .
13. Ano. Dimenze prostoru je $n + 1$, bázi tvoří například funkce $1, x, \dots, x^n$. Tento prostor je samozřejmě izomorfní \mathbb{C}^{n+1} , příslušný *izomorfismus* přiřadí například $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ vektor $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.
14. Ano. Prostor má dimenzi $n - 1$ pro $n \geq 2$. Pro $n = 1$ a $n = 0$ obsahuje tento prostor pouze nulový vektor. Bázi prostoru tvoří například funkce $(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{4}), x(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{4}), \dots, x^{n-2}(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{4})$.
15. Ano. Prostor lze ztotožnit se spojitými funkcemi na $\langle 0; 2\pi \rangle$ a má nekonečnou dimenzi. To plyne z toho, že například již jen $\sin x, x \sin x, x^2 \sin x, \dots$, jako funkce $f : \langle 0; 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, tvoří bázi jednoho jeho nekonečnědimenzionálního podprostoru.
16. Ano. Pokud má f periodu $P_1 = p_1/q_1$ a g periodu $P_2 = p_2/q_2$ ($p_{1,2}, q_{1,2} \in \mathbb{N}$), pak platí $(f + g)(x + p_1p_2) = f(x + p_1p_2) + g(x + p_1p_2) = f(x + q_1p_2P_1) + g(x + p_1q_2P_2) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$. Jinými slovy pro dvě racionální periody najdeme vždycky společný celočíselný násobek (společnou periodu). Prostor je nekonečnědimenzionální.
17. Ne. Funkce $\sin x + \sin \sqrt{2}x$ není periodická, je to již tzv. kvaziperiodická funkce (a prostor takovýchto funkcí, tedy součtů periodických funkcí je již lineárním prostorem).

*KV

4.5 Lineární závislost vektorů z . 4

Úkol: Jsou následující vektory z \mathbb{R}^4 lineárně závislé?

$$v_1 = (4, -5, 2, 6), \quad v_2 = (2, -2, 1, 3),$$

$$v_3 = (6, -3, -3, 9), \quad v_4 = (4, -1, 5, 6)$$

Pokud ano, najděte lineární kombinaci, která netriviálně dává 0 (nulový vektor).

Řešení: Zadané vektory si zapíšeme do matice jako řádky a snažíme se ji upravit Gaussovou eliminační metodou. Řádky matice nadále budeme brát jako vektory a označovat je v_{ij} , kde i označuje pořadí vektoru a j počet úprav, které byly na vektoru provedeny (tedy například $v_{i0} \equiv v_i$ ze zadání).

$$\begin{array}{ccc} & v_{31} = v_{30} - 3v_{20} & \\ & v_{21} = 2v_{20} - v_{10} & \\ & v_{41} = v_{40} - v_{10} & \\ \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & -3 & 9 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & v_{32} = v_{31} - 3v_{21} & \\ & v_{42} = v_{41} - 4v_{21} & \\ & & \\ \longrightarrow & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \\ \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{v_{43} = 2v_{42} + v_{32}} & \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vidíme, že zadané vektory jsou *lineárně závislé*. Tzn. z daných vektorů můžeme utvořit netriviální lineární kombinaci rovnající se vektoru $(0, 0, 0, 0)$ (zpětně):

$$\begin{aligned} (0, 0, 0, 0) &= v_{43} = 2v_{42} + v_{32} = 2[v_{41} - 4v_{21}] + v_{31} - 3v_{21} = \\ &= 2[v_{40} - v_{10} - 4(2v_{20} - v_{10})] + v_{30} - 3v_{20} - 3(2v_{20} - v_{10}) = \\ &= 9v_1 - 25v_2 + v_3 + 2v_4. \end{aligned}$$

Tím jsme dostali hledanou netriviální kombinaci dávající nulový vektor. *MB,ZV

4.6 Dimenze lineárního obalu

Úkol: Určete, jaká je dimenze prostoru napnutého²⁹ na funkcích f , g , h (uvažovaných na netriviálním intervalu):

$$\begin{aligned} f(x) &= a \sin x - 4 \cos x - \sin 2x \\ g(x) &= 4 \sin x - 6 \cos x - 3 \sin 2x \\ h(x) &= \sin x + \cos x - a \sin 2x \end{aligned}$$

v závislosti na reálném parametru a .

Řešení: Uvažujme prostor $V = \mathcal{L}(\{\sin x, \cos x, \sin 2x\})$, jehož je $\mathcal{L}(\{f, g, h\})$ jistě podmnožinou. Funkce $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$ jsou nezávislé (viz příklad 6.2), a tvoří tedy bázi V . Můžeme například funkce f, g, h vyjádřit pomocí složek v této bázi (můžeme si ale zvolit i jakoukoliv jinou bázi), čímž převedeme problém do \mathbb{R}^3 .

$$f = (a, -4, -1), \quad g = (4, -6, -3), \quad h = (1, 1, -a).$$

Dimenzi lineárního obalu vektorů v \mathbb{R}^3 zjistíme snadno pomocí *Gaussovy eliminace*. Zapišeme vektory do řádků matice a eliminujeme.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & -4 & -1 \\ 4 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix} &\xrightarrow{(1) \leftrightarrow (3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 4 & -6 & -3 \\ a & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (2) = (2) - 4 \cdot (1) \\ (3) = (3) - a \cdot (1) \end{matrix}} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -10 & -3 + 4a \\ 0 & -4 - a & -1 + a^2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\begin{matrix} (3) = -10 \cdot (3) + \\ + (4+a) \cdot (2) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & -10 & -3 + 4a \\ 0 & 0 & -6a^2 + 13a - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vidíme, že pro $-6a^2 + 13a - 2 = 0$, tedy $a_{1,2} = \frac{1}{6}, 2$, jsou v poslední matici dva nezávislé řádky. V ostatních případech jsou nezávislé všechny tři řádky.

Dodejme, že pokud bychom nebyli prohodili na začátku první a třetí řádek, měli bychom podstatně více práce. Kromě toho, že bychom dostali v matici mnohem více elementů závislých na a , museli

²⁹Odpusťte autorovi tento anglický slovní obrat. Lze říct také „dimenzi lineárního obalu funkcí f, g, h “.

bychom například už v prvním kroku $(2) = a \cdot (2) - 4 \cdot (1)$ provádět diskuzi. Tento krok je totiž možný pouze pro $a \neq 0$. V opačném případě uměle snižujeme dimenzi lineárního obalu řádků matice tím, že vymažeme druhý řádek a nahradíme ho (-4) -krát prvním. Při úpravách, které jsme prováděli v našem řešení, diskuzi provádět není třeba, neboť naše úpravy spočívaly v násobení upravovaného řádku nenulovým (pevným) číslem a přičítání lineární kombinace ostatních řádků (která závisela na a). Samozřejmě nám nevadí, když například v první úpravě ke třetímu řádku přičteme první řádek krát nula.

*KV

4.7 Hodnost lineárního zobrazení

Úkol: V prostoru V polynomů nejvýše třetího stupně uvažujme podprostor $W = \mathcal{L}(\{f_1, f_2, f_3, f_4\})$

$$f_1(x) = 3x^2 + x + 2, \quad f_3(x) = x^3 + x - 3,$$

$$f_2(x) = -3x^3 + 6x^2 - x + 13, \quad f_4(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x - 4.$$

Dále uvažujme zobrazení $a : V \rightarrow V$, $a : f \mapsto f'$ (derivace³⁰) a zobrazení $b : \mathcal{L}(\{1, x, x^2\}) \rightarrow V$, $b : f(x) \mapsto xf(x)$.

1. Určete dimenzi W .
2. Určete hodnost zobrazení $a : V \rightarrow V$ a hodnost $a|_W$, jeho restrikce na W (tedy derivace, která z W zobrazuje do V). Ověřte platnost tvrzení $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim V$ pro obě zobrazení.
3. Ukažte, že se zobrazení ab a ba na $U = \mathcal{L}(\{1, x, x^2\})$ liší.

Řešení: Hned na začátku je dobré si uvědomit, že obě zobrazení jsou skutečně lineární, tedy že platí $a(f + g) = af + ag$ a $a(\lambda f) = \lambda af$.

1. Zadané vektory zapíšeme v bázi $\{x^3, x^2, x, 1\}$, čímž celou úlohu převedeme do \mathbb{R}^4 . Vektory složek zapíšeme do řádků matice a

³⁰V tomto příkladu budeme potřebovat vědět pouze to, že derivace je lineární zobrazení a že $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Gaussovou eliminací ji převedeme na horní trojúhelníkový tvar.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & 13 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \dots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme tedy, že dimenze W je dvě.

První krok (prohození prvního a třetího řádku) jsme udělali proto, že prvek a_{11} (*pivotní prvek*) musí být nenulový. Podobná situace může nastat samozřejmě i později. Pokud pracujeme numericky (na počítači, s konečnou přesností), je vždy výhodné prohodit řádky tak, aby byl pivotní prvek co největší.

2. Hodnost obecného zobrazení $f : X \rightarrow X$ je totéž co *dimenze* jeho *obrazu*, tj. prostoru $f(X)$. Zjistíme ji tedy například tak, že v X zvolíme nějakou bázi $\{v_1, \dots, v_n\}$ a nalezneme dimenzi lineárního obalu $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$.

My si zvolíme ve V opět bázi $B = \{x^3, x^2, x, 1\}$ a vidíme, že $a(B) = \{3x^2, 2x, 1, 0\}$, tedy $h(a) = \dim \mathcal{L}(a(B)) = 3$.

Jádru a je jednorozměrný prostor všech konstantních funkcí, v našem zápisu $\mathcal{L}(\{1\})$. Rovnost $\dim \text{Im } a + \dim \text{Ker } a = 4$ je tudíž splněna.

Pro W to můžeme udělat podobně. Víme, že $\dim W = 2$, za bázi si tedy zvolíme například funkce $f_1(x), f_2(x)$, které jsou očividně nezávislé, tedy $\mathcal{L}(\{f_1, f_2, f_3, f_4\}) = \mathcal{L}(\{f_1, f_2\})$. Funkce $a f_1(x) = 6x + 1$, $a f_2(x) = -9x^2 + 12x - 1$ jsou ale také nezávislé, a tedy je $h(a|_W) = 2$.

Zobrazení $a|_W$ je injektivní (prosté), protože³¹ v průniku W a $\mathcal{L}(\{1\}) = \text{Ker } a$ leží jen nulový vektor. Pokud pro důkaz této skutečnosti nemůžeme použít $\dim \text{Ker } a|_W = \dim W - h(a|_W) = 0$ (např. proto, že to máme dokázat), je nejvýhodnější ukázat, že $\dim \mathcal{L}(\{f_1(x), f_2(x), 1\}) = 3$.

3. I pro tento úkol je nevhodnější sledovat, jak působí zobrazení na nějakou bázi v daném prostoru. Pokud zvolíme za tuto bázi přímo $\{1, x, x^2\}$, vidíme, že $baU = \mathcal{L}(\{0, x, 2x^2\})$; všimněte

³¹Lze samozřejmě také použít známé lemma pro lineární zobrazení a : $\dim W = \dim a(W) \Rightarrow a$ prosté.

si, že $h(ba) \leq \min\{h(b), h(a)\} = 2$, jak má být. Naproti tomu $abU_1 = \mathcal{L}(\{1, 2x, 3x^2\})$, tedy nejenže ab a ba působí jinak například na x^2 , ale dokonce i hodnoty těchto zobrazení nejsou stejné. *KV

4.8 Složky vektoru vzhledem k ortogonální bázi

Úkol:

1. Určete souřadnice vektoru $v = (2, 5, 6)$ vzhledem k bázi

$$B = \{u_1, u_2, u_3\} = \{(1, 2, 1), (1, 1, -3), (-7, 4, -1)\}$$

a запиšte $(2, 5, 6)$ jako příslušnou lineární kombinaci.

2. Udělejte totéž „chytřejší“ metodou, která využívá skutečnosti, že báze je ortogonální.

Řešení:

1. Řešíme soustavu

$$v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},$$

neboli

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -7 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -1 & 6 \end{array} \right).$$

Gaussovou eliminací získáme

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Tedy $v = (3, -1, 0)_B$ neboli $v = 3u_1 - u_2$.

2. Báze B splňuje $u_i \cdot u_j = 0$ pro $i \neq j$ (ověřte). Díky tomu platí

$$v = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 \Rightarrow v \cdot u_i = v_i \|u_i\|^2.$$

Tedy například $v_1 = \frac{(2,5,6) \cdot (1,2,1)}{\|(1,2,1)\|^2} = \frac{18}{6} = 3$.

*PV,KV

4.9 Báze, souřadnice, homomorfizmy

Úkol: Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 jsou dány dvě množiny vektorů S a N .

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{s_i\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{n_i\}$$

Dále buď T lineární zobrazení $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definované takto:

$$T \mathbf{x} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

1. Ověřte, že množiny S i N tvoří bázi vektorového prostoru \mathbb{R}^3 .
2. Určete souřadnice vektorů n_i vůči bázi S . Určete souřadnice vektorů s_i vůči bázi N . Jaké jsou souřadnice s_i vůči bázi S ?
3. Buď c vektor, který má vůči bázi N souřadnice c_1, c_2, c_3 . Najděte jeho souřadnice v bázi S .
4. Najděte matici lineárního zobrazení T vůči bázi S a vůči bázi N .

Řešení:

1. Abychom ukázali, že dotyčný soubor vektorů S (resp. N) tvoří bázi, je třeba ověřit dvě podmínky. Každý vektor z prostoru \mathbb{R}^3 musí být možno vyjádřit jako lineární kombinaci prvků množiny S (resp. N) a dané vektory musí být lineárně nezávislé. Protože dimenze prostoru \mathbb{R}^3 je tři a zadané množiny jsou tříprvkové, stačí, když budou vektory v množině S (resp. N) lineárně nezávislé a první podmínka bude splněna automaticky. Připomeňme si, že lineární nezávislost vektorů s_i znamená platnost následující implikace

$$c_1 \mathbf{s}_1 + c_2 \mathbf{s}_2 + c_3 \mathbf{s}_3 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

Musíme tedy ukázat, že rovnice $c_1 \mathbf{s}_1 + c_2 \mathbf{s}_2 + c_3 \mathbf{s}_3 = 0$ (pro neznámé c_1, c_2, c_3) má pouze triviální řešení (tzn. samé nuly). Uvedená rovnice je

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

což můžeme v maticové podobě napsat jako

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že matice A soustavy je regulární (například proto, že $\det A = -1 \neq 0$; nebo proto, že když odečteme od třetího řádku první řádek, dostaneme matici v horním trojúhelníkovém tvaru), a tedy jediný vektor, který se zobrazí na nulový vektor, je nulový vektor. Uvedená soustava vektorů \mathbf{s}_i je proto nezávislá a množina S je báze \mathbb{R}^3 . Naprosto stejným postupem zjistíme, že také množina N je báze \mathbb{R}^3 .

2. Souřadnicemi vektoru n_1 vůči bázi S rozumíme takové koeficienty a_i , že platí

$$n_1 = a_1 \mathbf{s}_1 + a_2 \mathbf{s}_2 + a_3 \mathbf{s}_3.$$

Po dosazení dostaneme

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

což v maticovém tvaru napíšeme takto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

V tomto případě lze koeficienty a_i snadno uhádnout, ale to nemusí jít vždy. K vyřešení soustavy použijeme třeba *Cramerovo pravidlo* (nemáme-li rádi determinanty, použijeme například Gaussovu eliminaci, viz příklad 1.1). Pro koeficient a_i dostaneme vyjádření

$$a_i = \frac{\det B_i}{\det B},$$

kde B je matice soustavy a B_i je matice soustavy, v níž místo i -tého sloupce napíšeme sloupec pravé strany. Koeficienty a_i jsou

$$a_1 = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad a_2 = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$a_3 = \frac{1}{-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Pro vektor n_1 jsme tedy našli vyjádření pomocí vektorů s_i jako $n_1 = 1s_1 + 1s_3$. Tuto skutečnost budeme zapisovat tímto způsobem: $n_1^T = (1, 0, 1)_S$, kde indexem S chceme naznačit, že se jedná o složky vektoru n_1 vůči bázi S . Naprosto stejným postupem najdeme složky ostatních vektorů n_i vůči bázi S . Konečným výsledkem našeho snažení bude

$$n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_S, \quad n_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S, \quad n_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_S.$$

Povšimněme si toho, že vztahy typu $n_1 = 1s_1 + 0s_2 + 1s_3$ lze ve zkratce napsat jako

$$(n_1, n_2, n_3) = (s_1, s_2, s_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (s_1, s_2, s_3)C, \quad (19)$$

kde matice C má ve sloupcích souřadnice vektorů báze $N = \{n_i\}$ vůči bázi $S = \{s_i\}$. Taková matice se nazývá *matice přechodu* od báze S k bázi N .

Naším dalším úkolem je najít souřadnice vektorů s_i vůči bázi N . Bylo by jistě nad míru úmorné opakovat znovu celý předcházející postup. Naštěstí nám stačí podívat se na výše uvedenou rovnici a máme hned výsledek, totiž

$$(n_1, n_2, n_3)C^{-1} = (s_1, s_2, s_3),$$

kde požadované hodnoty souřadnic vektorů s_i vůči bázi N čteme po řadě ve sloupcích matice C^{-1} . Zbývá vypočítat inverzi matice C . To

provedeme klasickým způsobem, a sice tak, že si vedle sebe napíšeme matici C a matici identity I a provádíme povolené (rozuměj ekvivalentní řádkové) úpravy matice $(C | I)$ dokud nedostaneme matici $(I | U)$. Právě matice U je inverzní maticí k matici C .

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(3) \rightarrow (3)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(3) \rightarrow (3)-(2)} \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) \rightarrow \frac{1}{2}(3)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{(1) \rightarrow (1)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(3) \rightarrow -\frac{1}{2}(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Pro souřadnice vektorů \mathbf{s}_1 vůči bázi N konečně dostaneme

$$(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) = (n_1, n_2, n_3) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Skutečně platí např. $\mathbf{s}_1 = \frac{1}{2}(n_1 - n_2 + n_3)$.

Složky \mathbf{s}_i v bázi S jsou samozřejmě $\mathbf{s}_1^T = (1, 0, 0)_S$, $\mathbf{s}_2^T = (0, 1, 0)_S$, $\mathbf{s}_3^T = (0, 0, 1)_S$.

3. Při určování souřadnic vektoru \mathbf{c} vůči bázi S bychom mohli postupovat přímo, tzn. mohli bychom řešit rovnici (pro neznámé d_1, d_2, d_3)

$$c_1 \mathbf{n}_1 + c_2 \mathbf{n}_2 + c_3 \mathbf{n}_3 = d_1 \mathbf{s}_1 + d_2 \mathbf{s}_2 + d_3 \mathbf{s}_3.$$

To je ale zbytečné. UVědomíme si, že vektor \mathbf{c} lze zapsat jako

$$\mathbf{c} = c_1 \mathbf{n}_1 + c_2 \mathbf{n}_2 + c_3 \mathbf{n}_3 = (n_1, n_2, n_3) [(c_1, c_2, c_3)_N]^T,$$

a také si připomeneme nedávno odvozenou formulku

$$\underbrace{(n_1, n_2, n_3)}_{\text{báze } N} = \underbrace{(s_1, s_2, s_3)}_{\text{báze } S} C. \quad (20)$$

Kombinací těchto vzorců dostaneme

$$\mathbf{c} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)C[(c_1, c_2, c_3)_N]^T,$$

odkud je vidět, že souřadnice vektoru \mathbf{c} vůči bázi S budou

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}_S = C \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}_N. \quad (21)$$

Názorně vidíme, že *matice přechodu* C , která lineárním kombinováním vyrábí z vektorů báze S vektory báze N (vektory psané do řádku, vztah 20), funguje při práci se *složkami* nějakého vektoru v opačném směru (složky psané do sloupce, vztah 21). Pro kontrolu si zkuste do (21) dosadit $(c_1, c_2, c_3)^T = (1, 0, 0)^T$ (matici C viz ve vztahu 19) a ověřte, že dostaneme správný výsledek.

4. *Maticí lineárního zobrazení* T vzhledem k bázi S rozumíme matici, kterou je potřeba násobit sloupec složek libovolného vektoru \mathbf{s} vzhledem k této bázi, abychom dostali sloupec složek vektoru $T\mathbf{s}$ (opět vzhledem k S). Tuto definici je možné ještě rozšířit, když budeme chtít \mathbf{s} a $T\mathbf{s}$ vyjadřovat v různých bázích.

Abychom zjistili jak bude vypadat matice zobrazení T vůči bázi S , spočteme nejprve vektory $T\mathbf{s}_1$, $T\mathbf{s}_2$ a $T\mathbf{s}_3$. Poté najdeme souřadnice těchto vektorů vůči bázi S stejným způsobem jako v předchozích bodech. Máme

$$\begin{aligned} T\mathbf{s}_1 &= T((1, 0, 1)) = (1, 0, 0) = -\mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 = (0, -1, 1)_S \\ T\mathbf{s}_2 &= T((0, 1, 0)) = (1, 2, 0) = \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 = (0, 1, 1)_S \\ T\mathbf{s}_3 &= T((1, 1, 0)) = (2, 2, 1) = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 = (1, 1, 1)_S \end{aligned}$$

Matice zobrazení je jakási tabulka M_S . Povšimněme si, jak má tabulka M_S účinkovat na vektory $\mathbf{s}_1 = [(1, 0, 0)_S]^T$.

$$\begin{aligned} M_S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_S &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_S, \quad M_S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S, \\ M_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_S &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S \end{aligned}$$

Nyní si stačí uvědomit, že násobením matice vektorem, který má jedničku v i -tém řádku a všude jinde nuly, dostaneme jako výsledek i -tý sloupec matice. Nebo také lze uvedené tři rovnosti shrnout do jedné

$$M_S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Při hledání matice zobrazení T vůči bázi N bychom mohli postupovat obdobně. Ale protože již máme tolik užitečných mezivýsledků, byla by škoda, kdybychom je nevyužili. Stačí řádně prostudovat následující schéma

$$\begin{array}{ccc} \text{báze } S & \text{zobrazení} & \text{báze } S \\ C \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_N & \xrightarrow{M_S} & M_S C \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_N \\ \uparrow C & & \downarrow C^{-1} \\ \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_N & \xrightarrow{M_N} & C^{-1} M_S C \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_N \\ \text{báze } N & & \text{báze } N \end{array}$$

Působení matice M_N (resp. zobrazení T) lze také dostat takto: nejprve zkoumaný vektor $(\cdot)_N$ (zadaný v bázi N) převedeme do báze S , k čemuž nám poslouží matice C . V bázi S již známe vyjádření zobrazení T pomocí matice M_S . Najdeme obraz vektoru při působení matice M_S . Tento výsledek vyjádříme v bázi N , k čemuž nám poslouží matice C^{-1} . Výsledek bude stejný jako přímé působení matice M_N . S vektorem $(\cdot)_N$ byla celkem provedena složená operace $C^{-1}M_S C$, a proto nemůže být jinak, než že

$$M_N = C^{-1}M_S C.$$

Po dosazení konkrétních čísel máme

$$M_N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

*VP

4.10 Magické čtverce

Úkol: Magické čtverce jsou čtvercové matice čísel, jejichž součty po řádkách se rovnají sobě navzájem a také součtům ve sloupcích, případně též součtům po diagonále.

- a) Uvažujte prostor M_1 reálných matic 3×3 takových, že součty v řádkách i sloupcích se rovnají. Určete dimenzi tohoto prostoru a najděte libovolnou bázi.
- b) Prostor M_2 obsahuje matice z M_1 s dodatečnou podmínkou, že i součty po diagonálách se rovnají součtům v řádkách či sloupcích. Určete dimenzi M_2 a nalezněte vhodnou bázi.
- c) Nalezněte pravý magický čtverec 3×3 , v němž se každé číslo z množiny $1, \dots, 9$ vyskytuje právě jednou. Ukažte, že rotacemi a zrcadleními lze získat více magických čtverců, než je dimenze M_2 z minulého bodu. Vysvětlete tento fakt. Pokud Vaše odpověď bude obsahovat spojení „lineární kombinace“, zvolte za bázi $\dim(M_2) - 1$ pravých magických čtverců a matice se samými pětkami a запиšte všechny ostatní pravé magické čtverce jako lineární kombinaci prvků této báze.
- d) Pokud přejdeme od čtverců 3×3 ke čtvercům 4×4 nebo obecněji $n \times n$ (a požadujeme stále to, co v bodech a,b), jaká bude dimenze?

Řešení:

- a) V prvním úkolu označme nejdříve součet v libovolné řádce nebo sloupci s . Pišme do první řádky a, b a poslední položka řádky pak musí být $s - a - b$. Do druhé řádky pišme d, e a poslední položka je

nutně $s - d - e$. Třetí řádka je pak také jednoznačně určena a obecný prvek M_1 má tvar

$$M = \begin{pmatrix} a & b & s - a - b \\ d & e & s - d - e \\ s - a - d & s - b - e & a + b + d + e - s \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Lehce zkontrolujeme, že pro libovolnou volbu pěti čísel a, b, d, e, s splňuje M podmínky M_1 . Zároveň jsme zapsali nejobecnější řešení, protože ke každému vyjádření nových položek pomocí starých jsme byli přinuceni. Tudíž dimenze M_1 je rovna pěti. Za *bázi* lze zvolit například pět matic, které dostaneme dosazením jednotky za jednu proměnnou a nul za ostatní proměnné z množiny $\{a, b, d, e, s\}$, tedy

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dodejme na závěr, že se v pravděpodobnostních úlohách vyskytují takzvané *bistochastické matice*, což jsou čtvercové matice (například 3×3), které mají součty prvků v každém řádku i sloupci rovné jedné. Všechny takové matice tvoří čtyřdimenzionální *afinní prostor*, neboli je lze zapsat ve tvaru

$$B = A_5 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 \stackrel{\text{df}}{=} A_5 + L.$$

Afinní prostor v prostoru V je tedy „vektorový podprostor $U \subset V$ plus jeden prvek $v \in V$ “; v našem případě tvoří matice A_1, A_2, A_3, A_4 bázi U a matice A_5 je prvek v z V . Pokud $v \notin U$ (jako v našem případě), pak tento afinní prostor není vektorovým podprostorem V . Názorně (v \mathbb{R}^n) si jej lze představit jako „posunutý vektorový podprostor“.

b) V dalším úkolu, v prostoru M_2 , požadujeme ještě navíc

$$a + e + a + b + d + e - s = s, \quad s - a - d + e + s - a - b = s,$$

což jsou dvě nezávislé rovnice, z nichž lze například vyjádřit d, e . Obecná matice je pak určena třemi nezávislými čísly a, b, s , dimenze M_2 je tedy rovna třem. *Bázi* lze zvolit podobně jako v minulém bodě. Pro (a, b, s) rovno postupně $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$ vyjde

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

c) Když v pravém magickém čtverci zapíšeme čísla $1, \dots, 9$, součet všech čísel bude $9 \cdot (1 + 9)/2 = 45$, jinak řečeno součet v každé řádce musí být roven 15. Průměrné číslo v každé řádce nebo sloupci či diagonále pak musí být 5 a můžeme ukázat, že i uprostřed musí být číslo 5. Například tak, že dvakrát součet součtů po obou diagonálách plus součet prostřední řady a součet prostředního sloupce (celkem $6 \cdot 15 = 90$) je roven součtu součtů na čtyřech hranách ($4 \cdot 15 = 60$) plus šestkrát prostřední číslo ($6 \cdot p = 30$).

Na protějších stranách od čísla 5 musíme napsat páry čísel, jejichž součet je roven 10. Jde jen o to, kam napíšeme $1 - 9$, $2 - 8$ atd. Začneme třeba s jednotkou uprostřed nějaké hrany. Intuice nás potom vede k tomu, že dvojku napíšeme co možná nejdále od jednotky a zbytek magického čtverce je již určen jednoznačně (viz první matice níže v rovnici (23); pokud bychom dvojku umístili do některé ze dvou zbývajících poloh, čtverec bychom nedokončili — zkuste si). Každý takový magický čtverec lze otočit do 4 různých světových stran a od každého otočení lze pořídit zrcadlovou kopii, celkem máme 8 tvarů magických čtverců. Výše jsme ale ukázali, že dimenze prostoru všech magických čtverců je rovna třem. Důvod je v tom, že každý prvek M_2 (např. každý otočený magický čtverec) lze psát jako lineární kombinaci základních čtverců (z M_2)

$$M' = A \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Všech 8 otočení a zrcadlení pravého magického čtverce získáme z (23) volbou (první dva čtverce jsou přímo z (23) a další dva jsou jejich

středově souměrné obrazy)

$$(A, B, C) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), \quad (-1, 0, 2), (0, -1, 2), \\ \left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

Všimněte si, že $A + B + C = 1$ ve všech případech, což je nutné k zachování součtu 45 všech čísel. Nezapomeňte také, že pravé magické čtverce netvoří vektorový prostor (zkuste schválně dva pravé magické čtverce sečíst).

d) Prostor obecných matic $n \times n$ má dimenzi n^2 , ovšem máme $2n - 2$ podmínek³² definujících M_1 a další 2 podmínky definující M_2 , celková dimenze M_2 je tedy $n^2 - 2n = n(n - 2)$. Pro větší čtverce tedy očekáváme, že bude existovat více magických čtverců a podmínky nebude těžké splnit. *LM

4.11 Vektory se sudým počtem jedniček

Úkol: Necht' P je $(n - 1)$ -dimenzionální podprostor \mathbb{Z}_2^n . Necht' se libovolně dva různé vektory $x, y \in P$ liší alespoň ve dvou souřadnicích. Potom je P tvořen právě všemi vektory obsahujícími sudý počet nenulových složek.

Řešení: Uvažujme matici A , jejíž $n - 1$ řádků je tvořeno bází podprostoru P . Hodnota této matice je $n - 1$, a tedy dimenze obrazu zobrazení odpovídajícího této matici je $n - 1$. Dimenze jádra tohoto zobrazení je dle věty o dimenzi jádra a obrazu jedna, a tedy jádro obsahuje právě jeden (pracujeme nad \mathbb{Z}_2) nenulový vektor — označme ho w . Dále označme B matici, která obsahuje jediný řádek a tím je vektor w . Jádro zobrazení odpovídajícího této matici má dimenzi $n - 1$ a je nadmnožinou podprostoru P — kterýkoliv řádek A násobený složkově $(\sum_i x_i y_i)$ s w dá nulu. Potom toto jádro je ale právě podprostorem P . Kdyby w měl nějakou nulovou složku (řekněme i -tou),

³²Celkem $2n$ různých součtů se má rovnat sobě navzájem, což znamená obecně $2n - 1$ podmínek, jelikož součet může být libovolný. Ovšem součty všech čísel v řádkách (součet všech řádkových součtů) a všech čísel ve sloupcích (součet všech sloupcových součtů) se automaticky rovnají, což znamená, že jedna z podmínek byla lineárně závislá na ostatních (porovnáním součtů n „řádkových“ rovnic a n „sloupcových“ rovnic dostáváme triviální rovnici $ns = ns$). Proto jen $2n - 2$ je nezávislých.

potom by vektor e_i (samé nuly, jednička na i -tém místě) náležel do podprostoru P a od nulového vektoru, který v tomto podprostoru také leží, by se lišil v jediné složce. Tedy musí platit $w = (1, \dots, 1)$. Z předchozích úvah plyne, že jádro $B = w^T$ je právě P , a tedy P obsahuje právě ty vektory, jejichž počet nenulových složek je sudý (stále pracujeme nad \mathbb{Z}_2). *DK

4.12 Bernšteinovy polynomy

Úkol: Dokažte, že polynomy $P_k(x) = x^k(1-x)^{n-k}$, $k = 0, \dots, n$ tvoří bázi na prostoru reálných polynomů stupně nejvýše n .

Řešení: Postup je celkem přímočarý. Vzhledem k tomu, že dimenze uvažovaného prostoru je $n+1$, stačí zřejmě dokázat, že polynomy P_k jsou lineárně nezávislé. Předpokládejme tedy, že nějaká jejich lineární kombinace je identicky nulová:

$$a_0(1-x)^n + a_1x(1-x)^{n-1} + \dots + a_{n-1}x^{n-1}(1-x) + a_nx^n = 0, \quad (24)$$

kde a_0, \dots, a_n jsou libovolná (reálná) čísla. Dosazením $x = 1$ do (24) dostaneme okamžitě $a_n = 0$. Teď rovnost (24) zderivujeme podle x , přičemž použijeme tvrzení, že při derivování se násobnost všech kořenů polynomu sníží o 1 (nepopíráme ale, že při derivování mohou vzniknout kořeny nové). Postupujeme tedy indukcí tak, že vždy zderivujeme a dosadíme $x = 1$, čímž postupně anulujeme $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$.

Na Bernšteinovy polynomy narazíme například v důkazu Weierstrassovy věty, která říká, že každou funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ lze s libovolnou přesností aproximovat polynomem ve smyslu „pro každé $\varepsilon > 0$ existuje polynom $P(x)$ takový, že $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$ “. Pokud si tuto větu budete chtít dokázat sami, zkuste vzít posloupnost polynomů

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (25)$$

a dokázat, že na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ konverguje stejnoměrně k funkci $f(x)$ (přechod od obecného případu k intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ přeškálováním je jednoduchý).

Vyjádření (25) má jednoduchou statistickou interpretaci. Známe-li hodnoty funkce $f(x)$ jenom v bodech k/n , kde $k = 0, \dots, n$, můžeme její hodnotu v libovolném bodě přibližně spočítat jako vážený průměr známých hodnot. Formule (25) nám pak říká, že váhu hodnoty $f(k/n)$ máme vzít jako pravděpodobnost, že při n hodech mincí padne k -krát hlava, přičemž x je pravděpodobnost padnutí hlavy při jediném hodu. To, že posloupnost (25) konverguje k funkci $f(x)$, je pak jen ukázkou platnosti známé centrální limitní věty.

*TB

5 Úlohy pro ortogonalisty

5.1 Ortogonální doplněk

Úkol: Nalezněte ortonormální bázi ortogonálního doplňku $V = \mathcal{L}(\{(1, 0, 2, 1), (2, 1, 2, 3), (0, 1, -2, 1)\})$, je-li skalární součin $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Řešení: Nejdřív zjistíme dimenzi prostoru V .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2\cdot(1)\rightarrow(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tady už vidíme, že jeden z vektorů je lineárně závislý. A jelikož zjevně všechny tři vektory nejsou násobkem jediného vektoru, musí být dimenze V rovna dvěma. Za báze vektory V si můžeme zvolit například první dva řádky z matice vpravo (označíme je v_1, v_2).

Hledání ortogonálního doplňku k V provedeme nyní následovně. Vektory v_1, v_2 doplníme (libovolným způsobem) na bázi v \mathbb{R}^4 ; zbylé dva vektory označme v_3, v_4 . Pak provedeme *Grammovu-Schmidtovu ortogonalizaci* a získáme vektory w_1, w_2, w_3, w_4 . Přitom ale w_1, w_2 generují V a w_3, w_4 jsou na oba tyto vektory kolmé. Lineární obal w_3, w_4 je tedy kolmý na V , a je tudíž roven V^\perp .

Vektory v_3, v_4 zvolíme tak, aby matice, v níž budou v_1, v_2, v_3, v_4 jako řádky, byla v horním trojúhelníkovém tvaru. Tím bude hned na začátku jasné, že jsou tyto vektory lineárně nezávislé, a tedy že tvoří bázi \mathbb{R}^4 .

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Za první bázeový prvek si zvolíme vektor $w_1 = v_1$. Pro druhý musí platit: $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$ (musí být kolmý na první vektor) a zároveň $w_2 = v_2 + k w_1$ (leží v rovině vektorů $v_2, v_1 = w_1$).

$$0 = \langle w_1, v_2 + k w_1 \rangle = \langle w_1, v_2 \rangle + k \langle w_1, w_1 \rangle = -3 + 6k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow w_2 = \frac{1}{2}(1, 2, -2, 3).$$

Abychom si zjednodušili počítání a vyhnuli se zlomkům, můžeme tento vektor nahradit jeho dvojnásobkem. Kolmost w_1 a w_2 ani jejich lineární obal tím samozřejmě nezměníme. Volíme tedy $w_2 = (1, 2, -2, 3)$.

Podobně postupujeme pro třetí a čtvrtý vektor, tady už však musí být splněná kolmost na všechny předešlé vektory. Hledáme w_3 ve tvaru $w_3 = v_3 + kw_1 + lw_2$, při úpravách využíváme $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$.

$$0 = \langle w_3, w_1 \rangle = \langle v_3, w_1 \rangle + k\langle w_1, w_1 \rangle + l\langle w_2, w_1 \rangle = 2 + 6k \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

$$0 = \langle w_3, w_2 \rangle = \langle v_3, w_2 \rangle + k\langle w_1, w_2 \rangle + l\langle w_2, w_2 \rangle = -2 + 18l \Rightarrow l = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow w_3 = \frac{1}{9}(-2, 2, 1, 0) \rightarrow w_3 = (-2, 2, 1, 0).$$

Poslední krok jsme opět udělali jen pro naše pohodlí při počítání. Nakonec se ještě vypořádáme s $w_4 = v_4 + kw_1 + lw_2 + mw_3$

$$\begin{aligned} 0 = \langle w_4, w_1 \rangle &= \langle v_4, w_1 \rangle + k\langle w_1, w_1 \rangle + l\langle w_2, w_1 \rangle + m\langle w_3, w_1 \rangle = \\ &= 1 + 6k + 0l + 0m \Rightarrow k = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = \langle w_4, w_2 \rangle &= \langle v_4, w_2 \rangle + k\langle w_1, w_2 \rangle + l\langle w_2, w_2 \rangle + m\langle w_3, w_2 \rangle = \\ &= 3 + 0k + 18l + 0m \Rightarrow l = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = \langle w_4, w_3 \rangle &= \langle v_4, w_3 \rangle + k\langle w_1, w_3 \rangle + l\langle w_2, w_3 \rangle + m\langle w_3, w_3 \rangle = \\ &= 0 + 0k + 0l + 9m \Rightarrow m = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow w_4 = \frac{1}{3}(-1, -1, 0, 1) \rightarrow w_4 = (-1, -1, 0, 1).$$

Vektory w_3, w_4 na závěr dělíme jejich normami a podáváme je podle chuti s okurkovým salátem

$$w_3 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1, 0), \quad w_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 0, 1).$$

Na závěr doplníme, že úlohu lze vyřešit také rychleji. Hledáme prostor řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Každá z těchto tří rovnic vyjadřuje podmínku, že vektor x má být kolmý na jeden z vektorů, pomocí nichž jsme definovali V . Bázi tohoto prostoru pak ortonormalizujeme například výše uvedeným postupem.

Pokud bychom potřebovali pracovat s nějakým obecným skalárním součinem $\langle x, y \rangle = \sum_{i,j} A^{ij} x_i y_j$, stačí ve vztahu 26 vsunout mezi matice na levé straně čtvercovou matici $A = (A^{ij})$. Tato matice (též *Grammova matice*) je ale pro náš skalární součin rovna . .

*MB,ZV

5.2 Grammova–Schmidtova ortogonalizace

Úkol: a) Uvažujme množinu vektorů

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Proveďte s tímto souborem vektorů Gramm–Schmidtův ortogonalizační proces, tzn. najděte takové vektory $\{w_1, w_2, w_3\}$, pro které platí

- $w_i \cdot w_j = \delta_{ij}$, aneb³³ je-li $i \neq j$, pak $w_i \cdot w_j = 0$, jinak pro $i = j$ je $w_i \cdot w_j = 1$
- $\mathcal{L}(\{v_1\}) = \mathcal{L}(\{w_1\})$, $\mathcal{L}(\{v_1, v_2\}) = \mathcal{L}(\{w_1, w_2\})$,
 $\mathcal{L}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \mathcal{L}(\{w_1, w_2, w_3\})$

nebo ještě jinak: máme nalézt takový systém vektorů $\{w_1, w_2, w_3\}$, které mají jednotkovou velikost, jsou navzájem kolmé a každý z vektorů v_i lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů w_j .

³³symbol \cdot značí eukleidovský skalární součin, $a \cdot b = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$, platí $a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos \phi$, kde ϕ úhel mezi vektory a a b

b) Poté co se oprostíte od zápisu vektorů se šípkami a výhradního užívání skalárního součinu „ \cdot “, proveďte totéž pro vektory (položte si otázku: Z jakého vektorového prostoru?)

$$\{f_1, f_2, f_3\} = \{1, x, x^2\},$$

se skalárním součinem zadaným předpisem

$$b(f, g) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx,$$

norma v tomto prostoru je přirozeně $\|h\| = \sqrt{b(h, h)}$.

Řešení: Před vlastním výpočtem by bylo vhodné zjistit, zda jsou zadané vektory lineárně nezávislé. Letmým pohledem se ujistíme, že tomu tak skutečně je. Nyní se budeme věnovat vlastní ortogonalizaci.

Za první vektor ze souboru w_i vezmeme jednoduše správně normovaný vektor v_1 , připomeňme si, že požadujeme, aby velikost vektorů w_i byla rovná jedné. Tedy

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Za druhý vektor zvolíme (podívejte se na obrázek 8, vlevo)

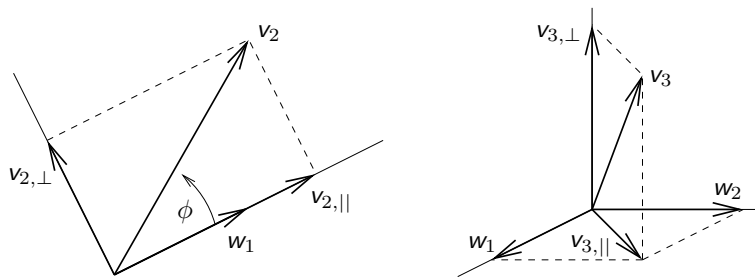
$$w_2 = \frac{v_2 - w_1 (w_1 \cdot v_2)}{\|v_2 - w_1 (w_1 \cdot v_2)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Takto zvolený vektor má skutečně jednotkovou velikost (o tom se snad nedá pochybovat) a navíc je $w_1 \cdot w_2 = 0$, což ověříme jednoduše tak, že oba vektory vynásobíme

$$w_1 \cdot w_2 = \frac{w_1 \cdot v_2 - (w_1 \cdot w_1)(w_1 \cdot v_2)}{\|v_2 - w_1 (w_1 \cdot v_2)\|} = \frac{(w_1 \cdot v_2) - (w_1 \cdot v_2)}{\|v_2 - w_1 (w_1 \cdot v_2)\|} = 0,$$

geometrická interpretace vektoru w_2 je patrná z obrázku. Vektor v_2 jsme si představili jako součet vektoru $v_{2,\perp}$, který je kolmý na vektor w_1 , a vektoru $v_{2,\parallel}$, který je rovnoběžný s vektorem w_1 . Evidentně pak

je $v_{2,\perp} = v_2 - v_{2,\parallel} = v_2 - w_1 (\|v_2\| \cos \phi) = v_2 - w_1 (w_1 \cdot v_2)$. Stačí proto zvolit $w_2 = v_{2,\perp} / \|v_{2,\perp}\|$, čímž jsme ospravedlnili volbu vektoru w_2 . Pro dosažení naprosté dokonalosti bychom měli ověřit, že jsme při dělení normou $\|v_2 - w_1 (w_1 \cdot v_2)\|$ nedělili nulou: stačí si ale vzpomenout, že u vektorů v_1 a v_2 předpokládáme lineární nezávislost. Srovnajte tyto úvahy s příkladem 6.3 o ortogonálních projekcích.



Obrázek 8: Princip Grammovy–Schmidtovy ortogonalizace. Z n -tého vektoru ponecháme pouze složku kolmou na rovinu (lineární obal) prvních $n - 1$ vektorů.

Třetí vektor zvolíme podle obdobné logiky (viz obrázek 8 vpravo)

$$w_3 = \frac{v_3 - w_2 (w_2 \cdot v_3) - w_1 (w_1 \cdot v_3)}{\|v_3 - w_2 (w_2 \cdot v_3) - w_1 (w_1 \cdot v_3)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zde se již nebudeme pouštět do obsáhlého popisu tohoto kroku, který by čtenář jistě dokázal provést sám. Hledaný soubor vektorů je

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Jelikož je V rovno \mathbb{R}^3 , získali jsme tímto způsobem jednu z nekonečně mnoha ortonormálních bází v \mathbb{R}^3 .

Zaměříme se na zobecnění tohoto postupu pro větší počet vektorů. Gram–Schmidtovu ortogonalizační proceduru shrneme takto:

chceme-li z vektorů $\{v_1, \dots, v_n\}$ vytvořit ortonormální soustavu vektorů $\{w_1, \dots, w_n\}$ vůči skalárnímu součinu $b(\cdot, \cdot)$, postupujeme podle receptu

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad \dots, \quad w_i = \frac{v_i - \sum_{j=1}^{i-1} w_j b(w_j, v_i)}{\|v_i - \sum_{j=1}^{i-1} w_j b(w_j, v_i)\|}, \quad \dots$$

Pokud netrváme na normalizaci vektorů w_i (tu lze vždy provést až nakonec), lze tyto vzorce napsat jako

$$w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{b(w_j, v_i)}{\|w_j\|^2} w_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Tyto vzorce také přesně vystihují proceduru popsanou na obrázku 8.

b) Nyní aplikujeme tento přístup na druhou část zadání, tj. na vektory $\{f_1, f_2, f_3\} = \{1, x, x^2\}$. Při výpočtu budeme potřebovat znát pouze skalární součin mezi bázovými vektory $\{1, x, x^2\}$

$$b(x^i, x^j) = \int_{-1}^1 x^{i+j} dx = \begin{cases} 2/(i+j+1) & \text{pro } i+j \text{ sudé,} \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

speciálně $\|x^k\| = \sqrt{b(x^k, x^k)} = 1/\sqrt{k + \frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ g_2 &= \frac{f_2 - g_1 b(g_1, f_2)}{\|f_2 - g_1 b(g_1, f_2)\|} = \frac{x - \frac{1}{2} b(1, x)}{\|x - \frac{1}{2} b(1, x)\|} = \frac{x}{\|x\|} = x\sqrt{\frac{3}{2}} \\ g_3 &= \frac{f_3 - g_2 b(g_2, f_3) - g_1 b(g_1, f_3)}{\|f_3 - g_2 b(g_2, f_3) - g_1 b(g_1, f_3)\|} = \\ &= \frac{x^2 - \frac{3}{2} x b(x, x^2) - \frac{1}{2} b(1, x^2)}{\|x^2 - \frac{3}{2} x b(x, x^2) - \frac{1}{2} b(1, x^2)\|} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\|x^2 - \frac{1}{3}\|} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{b(x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3})}} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{b(x^2, x^2) - 2b(x^2, \frac{1}{3}) + b(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})}} = \sqrt{\frac{5}{8}} (3x^2 - 1),$$

čímž jsme dostali první tři *Legendreovy polynomy*. Obvykle se však Legendreovy polynomy uvádějí v jiném tvaru, ve kterém nejsou normovány na jedničku v normě ale ve vedoucím koeficientu. *VP

5.3 Ortogonální doplněk jednoho řádkového prostoru

Úkol: Necht' A je podprostor generovaný řádky matice $(I_k|P)$ typu $k \times n$, kde I_k je jednotková matice řádu k a P je libovolná matice typu $k \times (n - k)$. Dokažte, že ortogonální doplněk podprostoru A je podprostor generovaný řádky matice $B = (-P^T|I_{n-k})$ typu $(n - k) \times n$. Za skalární součin bereme složkový součin $x \cdot y = \sum_i x_i y_i$

Řešení: Hodnost matice A je k (svědčí jejích prvních k sloupců) a hodnost matice B je $n - k$ (svědčí jejích posledních $n - k$ sloupců). Pokud ukážeme, že A leží v ortogonálním doplňku B , budeme vědět (podle věty o dimenzi ortogonálního doplňku), že A je právě ortogonální doplněk B . Stačí tedy ukázat, že řádky matice A jsou kolmé na řádky matice B , neboli AB^T je nulová matice. Násobení AB^T lze provést názorně, pokud A chápeme jako řádkový vektor o dvou složkách I_k, P a podobně B^T jako sloupcový vektor (rozmyslete si, že takto skutečně dostaneme správný výsledek).

$$AB^T = (I_k, P) \begin{pmatrix} -P \\ I_{n-k} \end{pmatrix} = -I_k P + P I_{n-k} = 0.$$

Tím je důkaz tvrzení příkladu hotov.

*DK

5.4 Různé normy v \mathbb{R}^n

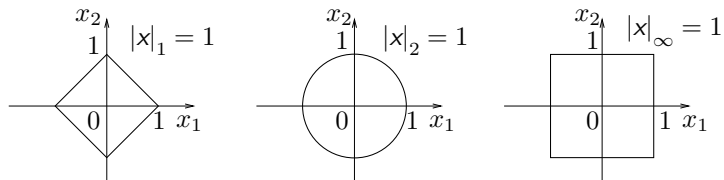
Úkol: Ověřte u následujících zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow (0; \infty)$, že to jsou normy v \mathbb{R}^n :

a) $|x|_\infty = \max_i |x_i|$ (*maximová, kubická norma*)

b) $|x|_1 = \sum_i |x_i|$ (*manhattanská, oktaedrická norma*)

c) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$ (euklidovská, kulová norma)

Které z těchto norem mohou být generovány skalárním součinem?



Obrázek 9: Jednotková kružnice v \mathbb{R}^2 při různých normách.

Řešení: Linearita a nulovost právě pro nulový vektor jsou u všech uvedených norem zřejmé. Zbývá tedy ověřit *trojúhelníkovou nerovnost* pro libovolné dva vektory x a y .

a) $\|x+y\|_\infty = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i (|x_i| + |y_i|) \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

b) $\|x+y\|_1 = \sum_i |x_i + y_i| \leq \sum_i |x_i| + |y_i| = \sum_i |x_i| + \sum_i |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

c) Dokážeme trojúhelníkovou nerovnost umocněnou na druhou. Použijeme přitom *Schwarzovu* či *Cauchyovu* nerovnost, kterou dokážeme za chvíli.

$$\begin{aligned} (\|x+y\|_2)^2 &= \sum_i |x_i + y_i|^2 \leq \sum_i (|x_i|^2 + |y_i|^2 + 2|x_i||y_i|) \stackrel{*}{\leq} \\ &\leq \sum_i (|x_i|^2 + |y_i|^2) + 2\sqrt{(\sum_i |x_i|^2)(\sum_i |y_i|^2)} = \\ &= \left(\sqrt{\sum_i |x_i|^2} + \sqrt{\sum_i |y_i|^2} \right)^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2. \end{aligned}$$

Ověřili jsme tedy, že i euklidovská norma splňuje trojúhelníkovou nerovnost, a podíváme se ještě na Schwarzovu nerovnost.

$$\sum_i 2|x_i||y_i| \stackrel{*}{\leq} 2\sqrt{(\sum_i |x_i|^2)(\sum_i |y_i|^2)}$$

$$(\sum_i |x_i||y_i|)^2 \leq (\sum_i |x_i|^2)(\sum_i |y_i|^2)$$

$$\sum_{i,j} |x_i||x_j||y_i||y_j| \leq \sum_{i,j} |x_i|^2|y_j|^2$$

$$\sum_{i \neq j} |x_i||x_j||y_i||y_j| \leq \sum_{i \neq j} |x_i|^2|y_j|^2$$

$$0 \leq \sum_{i < j} (|x_i|^2|y_j|^2 + |x_j|^2|y_i|^2 - 2|x_i||x_j||y_i||y_j|)$$

$$0 \leq \sum_{i < j} (|x_i||y_j| - |x_j||y_i|)^2.$$

Nyní se obrátíme k otázce, zda pro uvedené normy existuje skalární součin, který je generuje. Euklidovská norma je generována skalárním součinem

$$\langle x|y \rangle_2 = \sum_i x_i y_i, \quad \text{tedy } |x|_2 = \sqrt{\langle x|x \rangle_2}.$$

Ostatní dvě normy pro $n \geq 2$ (pro $n = 1$ splývají s euklidovskou normou) nespĺňují *rovnoběžníkovou rovnost*

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2,$$

a tedy nemohou být generovány skalárním součinem. Tato rovnost je *nutnou* podmínkou pro to, aby bylo možné napsat $|x|^2 = \langle x|x \rangle$: pokud totiž takový skalární součin existuje, lze levou stranu rovnoběžníkové rovnosti rozepsat díky linearitě ($\langle x+y|x+y \rangle = \langle x|x \rangle + \langle x|y \rangle + \langle y|x \rangle + \langle y|y \rangle$) a celá rovnost je pak triviální identita.

Příslušné protipříklady pro normy $|\cdot|_1, |\cdot|_\infty$ jsou následující:

- $x = (0, 1, 0, \dots, 0)$ a $y = (1, 0, 0, \dots, 0)$; pak je $|x+y|_\infty = |x-y|_\infty = |x|_\infty = |y|_\infty = 1$.
- Zvolíme vektory x, y stejně jako v předchozím případě a dostaneme $|x+y|_1 = |x-y|_1 = 2$ a $|x|_1 = |y|_1 = 1$.

*DK

5.5 Normy pro matice

Úkol: Ověřte u následujících zobrazení, že jsou to normy na prostoru matic $n \times n$ s komplexními koeficienty.

$$a) |A|_{\text{row}} = \max_i \sum_j |A_{ij}|$$

$$b) |A|_{\text{col}} = \max_j \sum_i |A_{ij}|$$

$$c) |A|_{\text{spc}} = \max_i \sqrt{\lambda_i}, \text{ kde } \lambda_i \text{ jsou vlastní čísla matice}^{34} A^\dagger A$$

$$d) |A|_{\text{Sch}} = \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij}|^2} \text{ (Schwarzova norma)}$$

U prvních tří norem navíc dokažte, že platí $|AB| \leq |A||B|$.

Řešení: Linearita všech norem je zřejmá, stejně tak jejich nulovost právě pro nulovou matici. Zbývá tedy ověřit trojúhelníkovou nerovnost pro libovolné dvě matice A a B :

$$a) |A+B|_{\text{row}} = \max_i \sum_j |A_{ij} + B_{ij}| \leq \max_i (\sum_j |A_{ij}| + \sum_j |B_{ij}|) \leq \max_i \sum_j |A_{ij}| + \max_i \sum_j |B_{ij}| \leq |A|_{\text{row}} + |B|_{\text{row}}$$

b) Zde lze provést důkaz stejně jako v předchozím bodě. Lze ale také využít následující trik: $|A+B|_{\text{col}} = |(A^T + B^T)^T|_{\text{col}} = |A^T + B^T|_{\text{row}} \leq |A^T|_{\text{row}} + |B^T|_{\text{row}} = |A|_{\text{col}} + |B|_{\text{col}}$.

c) Vlastní čísla matice $A^\dagger A$ jsou nezáporná (a samozřejmě reálná), neboť pro $A^\dagger A v = \lambda v$ platí

$$\lambda(|v|_2)^2 = \lambda \sum_i \bar{v}_i v_i = v^\dagger \lambda v = v^\dagger A^\dagger A v = (|Av|_2)^2 \in \langle 0; \infty \rangle. \quad (27)$$

Nechť w je libovolný vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu matice $(A+B)^\dagger(A+B)$ a $|\cdot|_2$ je euklidovská norma (viz

³⁴ A^\dagger označuje hermitovsly sduženou matici k A , tedy transponovanou matici s komplexně sduženými elementy. V komplexních prostorech je $|v|_2 = \sqrt{\sum_i |v_i|^2}$.

příklad 5.4). Potom platí (u druhé nerovnosti používáme výsledky příkladu 5.6)

$$|A+B|_{\text{spc}}|w|_2 = |(A+B)w|_2 \leq |Aw|_2 + |Bw|_2 \leq (|A|_{\text{spc}} + |B|_{\text{spc}})|w|_2.$$

d) Pro důkaz této trojúhelníkové nerovnosti si stačí matice A a B představit jako n^2 -složkové vektory a a b , definované jako $a_{(i-1)n+j} = A_{ij}$ a $b_{(i-1)n+j} = B_{ij}$. Potom $|A|_{\text{Sch}} = |a|_2$ (viz příklad 5.4), pro B a $A+B$ analogicky a tedy tato trojúhelníková nerovnost (díky výsledkům uvedeného příkladu) platí.

Pro první tři normy jsme měli navíc dokázat další nerovnost. Opět použijeme výsledků příkladu 5.6 a získáváme

$$\begin{aligned} |AB| &= \sup_x \frac{|ABx|}{|x|} = \sup_{x, |Bx| \neq 0} \frac{|ABx|}{|Bx|} \frac{|Bx|}{|x|} \leq \\ &\leq \sup_x \frac{|Ax|}{|x|} \sup_x \frac{|Bx|}{|x|} = |A||B|. \end{aligned}$$

Za maticovou a vektorovou normu je potřeba si dosadit vždy vhodnou dvojici (viz příklad 5.6). V případě, že Bx je nulový vektor pro všechny vektory x , musí být nutně $|B| = 0$ i $|AB| = 0$ a tvrzení příkladu je triviální. *DK

5.6 Jak daleko jsou vektory od matic, aneb Hrušky s jabkama

Úkol: *Dokažte, v označení příkladů 5.4, 5.5 platí*

$$a) |A|_{\text{row}} = \sup_x \frac{|Ax|_{\infty}}{|x|_{\infty}}$$

$$b) |A|_{\text{col}} = \sup_x \frac{|Ax|_1}{|x|_1}$$

$$c) |A|_{\text{spc}} = \sup_x \frac{|Ax|_2}{|x|_2}$$

Dokažte též, že se supremum nabývá.

Řešení: Budeme postupovat pro každou dvojici maticové a vektorové normy zvlášť. Nejprve dokážeme, že maticové normy ze zadání příkladu jsou vždy větší nebo rovny příslušným výrazům, které stojí za znakem suprema.

a)

$$\begin{aligned} \frac{|Ax|_\infty}{|x|_\infty} &= \frac{\max_i |\sum_j A_{ij}x_j|}{\max_i |x_i|} \leq \frac{\max_i \sum_j |A_{ij}||x_j|}{\max_i |x_i|} \leq \\ &\leq \frac{\max_i \sum_j |A_{ij}| (\max_k |x_k|)}{\max_i |x_i|} = \max_i \sum_j |A_{ij}| = |A|_{\text{row}}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{|Ax|_1}{|x|_1} &= \frac{\sum_i |\sum_j A_{ij}x_j|}{\sum_i |x_i|} \leq \frac{\sum_{i,j} |A_{ij}||x_j|}{\sum_i |x_i|} = \\ &= \frac{\sum_j |x_j| (\sum_i |A_{ij}|)}{\sum_i |x_i|} \leq \frac{\sum_j |x_j| (\max_k \sum_i |A_{ik}|)}{\sum_i |x_i|} = \\ &= \frac{(\max_k \sum_i |A_{ik}|) (\sum_j |x_j|)}{\sum_i |x_i|} = \max_k \sum_i |A_{ik}| = |A|_{\text{col}}. \end{aligned}$$

c) Již jsme ukázali, že matice $M = A^\dagger A$ je *pozitivně semidefinitní*, neboli že její vlastní čísla jsou nezáporná (viz rovnici 27). Jelikož je to *hermitovská matice* ($M = M^\dagger$), existuje ortonormální báze \mathbb{R}^n tvořená jejími vlastními vektory (označme je $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$); bez újmy na obecnosti lze předpokládat $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$. Je-li tedy x libovolný vektor, musí platit

$$\begin{aligned} \langle A^\dagger Ax | x \rangle &= \left\langle A^\dagger A \sum_i \langle \mathbf{e}_i | x \rangle \mathbf{e}_i \middle| \sum_j \langle \mathbf{e}_j | x \rangle \mathbf{e}_j \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_i \lambda_i \langle \mathbf{e}_i | x \rangle \mathbf{e}_i \middle| \sum_j \langle \mathbf{e}_j | x \rangle \mathbf{e}_j \right\rangle = \sum_i \lambda_i |\langle \mathbf{e}_i | x \rangle|^2 \leq \\ &\leq \sum_i \lambda_1 |\langle \mathbf{e}_i | x \rangle|^2 = \lambda_1 \langle x | x \rangle. \end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy $|Ax|_2^2 \leq \lambda_1 |x|_2^2 = |A|_{\text{spc}}^2 |x|_2^2$, což je kvadrát dokazované nerovnosti.

Nyní dokažme, že se suprema ve všech případech nabývají:

- Nechť se maximum v maticové normě nabývá v k -tém řádku. Uvažme vektor $w = (|A_{k1}|/A_{k1}, \dots, |A_{kn}|/A_{kn})$. Potom $|w|_\infty = 1$ a $|Aw|_\infty \geq \sum_i |A_{ki}| = |A|_{\text{row}}$.
- Nechť se maximum v maticové normě nabývá v k -tém sloupci. Uvažme vektor w , jehož jedinou nenulovou složkou je jeho k -tá složka a ta má velikost jedna. Potom $|w|_1 = 1$ a $|Aw|_1 = \sum_i |A_{ik}| = |A|_{\text{col}}$.
- Rovnost se nabývá pro libovolný vlastní vektor příslušný k největšímu (v absolutní hodnotě) vlastnímu číslu matice $A^\dagger A$.

Pokud některý ze zlomků v řešení tohoto příkladu nebyl korektně definován (měl nulového jmenovatele), uvažujme místo něj nulu.

*DK

5.7 Lineární regrese tak nebo jinak

Úkol: Určete lineární funkci $\phi(x) = ax + b$, tak aby pro funkci $f(x)$ danou následující tabulkou byla aproximací metodou nejmenších čtverců.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-2	0	2	4	6	8
$f(x_i)$	2	1	3	5	4	6

Řešení: Řešení této úlohy nalezneme třemi různými postupy. Nejprve budeme danou lineární funkci hledat jako kolmou projekci do podprostoru všech lineárních funkcí, druhý postup bude založen na hledání minima funkce více proměnných. Poslední postup využije pseudoinverze matice a je proto zařazen jako samostatný příklad 18.4.

První způsob: Připomeňme si nejprve, co myslíme aproximací dané funkce metodou nejmenších čtverců. Ve zvolené třídě funkcí (v našem

případě lineární funkce) hledáme takovou funkci ϕ , aby byl výraz

$$D(\phi) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=0}^n w_i (f(x_i) - \phi(x_i))^2$$

minimální. $w_i > 0$ jsou pevně zadaná čísla a značí váhu daného bodu (v našem případě má každý bod váhu rovnou jedné). Nyní se již můžeme pustit do řešení.

Jak bylo řečeno, první postup využije vlastností kolmé projekce. K tomu abychom vůbec mohli mluvit o kolmosti potřebujeme zavést skalární součin. Nuže, skalární součin dvou funkcí u, v (definovaných v bodech x_i) definujeme jako

$$\langle u|v \rangle \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=0}^n w_i u(x_i)v(x_i). \quad (28)$$

Uvědomme si, že funkce na bodech $\{x_i\}_{i=0}^n$ není nic jiného než obyčejný vektor z \mathbb{R}^{n+1} . Povšimněme si toho, jak vypadá norma, resp. definice vzdálenosti s použitím tohoto skalárního součinu

$$\|u\| = \sqrt{\langle u|u \rangle} = \sqrt{\sum_{i=0}^n w_i u(x_i)^2},$$

$$\|u - v\| = \sqrt{\langle u - v|u - v \rangle} = \sqrt{\sum_{i=0}^n w_i (u(x_i) - v(x_i))^2}$$

Označme ještě

$$L = \mathcal{L}\{1, x\} = \{a(1, \dots, 1) + b(x_0, \dots, x_n), a, b \in \mathbb{R}\}$$

lineární obal funkcí příslušné množiny. V L leží všechny možné lineární funkce (definované na bodech x_i). Zbývá ocitovat následující větu:

V je prostor se skalárním součinem, L je jeho podprostor. Je-li $f \in V$, pak $\phi \in L$ je nejlepší aproximací f v L (tzn. $\|f - \phi\| \leq \|f - m\|$, $\forall m \in L$), právě když $\forall m \in L$ platí $\langle f - \phi|m \rangle = 0$.

Jinak řečeno: nejlepší aproximaci funkce f lineární funkcí (ve smyslu vzdálenosti, která pro náš skalární součin odpovídá součtu

čtverců $f(x_i) - \phi(x_i)$ získáme tak, že promítneme (kolmo) f do L . Kolmou projekci, označujme ji ϕ , najdeme užitím podmínky $\langle f - \phi | m \rangle = 0$, která má platit pro všechny funkce v L . Splníme-li danou podmínku na vektorech báze L , bude pak automaticky splněna pro každou funkci z L . Musí tedy platit:

$$\langle f - \phi | 1 \rangle = 0, \quad \langle f - \phi | x \rangle = 0.$$

Hledaná funkce ϕ leží v L , proto ji lze napsat jako kombinaci bázových vektorů. Předchozí podmínky mají tvar

$$\begin{aligned} \langle f - (ax + b) | x \rangle &= \langle f | x \rangle - a \langle x | x \rangle - b \langle 1 | x \rangle = 0 \\ \langle f - (ax + b) | 1 \rangle &= \langle f | 1 \rangle - a \langle x | 1 \rangle - b \langle 1 | 1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Dosažením definice skalárního součinu 28 dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n f(x_i) x_i - a \sum_{i=0}^n x_i^2 - b \sum_{i=0}^n x_i &= 0 \\ \sum_{i=0}^n f(x_i) - a \sum_{i=0}^n x_i - b \sum_{i=0}^n 1 &= 0, \end{aligned}$$

neboli v maticovém zápisu

$$\begin{pmatrix} (n+1)\langle x^2 \rangle & (n+1)\langle x \rangle \\ (n+1)\langle x \rangle & (n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n+1)\langle xf(x) \rangle \\ (n+1)\langle f(x) \rangle \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle x \rangle \\ \langle x \rangle & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle xf(x) \rangle \\ \langle f(x) \rangle \end{pmatrix}.$$

Pro zkrácení jsme označili průměry různých veličin

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i^2,$$

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(x_i), \quad \langle xf(x) \rangle = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i f(x_i).$$

Tuto soustavu rovnic vyřešíme např. užitím *Cramerova pravidla* a výsledkem je:

$$a = \frac{\langle f(x) \rangle \langle x \rangle - \langle xf(x) \rangle}{\langle x \rangle^2 - \langle x^2 \rangle}, \quad b = \frac{\langle xf(x) \rangle \langle x \rangle - \langle f(x) \rangle \langle x^2 \rangle}{\langle x \rangle^2 - \langle x^2 \rangle}.$$

V našem případě je $\sum_{i=0}^n f(x_i) = 21$, $\sum_{i=0}^n f(x_i)x_i = 94$, $\sum_{i=0}^n x_i = 18$, $\sum_{i=0}^n x_i^2 = 124$ a $n+1 = 6$. Po dosazení do právě odvozených vzorců nalézáme $a \doteq 0,44$ a $b \doteq 2,17$.

Druhý způsob: Další způsob řešení využívá metod analýzy funkce více proměnných. Dívejme se na výraz, který chceme minimalizovat, jako na funkci v proměnných a a b . Tedy

$$F(a, b) = \sum_{i=0}^n w_i (f(x_i) - (ax_i + b))^2.$$

Najdeme body, ve kterých může funkce $F(a, b)$ nabývat extrému. Tyto body jsou řešením rovnic:

$$\frac{\partial F(a, b)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F(a, b)}{\partial b} = 0.$$

V našem případě ($w_i = 1$) jsou tyto rovnice

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i=0}^n (f(x_i) - (ax_i + b)) x_i &= 0 \\ -2 \sum_{i=0}^n (f(x_i) - (ax_i + b)) &= 0, \end{aligned}$$

což je po rozepsání a převedení do maticového tvaru opět

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n f(x_i)x_i \\ \sum_{i=0}^n f(x_i) \end{pmatrix}$$

Vidíme, že jsme dospěli k stejné maticové úloze jako v předchozím případě. Abychom dosáhli naprosté matematické preciznosti, je třeba ověřit, že právě nalezený stacionární bod je skutečně minimem. Musíme proto ukázat, že kvadratická forma druhého diferenciálu je pozitivně definitní. Máme

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(a, b)}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 F(a, b)}{\partial b \partial a} \\ \frac{\partial^2 F(a, b)}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 F(a, b)}{\partial b^2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & n+1 \end{pmatrix}.$$

Vzpomeneme si na větu pánů *Jacobiho a Sylvestra* ...

Reálná kvadratická forma s maticí A je pozitivně definitní, právě když jsou všechny hlavní subdeterminanty matice A kladné.

... a zkontrolujeme, že pokud neuvažujeme degenerované případy, jako prokládání přímky jediným bodem, pak jest $\sum_{i=0}^n x_i^2 > 0$ a $(n+1) \sum_{i=0}^n x_i^2 - (\sum_{i=0}^n x_i)^2 > 0$ (podle další vzpomínky, tentokrát ovšem na *nerovnost pana Höldera*).

Srovnajte oba postupy a uvědomte si, že druhý postup je ve obecnější, aplikovatelný i pro aproximace v nelineárních prostorech funkcí. *VP

6 Matice a jim podobné

6.1 Pauliho spinové matice

Úkol: Kdo z Vás přiřadí Pauliho maticím nejvíce přívlastků³⁵? Jde o tyto matice:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

- Jsou regulární, hermitovské (samoadjungované), unitární, idempotentní?
- Je jejich součin komutativní? Spočítejte jejich komutátory a antikomutátory.
- Ověřte jejich vzájemnou podobnost.
- Přes jaké matice jsou si podobné?

Dále spočtěte

- jejich vlastní čísla,
- vlastní vektory a
- determinanty,
- exponenciály z $i\varphi\sigma_{x,y,z}$
- a determinanty exponenciál.
- Další fantazii se meze nekladou.

Řešení:

a) Ano (suverénně). Lineární nezávislost řádků, z níž regularita plyne, je nasnadě. Stejně tak s hermitovou ($A = A^\dagger \stackrel{\text{df}}{=} \overline{A^T}$) a s unitaritou ($AA^\dagger = I$, $A^\dagger A = I$; druhá relace plyne v konečné dimenzi z první relace).

³⁵Gramatická pozn.: tzn. slov, která je charakterizují (např.: bílý, tvůj, první). Doporučení: Nejdříve se snažte přijít na co možná nejvíce vlastností Pauliho matic sami, a teprve poté, až Vám dojde fantazie, se začtěte do následujících řádků.

Mimochodem — kterákoliv z posledních dvou podmínek zaručuje, že se jedná o matice *normální* (A je normální, pokud $AA^\dagger = A^\dagger A$). Naopak z toho, že poslední dvě podmínky platí současně, plyne *idempotence*, neboli že jsou to samy sobě inverzní matice ($A^2 = .$).

b) Antikomutativní. $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = -\sigma_2 \cdot \sigma_1 = i \cdot \sigma_3$; $-\sigma_1 \cdot \sigma_3 = \sigma_3 \cdot \sigma_1 = i \cdot \sigma_2$; $\sigma_2 \cdot \sigma_3 = -\sigma_3 \cdot \sigma_2 = i \cdot \sigma_1$. Těchto šest relací spolu s $\sigma_j^2 = .$ se obvykle shrnuje do jednoho vzorečku

$$\sigma_j \sigma_k = i \varepsilon_{jkl} \sigma_l + \delta_{jk} . \quad (30)$$

V něm používáme *Einsteinovu sumační konvenci*, tedy na pravé straně sčítáme přes opakující se index ($\sum_{l=1}^3$). *Kroneckerův symbol* δ_{jk} je roven jedné pro $j = k$ a jinak nule. Symbol ε_{jkl} (*Levi-Civittův symbol*) má hodnoty $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1$, $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$ a $\varepsilon_{jkl} = 0$ jinak (tj. když jsou některé z indexů stejné); je to tedy veličina *totálně antisymetrická* (při záměně libovolných dvou indexů mění znaménko).

Z relace 30 snadno odvodíme vzorce pro *komutátory* $[A, B] = AB - BA$ a *antikomutátory* $\{A, B\} = AB + BA$. Stačí vzít na vědomí, že $\varepsilon_{jkl} - \varepsilon_{kjl} = 2\varepsilon_{jkl}$ a $\varepsilon_{jkl} + \varepsilon_{kjl} = 0$.

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{jkl} \sigma_l, \quad \{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk} . \quad (31)$$

c, d) Podobnostní vztahy jsou třeba

$$(\sigma_1 + \sigma_2)\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2)^{-1} = \sigma_1 ,$$

další dva získáme cyklickou záměnou indexů. Inverzní prvek k $\sigma_1 + \sigma_2$ je $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$; to ověříme nejjednodušeji pomocí antikomutačních relací a idempotence:

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 + \sigma_2^2 = . + \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_2 + . = 2 .$$

Stejně můžeme zkontrolovat i podobnostní relaci.

Matic, které zprostředkovávají podobnostní relaci, je samozřejmě nekonečně mnoho.

e) Ze $\sigma_i^2 = .$ plyne, že vlastní čísla mohou být pouze 1 či -1 . Kdyby byla obě dvě rovna 1, resp. -1 , musela by příslušná matice

být σ_1 , resp. $-\sigma_1$. Jelikož tomu tak není, musí být vlastní čísla každé Pauliho matice 1 a -1 . Varianta, že by matice měla jediné vlastní číslo a nebyla diagonalizovatelná (viz kapitolu o Jordanově tvaru), nemůže pro hermitovské matice nastat.

Lze to samozřejmě ověřit i standardním postupem: určíme *charakteristické polynomy* $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ a zjistíme, že jsou u všech Pauliho matic totožné, totiž $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 1$.

f) Pro každou matici získáme její vlastní vektory řešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých s použitím vlastních čísel. Vyjde nám například

$$\sigma_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \sigma_3 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

první vektor přísluší vždy vlastnímu číslu 1, druhý -1 . Každý nenulový násobek vlastního vektoru je samozřejmě také vlastním vektorem dané matice.

g) $\det \sigma_{x,y,z} = -1$. Determinant je také součin vlastních čísel, takže už ani nemusíme nic počítat.

h) Nejprve určíme $\exp(i\varphi\sigma_3)$. Exponenciála matice je definována pomocí mocninné řady. Mocniny diagonální matice se počítají obzvláště snadno: stačí jen umocňovat jednotlivé elementy na diagonále. Velmi snadno se dopracujeme k výsledku

$$\begin{aligned} \exp(i\varphi\sigma_3) &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{n!}(i\varphi)^n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n!}(-i\varphi)^n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = \cos \varphi + i \sin \varphi \sigma_3. \end{aligned}$$

S maticemi $\sigma_{1,2}$ budeme mít trochu více práce. Důležitý postřeh na úvod je

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V mocninné řadě, kterou je definovaná exponenciála, budou tedy sudé mocniny přispívat (pouze) do diagonálních členů (a_{11} , a_{22})

a liché zase (pouze) do nediagonálních členů (a_{12}, a_{21}) . Postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi\sigma_1)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n}}{(2n)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \varphi^{2n} & i \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1} \\ i \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1} & \frac{(-1)^n}{(2n)!} \varphi^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & i \sin \varphi \\ i \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Estetičtěji lze tento výsledek zapsat jako

$$\exp(i\varphi\sigma_1) = \cos \varphi + i\sigma_1 \sin \varphi.$$

Stejným trikem (sudé mocniny přispívají na diagonálu, liché mocniny mimo diagonálu) spočítáme podobný vztah jako před chvílí (plyne to taky z podobnosti těchto matic σ_3 a σ_1)

$$\exp(i\varphi\sigma_2) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \cos \varphi + i\sigma_2 \sin \varphi.$$

Všimněte si, že matice $\exp(i\varphi\sigma_j)$ jsou unitární. To je zaručeno již tím, že $\varphi\sigma_j$ jsou hermitovské. Toto tvrzení je analogií věty $z = \bar{z} \Rightarrow |e^{iz}| = 1$, která platí pro komplexní čísla.

i) $\det \exp \sigma_{1,2,3} = \exp \operatorname{Tr} \sigma_{1,2,3} = 1$. Determinanty exponenciál lze ale spočítat samozřejmě i přímo.

j) Tyto tři matice spolu s jednotkovou maticí tvoří nad \mathbb{R} bázi prostoru všech hermitovských matic 2×2 , který je tudíž izomorfní \mathbb{R}^4 . Nad \mathbb{C} to je báze prostoru všech matic 2×2 s komplexními elementy. Ten je samozřejmě izomorfní \mathbb{C}^4 .

Operátor spinu elektronu v kvantové mechanice je $\hat{S} = \frac{1}{2}\hbar(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, kde \hbar je *Planckova konstanta*. Operátory v kvantové mechanice nejsou nic jiného než lineární zobrazení na určitém prostoru. Prostorem, na kterém se pohybujeme v tomto případě, jsou stavy jednoho (volného) elektronu, nezajímáme-li se o jeho pohyb, ale pouze o jeho spin. Je to prostor dvourozměrný, a uvedené Pauliho matice popisují operátor spinu, pokud si v tomto prostoru zvolíme bázi $|\uparrow\rangle \equiv (1, 0)^T$, $|\downarrow\rangle \equiv (0, 1)^T$. První vektor označuje stav, kdy při měření průmětu spinu elektronu s jistotou naměříme $\frac{1}{2}\hbar$, druhý vektor odpovídá stavu s průmětem spinu $-\frac{1}{2}\hbar$.

Je-li elektron ve stavu $v \equiv |\psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ normovaném na jedničku (tedy $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$), pak

$$\langle \widehat{S} \rangle_\psi = \langle \psi | \widehat{S} | \psi \rangle = \frac{1}{2} \hbar (v^T \sigma_1 v, v^T \sigma_2 v, v^T \sigma_3 v)$$

udává hodnoty průmětu spinu do směrů souřadných os, které získáme v průměru při mnoha měřeních. *AK,ZJ

6.2 Matice homomorfizmu

Úkol: Je zadán homomorfizmus $F : V \rightarrow V$, $V = \mathcal{L}\{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$, $F : f \mapsto 2f' + f''$. Najděte jeho matici vzhledem k bázi

a) $A = \{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$ (matice F_A)

b) $B = \{\sin x + \cos x, \sin x - \cos x, \sin 2x + \cos 2x, \sin 2x - \cos 2x\}$ (matice F_B).

Jaká je dimenze obrazu F ? Existuje nějaký invariantní podprostor V vzhledem k F ?

Řešení: Na úvod dokažme, že v A jsou *lineárně nezávislé* funkce. Předpokládejme, že existují čísla $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, pro která je

$$\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma \sin 2x + \delta \cos 2x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pokud do této rovnice dosadíme jednou $x = 0$ a podruhé $x = \pi$, dostaneme podmínky $\beta + \delta = 0$ a $\beta - \delta = 0$, tedy $\beta = \delta = 0$. Pro $x = \frac{1}{2}\pi$ a $x = \frac{3}{2}\pi$ dostaneme podobně $\alpha = \gamma = 0$. Funkce jsou tedy nezávislé už jen kdybychom je uvažovali na množině $\{0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$, natož pak na celém \mathbb{R} .

a) Ze zadání homomorfizmu plynou vztahy:

$$\begin{aligned} F(\sin x) &= 2 \cos x - \sin x, & F(\cos x) &= -2 \sin x - \cos x, \\ F(\sin 2x) &= 4 \cos 2x - 4 \sin 2x, & F(\cos 2x) &= -4 \sin 2x - 4 \cos 2x. \end{aligned} \tag{32}$$

V bázi A znamená například první vztah $F : (1, 0, 0, 0) \mapsto (-1, 2, 0, 0)$, podobně můžeme zapsat i ostatní vztahy. Matice F_A má tedy (násobením zleva) ze sloupce $(1, 0, 0, 0)$ učinit sloupec

$(-1, 2, 0, 0)$. To je možné jen tehdy, pokud v prvním sloupci matice F_A bude právě $(-1, 2, 0, 0)$. Když probereme ostatní vektory báze, dostaneme takto celou matici.

Pravidlo tedy zní: koeficienty ze vztahů 32 zapsat do sloupců matice F_A .

$$F_A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Hodnost této matice je čtyři, zobrazení F má tedy plnou dimenzi, a je tudíž *izomorfizmem* (tato implikace platí samozřejmě pouze pro lineární zobrazení).

Matice má *blokově diagonální tvar* a to znamená, že při působení na lineární kombinaci $\sin x$ a $\cos x$ obdržíme opět lineární kombinaci těchto vektorů. Říkáme, že podprostor $\mathcal{L}(\{\sin x, \cos x\})$ je *invariantní* vůči zobrazení F . Podobně toto platí pro vektory $\sin 2x$ a $\cos 2x$. Pro toto zobrazení lze tedy zapsat prostor V jako *direktní součet* invariantních podprostorů

$$V = \mathcal{L}(\{\sin x, \cos x\}) \oplus \mathcal{L}(\{\sin 2x, \cos 2x\}).$$

Zobrazení F tedy pracuje na každém z těchto dvou podprostorů nezávisle.

b) Zde můžeme postupovat stejně a vyjádřit si $F(f_i)$ jako lineární kombinace prvků báze f_i : $f_1 = \sin x + \cos x$, $f_2 = \sin x - \cos x$, ...

$$\begin{aligned} F(f_1) &= \cos x - 3 \sin x = -f_1 - 2f_2 \\ F(f_2) &= \sin x + 3 \cos x = 2f_1 - f_2 \\ F(f_3) &= -8 \sin 2x = -4f_3 - 4f_4 \\ F(f_4) &= 8 \cos 2x = 4f_3 - 4f_4 \end{aligned}$$

Takže matice homomorfizmu F vůči bázi B je

$$F_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Matice je opět blokově diagonální. Existují ale i báze, kde tomu tak není. Například báze, jejichž některé vektory obsahují zároveň $\sin x$ i $\sin 2x$.

Druhá metoda, jak vypočítat matici F_B , je najít *matici přechodu* od báze A k bázi B , tedy matici C , pro niž

$$\begin{aligned} (\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x) \cdot C &= \\ &= (\sin x + \cos x, \sin x - \cos x, \sin 2x + \cos 2x, \sin 2x - \cos 2x). \end{aligned} \tag{33}$$

Potom musí pro matici B platit

$$F_B = C^{-1} \cdot F_A \cdot C.$$

Všimněte si, že zatímco matice C převádí bázové funkce A na bázové funkce B (psané do *řádků*), složky nějaké funkce vzhledem k bázi A (psané do *sloupců*) se na složky téže funkce vzhledem k bázi B převádějí pomocí matice C^{-1} .

Matici C určíme vytrvalým pohledem na rovnici 33. Pro výpočet matice C^{-1} je vhodné si uvědomit vztahy

$$\begin{aligned} 2 \sin x &= f_1 + f_2, \quad 2 \sin 2x = f_3 + f_4 \\ 2 \cos x &= f_1 - f_2, \quad 2 \cos 2x = f_3 - f_4. \end{aligned}$$

Výsledkem je

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

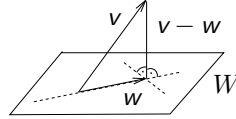
*JK

6.3 Ortogonální projektory na podprostor

Ortogonální projekce z V do $W \subset V$ je zobrazení, které $v \in V$ přiřadí $w = Pv$ tak, že $v - w$ je kolmý na podprostor W , viz obrázek. Lze jednoduše ukázat, že Pv je mezi vektory z W nejlepší aproximace vektoru $v \in V$, tedy $\|v - x\|$, $x \in W$ nabývá minima pro $x = Pv$.

Úkol: Najděte matice zobrazení, které $v \in \mathbb{R}^4$ přiřadí ortogonální projekci v na následující zadané podprostory (matice určete vzhledem ke kanonické bázi):

- a) $W_1 = \mathcal{L}((1, -2, 0, 2)),$
 b) $W_2 = \mathcal{L}(\{(1, 1, -1, -1), (1, 0, -1, 0)\}),$
 c) $W_3 = \mathcal{L}(\{(1, -1, 1, -1), (1, 1, 1, 1)\}).$



d) *Ověřte, že všechny tyto matice jsou symetrické a idempotentní ($A^2 = A$), a vysvětlete, proč tomu tak musí být u všech ortogonálních projektorů.*

Obrázek 10: Ortogonální projekce vektoru z \mathbb{R}^3 do \mathbb{R}^2 .

Za skalární součin berte složkový součin $x \cdot y = \sum_i x_i y_i$.

Řešení:

a) Je třeba si uvědomit, že skalární součin libovolného vektoru v s libovolným jednotkovým vektorem j je velikost (ortogonálního) průmětu vektoru v do směru daného vektorem j (do podprostoru $\mathcal{L}(j)$). Navíc víme, že promítnutý vektor leží ve zvoleném podprostoru, takže vektor p vzniklý projekcí je

$$p = (v \cdot j)j$$

Z libovolného vektoru vytvoříme jednotkový vektor tím, že jej vydělíme jeho velikostí (normou). Zobrazení f , které vektoru v přiřadí jeho projekci do směru daného obecným vektorem s , má proto předpis

$$f(v) = \frac{1}{\|s\|^2} (v \cdot s) s$$

Nyní můžeme s využitím vzorečku pro skalární součin vyjádřit i -tou složku $f(v)$:

$$[f(v)]_i = \frac{1}{\|s\|^2} s_i \sum_{j=1}^4 s_j v_j$$

To lehce upravíme do tvaru

$$[f(v)]_i = \sum_{j=1}^4 \left(\frac{1}{\|s\|^2} s_i s_j \right) v_j$$

Lineární zobrazení lze napsat ve tvaru součinu matice (které říkáme *matice zobrazení*) a vektoru, na který toto zobrazení působí. Tvar,

do kterého jsme převedli naše zobrazení, přesně odpovídá maticovému násobení. Když si rozmyslíme, co která část výrazu znamená, zjistíme, že matice zobrazení A je

$$A_{ij} \equiv (f)_{ij} = \frac{1}{\|s\|^2} s_i s_j, \quad A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Využijeme tvrzení (viz příklad 4.8), že pokud je u_1, \dots, u_n ortonormální báze, pak lze složky libovolného vektoru w vůči této bázi psát jako $w_i = u_i \cdot w / \|u_i\|^2$. Je proto nejprve potřeba najít ve $W_2 = \mathcal{L}(\{u_1, u_2\})$ nějakou ortonormální bázi $\{o_1, o_2\}$. Projekce na prostor $\mathcal{L}(\{o_1, o_2\})$ je potom dána součtem projekcí na $L(o_1)$ a $L(o_2)$. To samé pak platí i pro jejich matice.

Ortonormální bázi najdeme například Gramm–Schmidtovou ortonormalizací:

$$o_1 = u_1 = (1, 1, -1, -1), \quad u_2 = (1, 0, -1, 0)$$

Vektor o_2 , pak hledáme ve tvaru

$$o_2 = o_1 + \alpha u_2,$$

přičemž o_1 a o_2 na sebe musí být kolmé, tedy jejich skalární součin musí být nulový. Z $0 = u_1 \cdot u_1 + \alpha u_1 \cdot u_2$ lehce spočítáme $\alpha = -2$, neboli

$$o_2 = (-1, 1, 1, -1).$$

Matice projekce na prvky báze jsou

$$P_{o_1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{o_2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice B je součtem P_{o_1} a P_{o_2} :

$$B = B_{o_1} + B_{o_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Tady odpadá práce s hledáním ortogonální báze, protože zadané vektory (u_3 a u_4) už jsou na sebe kolmé. Najdeme tedy matice projekcí na tyto vektory:

$$P_{u_3} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{u_4} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledná matice projekce na celý podprostor je opět součtem těchto matic:

$$P = P_{u_3} + P_{u_4} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tuto úlohu šlo řešit ještě jinak; ale jen pokud si všimneme, že $W_2 \cup W_3 = \mathbb{R}^4$ a $W_2 \perp W_3$ (všechny zadané vektory jsou lineárně nezávislé). Ortogonální projekcí vektoru na celý prostor získáme původní vektor. Půjde tedy o identické zobrazení. Díky tomu můžeme projekci na prostor $\mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ napsat jako součet projekcí na prostory $W_2 = \mathcal{L}(u_1, u_2)$ a $W_3 = \mathcal{L}(u_3, u_4)$. Maticově řečeno

$$B + C = .$$

a to nám skutečně vyšlo. Takže matici C jsme mohli dopočítat podle $C = . - B$.

d) Symetrii matic A, B, C vidíme přímo a ověření idempotence ponecháme čtenářům, kteří rádi násobí matice (třeba na počítači). Jelikož $f(v) \in W$, $v \in V$, pro obecný projektor musí platit $f[f(v)] = f(v)$, neboli $f^2 = f$ — ve smyslu tvrzení za definicí v úvodu příkladu (o $f(v) \in W$) už není co aproximovat.

V obecném případě dokážeme také symetrii ($f^T = f$): necht v, u jsou libovolné vektory z V , které rozložíme na jejich ortogonální projekci do W a zbytek: $v = f(v) + v_\perp$ a $u = f(u) + u_\perp$. Víme, že zcela obecně platí $v \cdot f(u) = f^T(v) \cdot u$, a chceme tedy dokázat $v \cdot f(u) = f(v) \cdot u$. To nám nedá mnoho práce, pokud budeme mít na paměti, že $f(v) \cdot u_\perp = 0$, $f(u) \cdot v_\perp = 0$:

$$v \cdot f(u) = [f(v) + v_\perp] \cdot f(u) = f(v) \cdot f(u),$$

$$f(v) \cdot u = f(v) \cdot [f(u) + u_{\perp}] = f(v) \cdot f(u).$$

Jiný způsob: Zůstaneme u projekce na jednorozměrné prostory, rozšíření na větší prostory je ale přímočaré. Použijeme vyjádření projekce, které jsme odvodili v bodě a) a položíme pro jednoduchost $\|s\| = 1$.

$$f(v) = (v \cdot s) s$$

Nejprve dokážeme idempotenci zobrazení f . Spočtěme si, čemu se rovná

$$f[f(v)] = f[(v \cdot s) s] = \{[(v \cdot s) s] \cdot s\} s,$$

což je po úpravě

$$(s \cdot s) (v \cdot s) s = (v \cdot s) s = f(v),$$

čímž byla dokázána idempotence. Dále máme dokázat, že zobrazení f je symetrické, tzn. že platí $f = f^T$. Transponované zobrazení k zobrazení f je takové zobrazení, které pro každé u a v splňuje rovnost:

$$f(u) \cdot v = u \cdot f^T(v)$$

Začneme tedy upravovat levou stranu tak, abychom dostali skalární součin u s nějakým vektorem. Jest

$$f(u) \cdot v = ((u \cdot s) s) \cdot v = (u \cdot s)(s \cdot v) = u \cdot ((v \cdot s) s) = u \cdot f(v),$$

nelze proto jinak, než že $f = f^T$.

*JK,KV

6.4 Matice vektorového součinu

Úmluva: Zápisem $(x_1, x_2, x_3)_B$ myslíme složky určitého vektoru vzhledem k bázi B .

Úkol: Mějme pevně zadaný vektor $v \in \mathbb{R}^3$ a uvažujme zobrazení $\varphi : x \mapsto v \times x$.

1. Ukažte, že se jedná o lineární zobrazení, pokud vektorový součin definujeme předpisem

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (34)$$

- Najděte jeho matici vzhledem ke kanonické bázi ($K = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$) a pomocí této matice spočítejte $\varphi(y)$ pro vektor zadaný ve složkách v kanonické bázi $y = (1, 1, 0)_K$.
- Nalezněte matici zobrazení φ vzhledem k bázi $B = \{b_1, b_2, b_3\} = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ a spočítejte pomocí ní opět $\varphi(y)$.

Řešení:

1. Platí $\varphi(\lambda x) = (\lambda v_2 x_3 - \lambda v_3 x_2, \lambda v_3 x_1 - \lambda v_1 x_3, \lambda v_1 x_2 - \lambda v_2 x_1) = \lambda \varphi(x)$ a podobně se ukáže $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

2. Chceme aby platilo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_K = \begin{pmatrix} v_2 x_3 - v_3 x_2 \\ v_3 x_1 - v_1 x_3 \\ v_1 x_2 - v_2 x_1 \end{pmatrix}_K. \quad (35)$$

To je rovnost dvou sloupcových vektorů; aby byl splněn její první řádek (pro každé x_1, x_2, x_3), musí být $a_{11} = 0$, $a_{12} = -v_3$, $a_{13} = v_2$. Ze druhého a třetího řádku pak určíme zbylé elementy matice:

$$A_K = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Dosazením do vztahu (35) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ dostaneme $\varphi(x) = (-v_3, v_3, -v_2 + v_1)_K$.

3. **První způsob:** napíšeme rovnici odpovídající vztahu (35), tentokrát ale v bázi B . Sloupcový vektor vlevo i vpravo potřebujeme vyjádřit v této bázi. Budiž tedy $x = (b_1, b_2, b_3)_B$. Na pravou stranu potřebujeme vypočítat $\varphi(x)$ a hodnotu $\varphi(x)$ umíme počítat jen v kanonické bázi. Vidíme ale přímo, že $x = b_1 b_1 + b_2 b_2 + b_3 b_3 = (b_1 + b_2, b_1 - b_2, b_3)_K$, tedy (viz definiční vztah 34)

$$\varphi(x) = (v_2 b_3 - v_3(b_1 - b_2), v_3(b_1 + b_2) - v_1 b_3, v_1(b_1 - b_2) - v_2(b_1 + b_2))_K.$$

Tento výsledek je nutné ještě převést do báze B . Platí $(y_1, y_2, y_3)_K = (\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_1 - y_2), y_3)_B$ (to je vidět díky jednoduchosti báze B ,

$e_1 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)$, $e_2 = \frac{1}{2}(b_1 - b_2)$, $e_3 = b_3$; ve složitějších případech bychom museli řešit soustavu rovnic, a tudíž

$$\varphi(x) = \left(\frac{1}{2}(v_2 - v_1)b_3 + v_3b_2, -v_3b_1 + \frac{1}{2}(v_1 + v_2)b_3, b_1(v_1 - v_2) - b_2(v_1 + v_2) \right)_B$$

Analogie vztahu (35) je tedy

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & v_3 & \frac{1}{2}(v_2 - v_1) \\ -v_3 & 0 & \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \\ v_1 - v_2 & -v_1 - v_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_B &= \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(v_2 - v_1)b_3 + v_3b_2 \\ -v_3b_1 + \frac{1}{2}(v_1 + v_2)b_3 \\ b_1(v_1 - v_2) - b_2(v_1 + v_2) \end{pmatrix}_B, \end{aligned}$$

matice vlevo je hledaná matice φ vzhledem k bázi B . Tato matice má podobný tvar, jako matice v bodě 2. Odchylka (matice nyní není antisymetrická) je způsobena tím, že jsme provedli neortonormální transformaci báze. Čísla v_1, v_2, v_3 v matici jsou složky v samozřejmě stále v kanonické bázi.

Pro vektor $x = (1, 0, 0)_B$ dostaneme $\varphi(x) = (0, -v_3, v_1 - v_2)_B$, což je totéž jako $(-v_3, v_3, v_1 - v_2)_K$, jak nám také mělo vyjít.

Druhý způsob: Použijeme vztahy pro transformaci matice lineárního zobrazení při změně báze. *Matice přechodu* S od báze K k bázi B je

$$(b_1, b_2, b_3) = (e_1, e_2, e_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_S,$$

čili jsme psali (kanonické) složky vektoru b_i do i -tého sloupce matice S (skutečně, například $b_1 = (1, 1, 0) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$). Matice S také transformuje složky obecného vektoru x vzhledem k bázi B zapsané do sloupcového vektoru na složky vzhledem ke kanonické bázi (to se opět jednoduše zkontroluje: je-li $x = (1, 0, 0)_B = b_1$, pak $S(1, 0, 0)^T = (1, 1, 0)^T$, což je skutečně b_1 v kanonické bázi).

Matice zobrazení φ v bázi B pak bude $A_B = S^{-1}A_K S$: pokud násobíme zleva maticí A_B sloupcový vektor složek zobrazovaného

vektoru vzhledem k bázi B , matice S nejprve tyto složky „přeloží“ do kanonických složek. Matice A_K provede zobrazení (v kanonických složkách) a na závěr S^{-1} „přeloží“ výsledek zpět do složek v bázi B . *KV

6.5 Výpočet inverzní matice

Úkol: Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Určete matici A^{-1} inverzní k A .

Řešení:

1. Můžeme provést například poněkud rozšířenou *Gaussovu eliminaci* (viz také příklad 4.9). Vedle A napíšeme jednotkovou matici a upravujeme vzniklou matici 3×6 řádkovými úpravami na tvar, kdy je vlevo jednotková matice 3×3 . Zbytek matice je potom A^{-1} .

Metoda vychází z toho, že pokud z $(A|I)$ vytvoříme řádkovými úpravami matici $(B|C)$, pak platí $CA = B$. Vyzkoušejte si to nejprve na matici v druhém řádku a uvědomíte si, že řádkové úpravy matice A lze simulovat násobením A zleva vhodnou maticí. Když potom v matici $(B|C)$, která splňuje $CA = B$, provedeme řádkovou úpravu popsanou maticí M , dostaneme $(MB|MC)$, a tudíž $(MC)A = MB$ zůstane v platnosti.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-3 \cdot (2) + 2 \cdot (1) \rightarrow (2) \\ (1) - (3) \rightarrow (3)}} \\ & \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & | & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & | & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2) - (3) \rightarrow (3)} \\ & \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & | & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2) - 7 \cdot (3) \rightarrow (2) \\ (1) - 5 \cdot (3) \rightarrow (1)}}} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 0 & -4 & -15 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{3} \cdot ((1)+4 \cdot (2)) \rightarrow (1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right), \quad \text{tedy } A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Jiná možnost je využít vzorce

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{j,i}}{\det A} \quad (37)$$

kde $A_{i,j}$ je determinant matice vzniklé z A vypuštěním i -tého řádku a j -tého sloupce (tzv. *minoru*). Pro $(-1)^{i+j} \det A_{j,i}$ se také používá termín *algebraický doplněk*. Ve vzorci 37 si všimněte, že vlevo jsou indexy i, j a vpravo j, i .

Pro matice 2×2 na nás z tohoto vzorce vykukuje *Čihákovo pravidlo* „prohodit prvky na diagonále, mimo diagonálu obrátit znaménka a celé dělit determinantem”

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Vypočítáme tedy nejprve $\det A = -1$ a pak determinanty minorů $A_{1,1} = 8$, $A_{2,1} = 29$, $A_{3,1} = 11$, $A_{1,2} = -5$, $A_{2,2} = -18$, $A_{3,2} = -7$, $A_{1,3} = -1$, $A_{2,3} = -3$, $A_{3,3} = -1$, odkud už je již zřejmé vidět výsledek. Pro přehled to shrňme

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

*PK

6.6 Modulární grupa

Úkol: Uvažujte množinu $\mathbb{SL}(2, \mathbb{Z})$ všech matic 2×2 s celočíselnými elementy a jednotkovým determinantem.

a) Ukažte, že je to grupa vůči násobení: najděte inverzní matici k danému prvku $\mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{Z})$. Ukažte, že libovolné dvě sousední položky v matici jsou nesoudělná čísla.

b) Ukažte, že matice

$$S = \begin{pmatrix} \circ & -1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \circ & 1 \end{pmatrix} \quad (39)$$

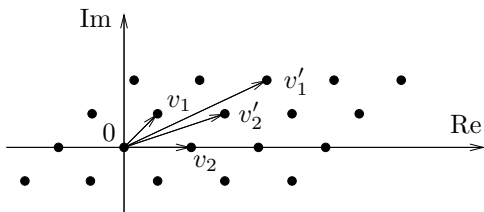
jsou generátory této grupy. Musíte tedy dokázat, že lze libovolný prvek grupy psát jako součin (konečně mnoha) matic A a S .

c) Uvažujte mřížku v komplexní rovině, neboli množinu bodů $G(v_1, v_2) = \{mv_1 + nv_2, m, n \in \mathbb{Z}\}$ pro dvě zadaná nenulová komplexní čísla $v_1, v_2, v_1/v_2 \notin \mathbb{R}$ (viz obrázek 11). Ukažte, že mřížky $G(v_1, v_2)$ a $G(v'_1, v'_2)$, kde

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad M \in \mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{Z})$$

jsou totožné.

d) Prozkoumejte mřížky $G(v_1, 1)$ a zjistěte, z jaké podmnožiny F komplexní roviny je třeba brát v_1 , abychom žádnou mřížku nedostali dvakrát a zároveň žádnou z mřížek nevynechali.



Obrázek 11: Mřížka v komplexní rovině. v'_1, v'_2 odpovídají reparametrizaci této mřížky popsané maticí $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: a) Násobení matic je asociativní, jednotková matice tvoří neutrální prvek. Pro matici libovolného rozměru s jednotkovým determinanem a celočíselnými položkami bude nutně i inverzní matice celočíselná podle vzorce pro inverzní matici „subdeterminant lomeno determinant“ (vztah 37 v příkladu 6.5). Konkrétně z *Čihákova vzorce* (38)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

vidíme, že inverzní matice má pro $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ a $ad - bc = 1$ také celočíselné položky. Jelikož je $ad - bc$ násobkem libovolného společného dělitele čísel a, b a zároveň má být $ad - bc$ rovno jedné, musí být a, b nesoudělná čísla (ale stejně tak a, c nebo d, b či d, c).

b) Nyní chceme ukázat, že je grupa generována maticemi A, S . Uvědomme si několik věcí. Například $S^2 = -$ tj. $S^4 = 1$ neboli $S^{-1} = S^3$. Stejně tak je užitečné vědět, že

$$AS = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (AS)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, (AS)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

a tedy $ASASAS = -1$, násobením A^{-1} zleva $SASAS = -A^{-1}$. Tudiž inverzní matice A^{-1} a S^{-1} lze získat jako součiny A, S . Díky tomu je zapsání $M \in \mathbb{SL}(2, \mathbb{Z})$ jako součin A, S ekvivalentní úkol, jako násobit M maticemi A, S zleva tak, abychom nakonec dostali jednotkovou matici díky vzorcům typu $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

Každý sloupec matice M se při násobení maticemi zleva chová jako vektor. Užijeme *Euklidova algoritmu pro hledání největšího společného dělitele* čísel a, c (v prvním sloupci M). Ten spočívá v tom, že opakovaně nahradíme větší z čísel a, c rozdílem $|a - c|$, jelikož čísla a, c a $a - c, c$ mají stejný největší společný dělitel. Iterací tohoto kroku, díky němuž očividně čísla klesají, se po konečném počtu kroků jedno číslo vynuluje a druhé udává největší společný dělitel.

V jazyce matic využijeme toho, že

$$A^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad S^3 AS \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$S \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad S^2 = -1. \quad (41)$$

Postupujeme například tak, že působením matice S srovnáme relativní znaménko a, c , pokud bylo opačné, působením S^2 učiníme toto společné znaménko kladným, pokud bylo záporné. A hlavní krok spočívá v působení jedné z matic A^{-1} nebo S^3AS , kterou nahradíme větší z čísel v_1, v_2 jejich rozdílem, viz (40).

Jelikož počáteční matice měla a, c nesoudělná, jak jsme řekli výše, iterováním kroku z minulého odstavce dostaneme v prvním sloupci čísla 0, 1. Případným působením $-S$ lze přesunout jednotku do levého horního rohu. Determinant všech zmíněných matic byl roven jedné, tudíž i determinant získané matice s prvním sloupcem $(1, 0)^T$ musí být roven jedné, díky čemuž i v pravém dolním rohu musí být jednotka. Případně nenulové číslo k v pravém horním rohu lehce vynulujeme dalším násobením maticí A^{-k} , čímž dostaneme jednotkovou matici.

c) Matice $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ účinkuje takto:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix}$$

Uvažujme nyní nějakou nedegenerovanou ($v_1/v_2 \notin \mathbb{R}$) mřížku $G(v_1, v_2)$ v \mathbb{C} . Nahrazením (v_1, v_2) dvojicí (v'_1, v'_2) dostaneme pro $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ tutéž mřížku, jelikož je každý prvek nové mřížky i celočíselnou kombinací v_1, v_2 , neboť M je celočíselná. Totéž platí i naopak, jelikož i M^{-1} je celočíselná.

Při přechodu od (v_1, v_2) k (v'_1, v'_2) jsme tedy jen změnili generátory mřížky, což lze chápat také jako reparametrizaci mřížky, neboli změnu souřadnic bodů mřížky (čísla m, n v definici). Všimněte si podobnosti se změnou báze vektorového prostoru.

Podmínka $\det M = 1$ má ještě jeden vedlejší důsledek, totiž že objem *elementární cely* (obsah rovnoběžníku vymezeného body $0, v_1, v_2, v_1 + v_2$) zůstane při transformaci nezměněn.

d) Definujme nejprve ekvivalenci mezi mřížkami tak, že výše definovaná mřížka daná čísly $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ je *konformně ekvivalentní* všem mřížkám generovaným $\kappa v_1, \kappa v_2$, kde $\kappa \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, jinak řečeno všem otočeným a zvětšeným či zmenšeným mřížkám. Všechny mřížky jsou potom konformně ekvivalentní nějaké mřížce $G(v_1, 1)$ nebo jinak řečeno všechny mřížky se stejnou hodnotou $\tau = v_1/v_2$ jsou konformně ekvivalentní.

Některé mřížky s různým τ jsou ale také konformně ekvivalentní. Je ještě totiž třeba ztotožnit různé mřížky, pro které

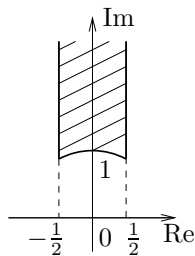
$$\tau' \equiv \frac{v'_1}{v'_2} = \frac{av_1 + bv_2}{cv_1 + dv_2} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

pro nějakou matici M z $\mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{Z})$. Budeme tedy hledat největší takovou oblast F v \mathbb{C} (množinu všech τ), pro kterou τ' ($M \neq \text{Id}$) leží vždy mimo tuto oblast.

Vezměme si nějakou mřížku. Nalezneme nejkratší (podle absolutní hodnoty) nenulový prvek této mřížky, označme toto komplexní číslo v_2 . Nejkratší vektor z těch na v_2 nezávislých označme v_1 . Znaménko v_1 volme tak, aby podíl $\tau = v_1/v_2$ měl kladnou imaginární část. Díky tomu, že v_2 je nejkratší, zjevně platí $|\tau| \geq 1$ a také $|\text{Re } \tau| \leq \frac{1}{2}$, jinak by totiž jedno z čísel $v_1 \pm v_2$ mělo menší absolutní hodnotu než v_1 . Představte si $v_2 = 1$, potom $v_1 \pm v_2$ má stejnou imaginární část jako v_1 , ovšem reálnou část má jedno z těchto čísel menší než v_1 , pokud bylo $|\text{Re } \tau| > \frac{1}{2}$.

Tyto nerovnosti $|\tau| \geq 1$, $2|\text{Re } \tau| \leq 1$, $\text{Im } \tau > 0$ ohraničují *fundamentální doménu* F grupy ze zadání (viz obrázek 12). Toto tvrzení znamená, že je-li $v_2 = 1$, pak pro všechna $v_1 \in F$ dostaneme různé (a také samozřejmě konformně neekvivalentní) mřížky, zatímco pro $v_1 \notin F$ dostaneme tutéž mřížku pouze definovanou nějakým jiným $v_1 \in F$.

Grupa $\mathbb{S}\mathbb{L}(2, \mathbb{Z})$ se nazývá často *modulární grupou*, jde tedy o grupu všech netriviálních reparametrizací mřížky $\Gamma \in \mathbb{C}$ respektive reparametrizací toru³⁶ \mathbb{C}/Γ . Tato grupa se objevuje na mnoha místech v kvantové teorii pole a v teorii strun: dualitová revoluce v posledních pěti letech 20. století ve skutečnosti ukázala, že tyto napohled zcela odlišné výskyty jsou často ekvivalentní. *LM



Obrázek 12: Fundamentální doména mřížky.

³⁶Tím myslíme množinu \mathbb{C} „modulo“ v_1, v_2 , to znamená rovnoběžník $\{mv_1 + nv_2 \mid m, n \in \langle 0; 1 \rangle\}$, v němž ztotožníme rovnoběžné strany. Pokud bychom ztotožněné strany slepili k sobě, vznikl by při prvním lepení plášť válce a při druhém torus. To odpovídá fyzikálně dvourozměrnému systému s periodickými okrajovými podmínkami.

6.7 Fisherova nerovnost

Úkol: Necht' B je systém k -prvkových podmnožin n -prvkové množiny A ($2 \leq k < n$). Necht' každá dvouprvková podmnožina A je obsažena v právě $\lambda \geq 1$ množinách systému B . Označme $b = |B|$ a E matici typu $n \times b$ takovou, že $E_{ij} = 1$ právě tehdy když i -tý prvek množiny A je obsažen v j -té množině systému B , jinak $E_{ij} = 0$ (tedy sloupce E popisují jednotlivé množiny systému). Ukažte, že $EE^T = \left(\frac{kb}{n} - \lambda\right) \cdot I + \lambda J$, kde J je matice samých jedniček. Odtud dokažte, že $b \geq n$; tato nerovnost se nazývá Fisherova nerovnost. Návod: užíjte dvojí počítání.

Řešení: Dle definice matice E je hodnota prvku matice EE^T o souřadnicích (i, j) ($i \neq j$) počet množin systému B , ve kterých je i -tý a j -tý prvek množiny A zároveň. Jeho hodnota je tedy λ . Součet kvadrátů prvků v i -tém řádku matice E (označme jej n_i) je i -tý prvek na diagonále EE^T a udává počet množin systému B , které obsahují i -tý prvek množiny A .

Každý prvek množiny A je obsažen v $n - 1$ různých dvojicích prvků (množiny A). Každá množina systému B , která tento prvek obsahuje, obsahuje $k - 1$ různých dvojic s tímto prvkem. Zafixujme si jeden prvek $a_i \in A$. Spočítejme, kolikrát se v množinách B vyskytuje nějaká dvojice s a_i . Na jednu stranu víme, že každá dvojice z A se v systému B vyskytuje právě λ -krát. Dvojic v A obsahujících a_i je $n - 1$, tedy v B napočítáme takových dvojic $\lambda(n - 1)$. Na druhou stranu je v každé množině B , která obsahuje a_i , celkem $k - 1$ dvojic s a_i . Tedy je v množinách B celkem $n_i(k - 1)$ dvojic s a_i . Určili jsme takto $n_i = \lambda(n - 1)/(k - 1)$ pomocí postupu zvaného *dvojí počítání*.

Matici EE^T lze tedy zapsat ve tvaru $\left(\lambda \frac{n-1}{k-1} - \lambda\right) \cdot I + \lambda J$. Podle příkladu 9.3 má taková matice jednonásobné vlastní číslo $\lambda \frac{n-1}{k-1} - \lambda + n\lambda = \lambda(n - 1) \frac{k}{k-1} \neq 0$ a $(n - 1)$ -násobné vlastní číslo $\lambda \frac{n-1}{k-1} - \lambda \neq 0$ (nenulovost plyne z $n > k$). Matice EE^T je tedy regulární, a tedy hodnost matice E musí být alespoň n ($h(AB) \leq \min\{h(A), h(B)\}$). Potom ale nutně musí platit $b \geq n$.

Jiným dvojitým počítáním zjistíme, že každý prvek A je obsažen v $\frac{kb}{n}$ množinách systému B . Označme tento neznámý počet opět n_i (víme ale již, že n_i je pro všechny prvky, tedy i , stejné) a vytvořme množinu BB sjednocením všech množin systému B , přičemž prvky

BB se opakují, podle počtu výskytu v množinách $z B$. Počet prvků BB je roven jednak $n_i n$ (každý prvek se n_i -krát opakuje), ale taky kb (B obsahuje b množin po k prvcích). Srovnáním těchto výrazů máme $n_i = kb/n$. Tedy vskutku platí také vyjádření $EE^T = \left(\frac{kb}{n} - \lambda\right) \cdot + \lambda J$. *DK

6.8 Cykličnost stopy

Úkol: Víme, že stopa má vlastnost cykličnosti, tj. platí, že $\text{Tr } AB = \text{Tr } BA$. Jak je to pro součin více než dvou matic (třeba $\text{Tr } ABC$)? Lze z cykličnosti odvodit, že můžeme matice v součinu libovolně permutovat?

Řešení: Z cykličnosti plyne, že pokud prvních několik matic v součinu označíme jako A a zbylé jako B , platí:

$$\text{Tr}(\underbrace{IJK}_A \underbrace{LMNO}_B) = \text{Tr } AB = \text{Tr } BA = \text{Tr}(LMNOIJK)$$

a obdobně lze pokračovat dále. Permutaci tohoto typu nazvěme „blokovou transpozicí“ (prohození dvou bloků) a zajímá nás tedy, jaké permutace lze získat skládáním blokových transpozic n -prvkové posloupnosti (půjde o nějakou podgrupu \mathbb{S}_n — grupy všech permutací na n prvcích), případně zda lze takto získat všechny permutace.

Pohledme na blokovou transpozici na n -prvkové posloupnosti, kde první blok má m prvků a druhý pak $n - m$. Prohozením se druhý blok posune doleva o m a první posune doprava o $n - m$, což, chápeme-li posun cyklicky, je také posun doleva o m . Tato bloková transpozice je tedy vlastně cyklická permutace o m , stejně tak jakékoli složení blokových transpozic je nějaká cyklická permutace, neboť tyto permutace tvoří grupu. Grupa cyklických permutací je izomorfní \mathbb{Z}_n — množině $\{0, \dots, n - 1\}$ se sčítáním modulo n . Tato grupa je ovšem obvykle menší než grupa \mathbb{S}_n , protože má n prvků oproti $n!$ prvkům grupy \mathbb{S}_n . Pro součin více než dvou matic tedy z cykličnosti stopy neplyne, že by matice v součinu bylo možno libovolně permutovat. (Najděte konkrétní příklad, kdy to skutečně nelze.)

Zjistili jsme tedy, že cykličnost stopy znamená její invarianci vůči cyklickým permutacím, odtud zřejmé název. Tuto invarianci můžeme

též uvidět, když si napíšeme vzorec pro stopu součinu více matic, třeba

$$\text{Tr } ABCD = \sum_{i,j,k,l} a^i_j b^j_k c^k_l d^l_i.$$

Obecněji pro součin n matic A_1, \dots, A_n , $A_i = (a_i)^l_k$, $k, l = 1, \dots, m$ můžeme psát

$$\text{Tr} \prod_{i=1}^n A_i = \sum_P \prod_{i=1}^n (a_i)^{P(i)}_{P(i+1)}$$

kde P jsou „uzavřené procházky po indexech“, tj. posloupnosti indexů³⁷ z množiny $\{1, \dots, m\}$ délky $n+1$, jejichž první a poslední prvek je stejný (proto jsou uzavřené), a suma je přes všechny procházky tohoto typu.

Tento vzorec není invariantní vůči libovolné permutaci matic. Sousední matice jsou v něm totiž „svázány“ tím, že se sčítá přes jejich společné indexy, což by se obecnou permutací porušilo. Protože matice jsou takto „svázány“ do kruhu (neboť první je „svázána“ s poslední), neporuší se vzorec cyklickou permutací. Viz též kapitolu 20, úlohu „jak rozsadit hosty u kulatého stolu“.

*PC

³⁷Indexy se mohou i opakovat.

7 Lineární algebra pro grafiky

Pro úspěšné zvládnutí této kapitoly je vhodné mít alespoň základní znalosti z teorie grafů. Většinu potřebných pojmů z tohoto oboru sice v následujícím textu vysvětlujeme, pokud by to však čtenáři nepostačovalo, doporučujeme prolistovat libovolnou učebnici teorie grafů, např. [MatNeš].

Graf G je množina *vrcholů* $V(G)$ spolu s množinou *hran* $E(G)$, tedy dvojic *různých* prvků z $V(G)$, o kterých si představujeme, že je hrana spojuje. Graf může být také *orientovaný*, pak jsou prvky $E(G)$ *uspořádané* dvojice, a dva vrcholy tedy mohou být spojeny ve směru $i \rightarrow j$, $j \rightarrow i$ či $i \leftrightarrow j$, nebo nemusí být spojeny vůbec. *Stupeň vrcholu* je počet všech hran, které z něho vycházejí (plus těch, které vcházejí, u orientovaných grafů). Graf je *souvislý*, pokud lze mezi libovolnými dvěma vrcholy přejít po hranách. Pokud graf není souvislý, rozpadá se přirozeně na *komponenty souvislosti* (přesná definice komponenty souvislosti je „každý maximální souvislý podgraf“). Graf se nazývá *bipartitní*, pokud lze jeho vrcholy rozdělit do dvou množin (*partit*) tak, že žádné dva vrcholy z jedné množiny nejsou spojeny hranou. Podobně definujeme *n-partitní* grafy (dělíme vrcholy do n skupin). *Strom* je souvislý graf, který neobsahuje cyklus.

7.1 Je to strom nebo není to strom?

Úkol: Necht' G je orientovaný graf na $n \geq 2$ vrcholech s $n - 1$ hranami. Označme A matici typu $n \times (n - 1)$ takovou, že $A_{ij} = -1$, pokud hrana j vychází z vrcholu i , $A_{ij} = 1$, pokud hrana j vchází do vrcholu i a $A_{ij} = 0$ jinak. Necht' A' je matice, která vznikne z A vynecháním prvního řádku. Dokažte, že A' je singulární právě tehdy, pokud G obsahuje cyklus; to je v našem případě ekvivalentní tomu, že G není strom, a také tomu, že G není souvislý. Navíc, pokud A' není singulární, potom platí $|\det A'| = 1$.

Řešení: Necht' G obsahuje kružnici; můžeme zvolit takovou, která sama sebe nekříží. Označme w vektor řádu $n - 1$, jehož nenulové složky jsou pouze na pozicích hran ležících na této kružnici. Zvolme si směr obíhání po této kružnici a za každou hranu na této kružnici, která jde po směru (resp. proti směru) obíhání, napíšeme do w do příslušné složky 1 (resp. -1). Potom $A'w$ je nulový vektor: aby mohla

být j -tá složka vektoru w a zároveň i i -tého řádku A' nenulová, musí i -tý vrchol ležet na zvolené kružnici a musí jím procházet j -tá hrana. Pro daný bod to buďto není žádná hrana, nebo jsou to právě dvě hrany. V každém případě (obě dovnitř; obě ven; jedna ven a jedna dovnitř) je složkový součin w s i -tým řádkem A' roven nule. Je tedy $A'w = 0$, a tudíž musí být matice A' singulární.

Nechť naopak G neobsahuje kružnici, a je tedy strom (vzhledem k počtu hran nelze v takovém případě sestřít nesouvislý graf). Je-li $n = 2$, je tvrzení zřejmé, nechť tedy $n > 2$. Protože G je strom, obsahuje alespoň dva vrcholy stupně jedna. Alespoň jeden z těchto vrcholů, označme ho v , odpovídá některému z řádků matice A' . Podle tohoto řádku, který obsahuje pouze jediný nenulový prvek, lze determinant matice A' rozvinout — vzniklá matice A'' odpovídá grafu G' , který vznikne z G vynecháním vrcholu v . Tento graf je také strom: cyklus jsme nepřidali, ani jsme graf neroztrhli na dvě nesouvislé části. Nyní řekneme, že důkaz vedeme indukcí dle počtu vrcholů grafu G ; dle indukčního předpokladu platí $|\det A''| = 1$ a tedy $|\det A'| = |\pm 1| |\det A''| = 1$, čímž je tvrzení příkladu dokázáno.

*DK

7.2 Laplaceova matice

Úkol: Nechť G je orientovaný graf s n vrcholy a m hranami. Nechť B označuje matici typu $n \times m$ takovou, že $B_{ij} = -1$, pokud hrana j vychází z vrcholu i , $B_{ij} = 1$, pokud hrana j vchází do vrcholu i , $B_{ij} = 0$ jinak.

Označme dále Q matici typu $n \times n$ takovou, že Q_{ii} je rovno stupni vrcholu i , $Q_{ij} = -1$ pokud je vrchol i spojený hranou s vrcholem j a $Q_{ij} = 0$ jinak. Tato matice se nazývá Laplaceova.

Dokažte, že Q je singulární a $Q = BB^T$. Označme Q' matici, která vznikne vynecháním prvního řádku a sloupce z matice Q a B' matici, která vznikne vynecháním prvního řádku z matice B . Potom platí $Q' = B'B'^T$.

Řešení: Vztah $Q = BB^T$ je zřejmý, pokud si uvědomíme, že $Q_{ij} = b_i \cdot b_j$, kde b_i je i -tý řádek matice B . Uvažme vektor $w^T = (1, \dots, 1)$. Potom Qw je nulový vektor, a matice Q je tedy singulární. Vztah $Q' = B'B'^T$ je též zřejmý.

*DK

7.3 Počet koster

Úkol: Dokažte, že v orientovaném grafu G s $n \geq 2$ vrcholy se skrývá právě $\det Q'$ různých koster. Q' je Laplaceova matice bez prvního řádku a prvního sloupce (viz příklad 7.2). Kostra grafu je jeho libovolný podgraf, který je strom. Návod: použijte příklady 7.1, 7.2, 8.8.

Pomocí tohoto vzorce pak určete počet koster úplného grafu, tedy grafu, kde každé dva vrcholy jsou spojeny hranami v obou směrech.

Řešení: Nejprve se budeme věnovat grafům, které mají alespoň $n-1$ hran. Podle *Cauchyovy-Binetovy věty* (příklad 8.8), je determinant matice Q' roven součtu kvadrátů determinantů všech podmatic matice B' s $n-1$ sloupci. Tyto podmatice odpovídají (bijektivně) podgrafům grafu G s právě $n-1$ hranami a podle příkladu 7.1 mají determinanty ± 1 právě tehdy, pokud je tento podgraf strom, tedy je kosterou grafu G ; jinak je jejich hodnota nula. Tedy determinant matice Q' je roven počtu podgrafů grafu G , které jsou stromy, neboli je roven počtu koster grafu G .

Nyní obrátíme pozornost ke grafům s méně jak $n-1$ hranami. Takový graf G nemá žádnou kosteru (neboť není souvislý), a tedy stačí ukázat singularitu matice Q' . Hodnota matice B' je nejvýše $n-2$ (tolik má nejvýše sloupců). Tedy hodnota matice Q' je nejvýše $n-2$ dle věty o hodnotě součinu matic a tedy matice Q' je singularní. Její determinant je tedy nula, což je i počet podgrafů grafu G , které jsou stromy.

Je-li G úplný graf, potom $Q' = n \cdot I - J$, kde I je jednotková matice a J matice ze samých jedniček, obě jsou řádu $n-1$. Podle výsledků příkladu 9.3 má matice Q' dvě vlastní čísla: $(n-2)$ -násobné n a jednonásobné $n - (n-1) = 1$. Determinant matice je součinem jejích vlastních čísel (braných v jejich algebraické násobnosti) a tedy platí $\det Q' = n^{n-2}$. Počet koster úplného grafu na n vrcholech je tedy n^{n-2} . *DK

7.4 Prostor cyklů grafu

Úkol: Označme G_E množinu eulerovských podgrafů souvislého grafu G , čili podgrafů, jejichž všechny vrcholy mají sudé stupně. Uvažme \mathbb{Z}_2^m , kde m je počet hran G , a ztotožněme přirozeným způsobem

vektory tohoto prostoru s podgrafy grafu G . Označme E množinu vektorů reprezentujících podgrafy z G_E . Dokažte, že E je vektorový podprostor a je algebraickým doplňkem³⁸ množiny S , obsahující vektory odpovídající podgrafům S^v , kde v jsou vrcholy grafu G (vše nad tělesem \mathbb{Z}_2). Podgraf S^v obsahuje právě ty hrany grafu G , které jsou incidentní³⁹ s vrcholem v . Odtud dokažte, že dimenze E je $m - n + 1$, kde n je počet vrcholů grafu G .

Řešení: E je vektorový podprostor (nad \mathbb{Z}_2 , tedy $1 + 1 = 0$), neboť obsahuje nulový vektor (prázdný podgraf je eulerovský) a součet dvou jeho libovolných vektorů mu také náleží (symetrická diference dvou eulerovských grafů je eulerovský graf). Necht' $w \in E$ a s^v je vektor odpovídající libovolnému podgrafu S^v . Potom počet nenulových složek v součtu $\sum_{i=1}^m w_i(s^v)_i$ je roven stupni vrcholu v v podgrafu odpovídajícím vektoru w , a je tedy sudý, neboli nulový (modulo dvě). Navíc, každý vektor w , který splňuje výše uvedenou rovnost pro všechny s^v , nutně odpovídá nějakému eulerovskému podgrafu. Tedy E je právě algebraickým doplňkem S . Pokud ukážeme, že $\dim \mathcal{L}(S) = n - 1$, obdržíme okamžitě $\dim E = m - (n - 1) = m - n + 1$.

Dimenze S je nejvýše $n - 1$, neboť $\sum_v s^v$ je nulový vektor, a tedy vektory v S nejsou lineárně nezávislé. Necht' W je libovolná neprázdná podmnožina vrcholů, jejíž mohutnost je nejvýše $n - 1$. Potom $\sum_{v \in W} s^v$ (to je obecná lineární kombinace nad \mathbb{Z}_2^m) má nenulovou složku na místě hrany, spojující některý z vrcholů z W s některým z vrcholů mimo W . Tedy vskutku libovolných (nejvýše) $n - 1$ vektorů množiny S je lineárně nezávislých a tedy $\dim S = n - 1$.

*DK

7.5 Spektrum matice incidence grafu

Úkol: Necht' I_G je matice incidence grafu G o n vrcholech, tj. $(I_G)_{ij} = 1$ právě tehdy, když vrchol i je spojený hranou s vrcho-

³⁸Algebraický doplněk množiny M tvoří všechny ty vektory, které mají s libovolným vektorem z M nulový složkový součin. Pokud by byl složkový součin skalárním součinem (například v \mathbb{R}^n), stal by se z algebraického doplňku ortogonální doplněk. Tvzení, že součet dimenze $\mathcal{L}(M)$ a dimenze algebraického doplňku je dimenze celého prostoru, je pouze variace na téma dimenze jádra plus dimenze obrazu.

³⁹Vcházející či vycházející.

lem j ; prvky na její diagonále jsou nulové. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice incidence pro následující grafy:

1. Matice úplného grafu (na n vrcholech).
2. Matice úplného bipartitního grafu s partitami o velikostech m a k (samozřejmě musí být $m + k = n$).
3. Matice cyklu na n vrcholech. Matici I_{C_n} vyjádřete jako součet matic A a B (viz níže) a povšimněte si, že $A^{n-1} = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení: Především si povšimněme, že matice incidence grafu jsou matice symetrické, a tedy jejich vlastní čísla jsou reálná a z jejich vlastních vektorů lze sestavit ortogonální bázi. Protože je stopa těchto matic nulová, sčítají se vlastní čísla matic incidence na nulu. Rozeberme nyní matice incidence ze zadání příkladu:

1. K nalezení vlastních čísel matice lze použít výsledků příkladu 9.3 (o determinantu matice $xI + yJ$; zde $x = -1$, $y = 1$). Nalezení vlastních čísel a vektorů této matice je však snadné i bez tohoto příkladu: matice má jednoduché vlastní číslo $n-1$, kterému odpovídá vlastní vektor $(1, \dots, 1)$, a $(n-1)$ -násobné vlastní číslo -1 , kterému odpovídá libovolný vektor kolmý na vektor $(1, \dots, 1)$, tj. např. vektory tvaru $(0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0)$.

2. Pro větší názornost očíslováme vrcholy tak, aby bylo za sebou nejprve všech m vrcholů z první partity a pak následovalo zbývajících k vrcholů z druhé partity. Matice incidence pak má blokový tvar

$$I_G = \begin{pmatrix} 0 & (m \times m) & 1 & (m \times k) \\ 1 & (k \times m) & 0 & (k \times k) \end{pmatrix}, \quad (42)$$

bloky mají velikost uvedenou vždy v závorkách a jsou v nich buď samé nuly, nebo samé jedničky. Tato matice incidence má $(n-2)$ -násobné vlastní číslo nula, kterému odpovídají vlastní vektory tvaru

$(0, \dots, 0, 1, -1, 0, \dots, 0)$ s dvěma nenulovými složkami na místech odpovídajících dvěma vrcholům v téže partitě.

Zbývající dvě vlastní čísla jsou potom \sqrt{mk} a $-\sqrt{mk}$ a k nim přísluší vlastní vektory $(\sqrt{k}, \dots, \sqrt{k}, \sqrt{m}, \dots, \sqrt{m})$ a $(\sqrt{k}, \dots, \sqrt{k}, -\sqrt{m}, \dots, -\sqrt{m})$.

3. Povšimněme si nejprve, že A^n je jednotková matice — pokud se vám nechce násobit matice, rozmyslete si, co se stane, když za sebou n -krát posuneme složky n -složkového vektoru o jednu nahoru. Vlastní čísla matice A mohou být tedy pouze n -té komplexní odmocniny jedničky; ukážeme, že mezi vlastními čísly žádná nechybí. Existují totiž následující vlastní vektory (a k nim příslušná vlastní čísla)

$$\varepsilon_k = \exp(2\pi i k/n), \quad k = 0, \dots, n-1, \quad v_k = (1, \varepsilon_k, \dots, \varepsilon_k^{n-1}).$$

Vektor Av_k je totiž vektor, v němž cyklicky posuneme všechny složky o jednu nahoru. Vlastní čísla matice B jsou $(n-1)$ -té mocniny vlastních čísel matice A (jelikož $A^{n-1} = B$), vlastní vektory se shodují. Vlastní čísla matice $A + B$ jsou pak součtem příslušných vlastních čísel matic A a B a mají tedy hodnotu $\lambda_k = 2 \cos 2\pi k/n$, $k = 0, \dots, n-1$.

Všimněte si, že mezi λ_k je kromě jedničky (λ_0) — a pro n sudé také kromě $\lambda_{n/2} = -1$ — každé číslo dvakrát ($\lambda_k = \lambda_{n-k}$). To znamená, že všechna tato vlastní čísla budou dvojnásobná. Za bázi vlastního podprostoru k λ_k lze zvolit například vektory v_k, v_{n-k} . Symetrie (reálné) matice $A + B$ nám ale zaručuje, že lze zvolit bázi z reálných vektorů. Když si všimneme, že $\lambda_k = \overline{\lambda_{n-k}}$, víme automaticky, že $v_k = \overline{v_{n-k}}$ a pak už není těžké vymyslet

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(v_k + \overline{v_k}) &= (1, \cos 2\pi k/n, \dots, \cos 2\pi(n-1)k/n), \\ \frac{1}{2i}(v_k - \overline{v_k}) &= (0, \sin 2\pi k/n, \dots, \sin 2\pi(n-1)k/n). \end{aligned}$$

*DK

7.6 Vlastnosti matice incidence grafu

Úkol: Označme I_G matici incidence grafu G s n vrcholy (definici viz v příkladu 7.5). Dokažte následující tvrzení.

1. Všechna její vlastní čísla jsou reálná. Navíc pro všechna vlastní čísla je jejich geometrická a algebraická násobnost stejná.
2. Všechna její vlastní čísla jsou v absolutní hodnotě menší nebo rovna maximálnímu stupni v grafu G .
3. Existuje vlastní vektor s nezápornými složkami příslušející největšímu vlastnímu číslu. Použijte výsledků příkladu 14.1.
4. Největší vlastní číslo je alespoň velikost minimálního stupně v grafu G .
5. Pokud je největší vlastní číslo vícenásobné, potom je graf G nesouvislý. Dokažte, že opačná implikace nemusí platit.
6. Určete největší vlastní číslo a k němu příslušný vlastní vektor pro d -regulární graf (každý vrchol je spojen právě s d ostatními vrcholy).
7. Pokud je graf G bipartitní a λ je jeho vlastní číslo, potom $i - \lambda$ je jeho vlastní číslo. Navíc násobnost vlastních čísel λ a $-\lambda$ je stejná.

Řešení:

1. Matice incidence jsou symetrické, a tedy algebraické a geometrické násobnosti jejich vlastních čísel se shodují a jejich vlastní čísla jsou reálná. Navíc z jejich vlastních vektorů lze sestavit ortogonální bázi.
2. Pokud by λ bylo vlastní číslo matice incidence větší než maximální stupeň v grafu, potom by byla matice $I_G - \lambda$ ostře diagonálně dominantní, tedy regulární (definici a důkaz viz v příkladu 1.4 či 9.2). Pak ale λ nemůže být vlastním číslem matice I_G .
3. Za vektor x z příkladu 14.1 budeme volit postupně prvky kanonické báze. Všechny takto vytvořené posloupnosti obsahují nezáporné vektory (neboť matice I_G má nezáporné elementy). Mohou nastat dva případy. Buď některá z posloupností konverguje k vlastnímu vektoru odpovídajícímu největšímu kladnému vlastnímu

číslu (λ_{\max}) matice incidence a pak jsme hotovi. Nebo mohla mít matice I_G také vlastní číslo $-\lambda_{\max}$, ale pak alespoň jedna z posloupností má dva hromadné body, jejichž součet je vlastní vektor k λ_{\max} .

4. Označme v_1 nezáporný vektor příslušející největšímu vlastnímu číslu λ_1 . Pokud je λ_1 nulové (a přitom největší), musí být všechna její vlastní čísla nulová (neboť stopa I_G je nula), a tedy je I_G nulová a uvažovaný graf je tvořen pouze izolovanými vrcholy. Tvrzení příkladu je v tomto případě triviální.

Nechť nadále $\lambda_1 > 0$. Nechť i_0 je složka vektoru v_1 s nejmenší nenulovou hodnotou a nechť I je množina indexů, které odpovídají vrcholům, které leží ve stejné komponentě souvislosti jako i_0 . Zřejmě $(v_1)_i \geq (v_1)_{i_0}$ pro $i \in I$; žádná z těchto složek totiž nemůže být nulová⁴⁰, neboť jejich vrcholy leží ve stejné komponentě souvislosti jako vrchol odpovídající i_0 . Označme δ minimální stupeň v grafu G . Potom platí

$$\lambda_1(v_1)_{i_0} = (I_G v_1)_{i_0} \geq \sum_{i \in N(i_0)} (v_1)_i \geq \delta(v_1)_{i_0},$$

sčítá se přes sousedy vrcholu odpovídajícího i_0 . Odtud pak již přímo plyne $\lambda_1 \geq \delta$.

5. Označme v_1 a v_2 lineárně nezávislé vlastní vektory příslušející vlastnímu číslu $\lambda_1 > 0$ (případ $\lambda_1 = 0$ je triviální). Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že v_1 je nezáporný, a že vektor v_2 obsahuje nějaké kladné složky. Uvažme nyní vektor $v = v_1 - \alpha v_2$, kde α je největší kladné číslo takové, že vektor v je ještě nezáporný. Některé složky v jsou nulové (jinak lze zvolit α větší), ale ne všechny jeho složky (v_1 a v_2 jsou lineárně nezávislé). Žádný z vrcholů, jehož složka ve v je nulová, nemůže být spojen cestou s kterýmkoli vrcholem, jehož složka je ve v nenulová; jinak by totiž nemohlo platit $\lambda_1 v = I_G v$. Potom ale tyto vrcholy leží v různých (ne nutně dvou) komponentách grafu, a tedy uvažovaný graf není souvislý.

Protipříklad k opačnému tvrzení (k bodu 5) najdete sami, stačí uvažovat vhodný graf se třemi vrcholy.

⁴⁰To je netriviální tvrzení. Nejprve ukažte, že nenulové složky musí mít všichni sousedé i_0 , pak sousedé sousedů, atd.; použijete přitom bod 3 tohoto příkladu. My budeme toto tvrzení potřebovat ve skutečnosti jen pro sousedy.

6. Největší vlastní číslo je d (díky bodům 2 a 4 nemůže být ani větší ani menší) a odpovídající vlastní vektor je $(1, \dots, 1)$.

7. Nechť v je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ . Změňme znaménko u všech složek vektoru v , které odpovídají vrcholům v jedné z partit; takto získáme vektor v' . Potom $I_G v' = -\lambda v'$ (viz též příklad 7.5, bod 2), a tedy i $-\lambda$ je vlastním číslem matice incidence. Z postupu důkazu je též vidět, že se násobnosti vlastních čísel λ a $-\lambda$ shodují. Existuje totiž izomorfismus příslušných vlastních podprostorů (toto zobrazení spočívá v záměně znamének u složek odpovídajících vrcholům v jedné z partit). *DK

7.7 Spektrum matice incidence Petersenova grafu

Úkol: Najděte vlastní čísla matice incidence Petersenova grafu. Petersenův graf je graf na deseti vrcholech, které ztotožňujeme s dvouprvkovými podmnožinami množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dva vrcholy jsou v tomto grafu spojeny hranou právě tehdy, když jim přiřazené množiny jsou disjunktní. (Návod: Zkoumejte druhou mocninu matice incidence tohoto grafu.)

Řešení: Označme matici incidence Petersenova grafu I_P . Petersenův graf je 3-regulární (každý vrchol má stupeň 3). Tedy podle příkladu 7.6 je největší vlastní číslo I_P tři a je jednonásobné, protože Petersenův graf je souvislý. Dva sousední vrcholy v Petersenově grafu nemají žádného společného souseda a dva nesousední vrcholy mají právě jednoho. Odtud plyne (stačí si rozmyslet, jak se matice násobí), že platí $I_P^2 = J + 2I_P$, kde J je matice tvořená samými jedničkami. Přepíšme výše uvedenou rovnost do tvaru

$$I_P^2 + I_P - 2J = 0.$$

Matice J má vlastní vektor ze samých jedniček (k jednonásobnému vlastnímu číslu 10), ten je vlastním vektorem i I_P a . . Tento vektor má u I_P vlastní číslo 3. Všimněte si, že poslední rovnice odpovídá po násobení tímto vlastním vektorem zprava rovnici $9 + 3 - 2 = 10$.

Ostatní vlastní vektory všech zkoumaných matic jsou na něj kolmé (všechny tyto matice jsou symetrické) a tedy leží ve vlastním podprostoru matice J (viz příklad 9.3) odpovídajícímu vlastnímu číslu 0 (v něm leží právě vektory, které jsou kolmé na vektor tvořený

samými jedničkami). Tedy pro vlastní číslo λ matice I_P musí platit: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ a tedy $\lambda \in \{1, -2\}$.

Nyní si uvědomíme, že stopa matice I_P je nulová, a tedy součet všech jejích vlastních čísel (braných v násobnostech) je nula. Zároveň musí být součet násobností deset. Těmito dvěma podmínkám vyhovíme jen tehdy, pokud má matice I_P jednoduché vlastní číslo 3, pětinasobné 1 a čtyřnasobné -2 . *DK

7.8 Rozklad úplného grafu na tři Petersenovy grafy

Úkol: S využitím výsledků příkladu 7.7 dokažte, že úplný graf na deseti vrcholech nelze zapsat jako sjednocení tří (disjunktních) Petersenových grafů.

Řešení: Dokazujme sporem. Předpokládejme, že I_1, I_2 a I_3 jsou matice incidence Petersenova grafu takové, že $I_1 + I_2 + I_3 = J - I$, kde J je matice tvořená samými jedničkami a I je jednotková matice. Uvažme matici $J - I - I_1 - I_2$. Spektrum této matice je dle výsledků příkladu 7.7 $\{3, 1, -2\}$. Uvažme nyní vlastní podprostor matice J odpovídající vlastnímu číslu 0. Ten obsahuje vlastní podprostory (dimenze pět) pro vlastní číslo 1 jak matice I_1 tak i I_2 . Protože je však jeho dimenze (pouze) devět, musí mít výše zmiňované vlastní podprostory matic I_1 a I_2 neprázdný průnik — tedy existuje jejich společný vlastní vektor, který označíme v . Nyní již stačí provést několik jednoduchých úprav: $I_3 v = (J - I - I_1 - I_2)v = Jv - Iv - I_1 v - I_2 v = -v - v - v = -3v$. To je ale spor, neboť matice I_3 nemá vlastní číslo -3 . *DK

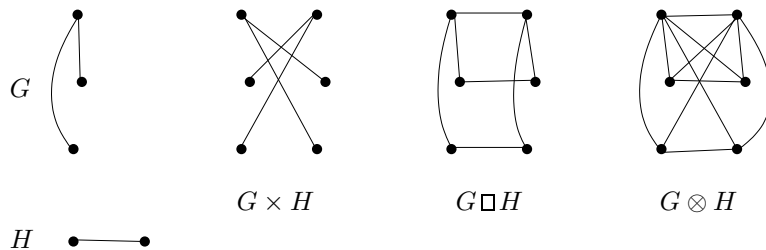
7.9 Spektrum matice incidence součinu grafů

Úkol: Znáte-li spektrum matice incidence grafů G a H , určete, jak vypadá spektrum matice incidence jejich součinu. Prozkoumejte různé typy součinů grafů (viz obrázek 13):

- $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ a $E(G \times H) = \{[a, u], [b, v] \mid [a, b] \in E(G), [u, v] \in E(H)\}$
- $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$ a

$$E(G \square H) = \{[a, u], [a, v] \mid [u, v] \in E(H)\} \cup \cup \{[a, u], [b, u] \mid [a, b] \in E(G)\}$$

- $V(G \otimes H) = V(G) \times V(H)$ a
 $E(G \otimes H) = E(G \times H) \cup E(G \square H)$



Obrázek 13: Různé typy součinů grafů.

Řešení: Označme v^i a λ^i vlastní vektory a vlastní čísla matice incidence grafu G a w^j a σ^j vlastní vektory a vlastní čísla matice incidence grafu H . Uvažme nyní vektory $u^{i,j}$ definované jako $(u^{i,j})_{[k,l]} = (v^i)_k (w^j)_l$, $[k, l]$ jsou vrcholy součinu grafů, tedy indexy složek u . Všimněme si podobnosti s *tenzorovým součinem* dvou vektorů.

Nejprve nahlédneme, že vektory $u^{i,j}$ jsou lineárně nezávislé. Necht jsou lineárně závislé, tedy necht existují nenulové koeficienty $\alpha^{i,j}$ takové, že $\sum_{i,j} \alpha^{i,j} u^{i,j} = 0$. Pro každé k a l pak platí:

$$\sum_{i,j} \alpha^{i,j} (v^i)_k (w^j)_l = \sum_i \left(\sum_j \alpha^{i,j} (w^j)_l \right) (v^i)_k = 0.$$

Protože v^i jsou lineárně nezávislé vektory, musí být $\sum_j \alpha^{i,j} (w^j)_l = 0$ pro všechna i . Avšak alespoň jedna z těchto lineárních kombinací je netriviální (alespoň jedno z $\alpha^{i,j}$ je nenulové), tedy jsou vektory w^j lineárně závislé. Obdrželi jsme spor, a proto jsou vektory $u^{i,j}$ lineárně nezávislé.

Nyní přistupme k určení spektra příslušných matic incidence:

- Zřejmě platí $(I_{G \times H})_{[k,m][l,n]} = (I_G)_{kl}(I_H)_{mn}$. Spočtěme nyní, jak $I_{G \times H}$ působí na $u^{i,j}$:

$$\begin{aligned} (I_{G \times H} u^{i,j})_{[k,m]} &= \sum_{[l,n]} (I_G)_{kl}(I_H)_{mn} (v^i)_l (w^j)_n = \\ &= \lambda^i \sigma^j (v^i)_k (w^j)_m = \lambda^i \sigma^j (u^{i,j})_{[k,m]}. \end{aligned}$$

Vlastní čísla matice incidence grafu $G \times H$ jsou tedy tvaru $\lambda^i \sigma^j$ a odpovídající vlastní vektory jsou $u^{i,j}$.

- Zřejmě $(I_{G \square H})_{[k,m][l,n]} = \delta_{mn}(I_G)_{kl} + \delta_{kl}(I_H)_{mn}$. Spočtěme nyní $I_{G \square H} u^{i,j}$:

$$\begin{aligned} (I_{G \square H} u^{i,j})_{[k,m]} &= \sum_{[l,n]} (\delta_{mn}(I_G)_{kl} + \delta_{kl}(I_H)_{mn}) (v^i)_l (w^j)_n = \\ &= \lambda^i (v^i)_k (w^j)_m + \sigma^j (v^i)_k (w^j)_m = (\lambda^i + \sigma^j) (u^{i,j})_{[k,m]} \end{aligned}$$

Vlastní čísla matice incidence grafu $G \square H$ jsou tedy tvaru $\lambda^i + \sigma^j$ a odpovídající vlastní vektory jsou $u^{i,j}$.

- Zřejmě $I_{G \otimes H} = I_{G \times H} + I_{G \square H}$, tedy vlastní čísla matice incidence grafu $G \otimes H$ jsou tvaru $\lambda^i \sigma^j + \lambda^i + \sigma^j$ a příslušné vlastní vektory jsou stále $u^{i,j}$.

*DK

7.10 Jak poznat stupeň souvislosti v grafu?

Úkol: Necht' G je d -regulární graf s n vrcholy a $E(A, B)$ je množina hran, které spojují nějaký vrchol z $A \subset V(G)$ s nějakým vrcholem z $B \subset V(G)$. Určete, jak souvisí

$$\min_{\emptyset \subsetneq W \subsetneq V(G)} \frac{|E(W, V(G) \setminus W)|}{|W||V(G) \setminus W|} \quad (43)$$

s rozdílem prvního (λ_1) a druhého (λ_2) největšího vlastního čísla matice incidence grafu G .

Tento výraz vyjadřuje „stupeň souvislosti grafu“. Pokud se graf například skládá ze dvou uvnitř dobře propojených částí, které jsou

spojeny jen několika málo hranami, bude výraz 43 malý. U nesouvislých grafů je tento výraz nulový.

Poznámka k označení: V řešení budeme používat složkový skalární součin $\langle a|b \rangle = \sum_i a_i b_i$. Tento zápis lze chápat také jako násobení řádkového vektoru sloupcovým vektorem. Pro vektor a tedy znamená $|a \rangle$ sloupcový vektor jeho složek a $\langle a| = |a \rangle^T$.

Řešení: Označme n počet vrcholů grafu G , $j = (1, \dots, 1)$, $e = j/\sqrt{n}$ a w charakteristický vektor množiny vrcholů W , tedy vektor, který obsahuje jedničky pouze na místech odpovídajících vrcholům z množiny W a jinde nuly. Budeme vyšetřovat výraz $|E(W, V(G) \setminus W)| = \langle j - w|I_G w \rangle$. Díky d -regularitě víme, že $I_G|j \rangle = d|j \rangle$ (tedy také $\langle j|I_G = d\langle j|$) a podobně $I_G|e \rangle = d|e \rangle$. Podle příkladu 7.6 je $\lambda_1 = d$.

$$\langle j - w|I_G w \rangle = \langle j|I_G w \rangle - \langle w|I_G w \rangle =$$

$$\lambda_1 \langle j|w \rangle - \langle \langle e|w \rangle e|I_G \langle e|w \rangle e \rangle - \langle w - \langle e|w \rangle e|I_G w - \langle e|w \rangle e \rangle.$$

Použili jsme $\langle w - e\langle e|w \rangle|I_G|e \rangle = d\langle w - e\langle e|w \rangle|e \rangle = 0$. Tato kolmost také ukazuje, že pokud rozvineme vektor $x = w - e\langle e|w \rangle$ do báze vlastních vektorů I_G , bude složka u e nulová. Potom ovšem $\langle x|I_G x \rangle \leq \lambda_2 \langle x|x \rangle$.

$$\langle j - w|I_G w \rangle \geq \lambda_1 \langle j|w \rangle - \lambda_1 \langle j|w \rangle^2/n - \lambda_2 \|w - \langle e|w \rangle e\|^2 =$$

$$\lambda_1 |W| - \lambda_1 |W|^2/n - \lambda_2 (\langle w|w \rangle - \langle e|w \rangle^2) =$$

$$\lambda_1 (|W| - |W|^2/n) - \lambda_2 (|W| - |W|^2/n) = (\lambda_1 - \lambda_2) (|W| - |W|^2/n).$$

Tyto výpočty lze shrnout (pro libovolné $W \subset V(G)$, $0 < |W| < n$)

$$\frac{|E(W, V(G) \setminus W)|}{|W||V(G) \setminus W|} \geq \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)|W|(n - |W|)}{n|W|(n - |W|)} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{n}.$$

To je spodní odhad pro minimum výrazu 43. Jako dodatek k bodu 5 příkladu 7.6 tedy vidíme, že u nesouvislých d -regulárních grafů je už maximální vlastní číslo automaticky vícenásobné ($\lambda_2 = \lambda_1$).

*DK

7.11 Expandéry

Úkol: Dejte první a druhé největší vlastní číslo (λ_1, λ_2) matice incidence d -regulárního grafu s n vrcholy do souvislosti s následujícím výrazem:

$$E = \min_{\substack{W \subset V(G) \\ 0 < |W| \leq \frac{1}{2}n}} \frac{|W \cup \{v \mid \exists w \in W, (vw) \in E(G)\}|}{|W|}. \quad (44)$$

Použijte výsledek příkladu 7.10.

Výraz za znakem minima je poměr počtu vrcholů ve W plus jejich přímých sousedů ku $|W|$. Je tedy nasnadě, proč se grafy, pro něž je výraz 44 „velký“, nazývají expandéry.

Řešení: Provedme nejprve přímočarou úpravu

$$E = 1 + \min_{\substack{W \subset V(G) \\ 0 < |W| \leq \frac{1}{2}n}} \frac{|\{v \notin W \mid \exists w \in W, (vw) \in E(G)\}|}{|W|}.$$

Označme n_W počet vrcholů ležících mimo W , které jsou ale spojeny hranou s nějakým vrcholem z W . Toto číslo lze odhadnout pomocí počtu hran h_W mezi W a ostatními vrcholy. Pokud u nějakého vrcholu z W nějaká hrana „neuteče“ jinam, než do $V(G) \setminus W$ (tedy pokud jsou $W, V(G) \setminus W$ partity grafu), bude $h_W = n_W d$. Jinak bude samozřejmě $h_W < n_W d$, tedy

$$\begin{aligned} E &\geq 1 + \min_{\substack{W \subset V(G) \\ 0 < |W| \leq \frac{1}{2}n}} \frac{|E(W, V(G) \setminus W)|}{d|W|} \geq \\ &\geq 1 + \min_{\substack{W \subset V(G) \\ 0 < |W| \leq \frac{1}{2}n}} \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)|V(G) \setminus W|}{dn}. \end{aligned}$$

Nalezli jsme tedy odhad

$$E \geq 1 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2d} = \frac{3}{2} - \frac{\lambda_2}{2\lambda_1}.$$

*DK

8 Determinátoři

Jak se počítají determinanty? [Prosk]

Determinanty matic 2×2 a 3×3 se většinou vyplatí počítat přímo pomocí známých vzorečků (v případě matic 3×3 se používá název *Sarrusovo pravidlo*)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{32}a_{23}.$$

Pokud máme zpracovat větší matici, můžeme vždy použít rozvoj podle sloupce či řádku (viz příklad 8.1), čímž determinant $n \times n$ vyjádříme pomocí n determinantů $(n-1) \times (n-1)$. Než provedeme tento rozvoj, rozhodně se vyplatí vynulovat⁴¹ všechny prvky kromě jednoho ve sloupci (řádku), podle kterého budeme rozvíjet: tím nám zbude v rozvoji jediný člen. Determinant se totiž nezmění, pokud k libovolnému řádku přičteme lineární kombinaci *ostatních* řádků. U determinantu $(n-1) \times (n-1)$ použijeme stejnou techniku a postup opakujeme, až se dostaneme k determinantu 3×3 .

Cesta postupného rozvíjení ale vede obecně k výrazům, které získáme přímým výpočtem z definice determinantu. To je těžkopádné v případě determinantů s neznámými prvky, nebo determinantů se sice číselnými prvky, ale s předem neurčeným řádem. Obecná metoda výpočtu takových determinantů neexistuje, neuvažujeme-li přímé vyjádření z definice. V mnoha případech lze ale použít nějaký trik, který výpočet velmi zjednoduší, a my v tomto úvodu několik takových postupů představíme.

Metoda převodu na trojúhelníkový tvar

Někdy se lze i u matic $n \times n$ dopracovat pomocí řádkových úprav k hornímu (dolnímu) trojúhelníkovému tvaru. Determinant horní

⁴¹Základní možnosti, jak upravovat determinant, jsou uvedeny v příkladu 8.1.

(dolní) trojúhelníkové matice je pak roven součinu elementů na diagonále, jak se lze přesvědčit přímo v definici. Povolená úprava je v tomto případě pouze přičíst k libovolnému řádku lineární kombinaci *ostatních* řádků. Pokud nějaký řádek násobíme číslem λ , zvětší se i determinant λ -krát.

Příklad 1. Vypočtěte determinant matice $n \times n$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Řešení: Odečteme první řádek od všech ostatních

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

Příklad 2. Vypočtěte determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & & x \\ x & x & a_3 & & x \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Řešení: Odečteme první řádek od všech ostatních:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x - a_1 & a_2 - x & 0 & & 0 \\ x - a_1 & 0 & a_3 - x & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ x - a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix}$$

Z prvního sloupce vytkneme $a_1 - x$, z druhého $a_2 - x$, atd. až z n -tého $a_n - x$. Díky *multilinearitě* máme tedy

$$D = (a_1 - x) \cdots (a_n - x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & & 0 \\ -1 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Pro lepší estetický dojem napíšeme $\frac{a_1}{a_1-x}$ jako $1 + \frac{x}{a_1-x}$, všechny sloupce přičteme k prvnímu a označíme $A = 1 + \sum_i x/(a_i - x)$

$$D = (a_1 - x) \cdots (a_n - x) \begin{vmatrix} A & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x(a_1 - x) \cdots (a_n - x) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \cdots + \frac{1}{a_n - x} \right).$$

Vytýkání lineárních výrazů

Pokud se v matici A vyskytuje proměnná x , můžeme na determinant $D(x) = |A|$ hledět jako na mnohočlen v x . Po určité důmyslné úpravě matice můžeme zjistit, že D musí být dělitelný nějakým lineárním výrazem: například pokud je jeden sloupec násobkem $x - 1$ a žádný prvek v matici neobsahuje $(x - 1)^{-1}$. Pokud najdeme takových (po dvou nesoudělných) dělitelů více, musí být $D(x)$ dělitelný i jejich součinem. Pokud je stupeň tohoto součinu $S(x)$ stejný jako stupeň $D(x)$, musí nutně platit $D(x) = \alpha S(x)$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{C}$. Toto číslo zjistíme například tak, že srovnáme členy s nejvyšší mocninou x u $D(x)$ a $S(x)$.

Tento postup lze zobecnit i pro determinanty s více proměnnými.

Příklad 3. Vypočtete determinant

$$D = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Řešení: Jestliže k prvnímu sloupci přičteme všechny ostatní sloupce, vidíme, že D je dělitelný $x+y+z$. Jestliže k prvnímu sloupci přičteme druhý a odečteme od něj třetí a čtvrtý sloupec, můžeme vytknout $-x+y+z$. Podobně, jak tušíme ze symetrie matice vůči záměnam x, y, z , lze vytknout i $x-y+z$ (po $(1)+(3)-(2)-(4) \rightarrow (1)$), a $x+y-z$ (po $(1)+(4)-(2)-(3) \rightarrow (1)$). Jelikož jsou x, y, z nezávislé proměnné, jsou tyto čtyři vytknuté členy po dvojicích vzájemně nesoudělné a determinant je dělitelný $S = (x+y+z)(y+z-x)(x-y+z)(x+y-z)$.

Vidíme, že D jako funkce proměnné x je polynom čtvrtého stupně, (stejně jako v y a z), což se shoduje se S . Musí proto platit $D = \alpha S$. Vidíme, že v D je člen z^4 s koeficientem 1 ($a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$, příslušná permutace je *sudá*). Naproti tomu v S je $-z^4$, tedy musí být $\alpha = -1$ a

$$D = -(x+y+z)(y+z-x)(x+z-y)(x+y-z).$$

Příklad 4. Vypočtete *Vandermondův determinant* n -tého řádu pomocí vytýkání lineárních výrazů.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Řešení: Na determinant nahlížíme jako na polynom neznámé x_n s koeficienty, které závisí na x_1, \dots, x_{n-1} . Vidíme, že D_n je nula, pokud $x_n = x_1, x_n = x_2, \dots$, nebo $x_n = x_{n-1}$. Determinant proto musí být dělitelný $x_n - x_1, x_n - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}$. Všechny tyto výrazy jsou po dvou nesoudělné (poněvadž x_1, x_2, \dots, x_n jsou nezávislé⁴²).

⁴²Nezávislost znamená, že x_1, \dots, x_{n-1} mohou nabývat libovolných hodnot. Nikdo jistě nepochybuje, že pro $x_1 = 1, \dots, x_{n-1} = n-1$ jsou výrazy $x_n - 1, \dots, x_n - (n-1)$ nesoudělné.

To znamená, že D_n je dělitelný jejich součinem

$$D_n = q(x_1, x_2, \dots, x_n)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}), \quad (45)$$

kde q je polynom v uvedených proměnných.

Rozložíme-li D_n podle posledního řádku, vidíme, že je to polynom stupně $n - 1$ vzhledem k x_n , přičemž koeficient členu x_n^{n-1} je roven Vandermondovu determinantu D_{n-1} v proměnných x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Součin lineárních výrazů v pravé části rovnice 45 obsahuje x_n^{n-1} s koeficientem 1, tudíž mnohočlen $q(x_1, \dots, x_n)$ nesmí obsahovat x_n . Srovnáme-li koeficienty u x_n^{n-1} na obou stranách rovnice, dostaneme $D_{n-1} = q(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, neboli

$$D_n = D_{n-1}(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}).$$

Použijeme-li tuto rovnost, jen zaměníme n za $n - 1$, pak máme $D_{n-1} = D_{n-2}(x_{n-1} - x_1) \dots (x_{n-1} - x_{n-2})$. Tento výraz pro D_{n-1} dosadíme do vztahu pro D_n a opakujeme tuto úvahu, až se dostaneme k $D_2 = D_1(x_2 - x_1)$, $D_1 = 1$. Závěr je tedy

$$\begin{aligned} D_{n-1} &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \dots (x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) = \\ &= \prod_{i>j} (x_i - x_j). \end{aligned}$$

Rekurentní vztahy

Determinant D_n stupně n se nám může podařit vyjádřit pomocí determinantů D_i , $i < n$ (obvykle po rozvinutí podle řádku či sloupce). Získanou rovnost (viz například 46 či 45) nazýváme *rekurentním vztahem* pro posloupnost D_n .

Z rekurentního vztahu se můžeme pokusit „uhodnout“ přímo „vzorec pro n -tý člen“, tedy vyjádření D_n pouze pomocí n a nikoliv D_{n-1} . Uhodnutý vzorec pak dokážeme obvykle nejsnáze matematickou indukcí. Při hádání nám může pomoci, pokud si vypíšeme prvních několik členů posloupnosti D_n , nebo naopak, když například do vztahu $D_n = f(D_{n-1})$ dosadíme za $D_{n-1} = f(D_{n-2})$.

Často se setkáváme s *lineárními* rekurentními vztahy. Ukážeme, jak u nich lze nalézt explicitní vzorec pro D_n . Nechtě má rekurentní vztah tvar

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, \quad n > 2, \quad (46)$$

kde p, q jsou konstanty nezávislé na n .

Při $q = 0$ se vypočte D_n jako člen geometrické posloupnosti $D_n = p^{n-1}D_1$, kde D_1 je determinant prvního řádu (často je to prvek determinantu D_n ležící v levém horním rohu). Nechť $q \neq 0$ a α, β jsou kořeny *charakteristické rovnice* $x^2 - px - q = 0$. Pak $p = \alpha + \beta$, $q = -\alpha\beta$ a rovnici 46 můžeme vyjádřit jako:

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha (D_{n-1} - \beta D_{n-2}) \quad (47)$$

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) \quad (48)$$

První případ: Nejprve budeme předpokládat, že $\alpha \neq \beta$. Podle formule pro $(n-1)$ -ní člen geometrické posloupnosti najdeme z rovnic 47 a 48

$$\begin{aligned} D_n - \beta D_{n-1} &= \alpha^{n-2} (D_2 - \beta D_1) \\ D_n - \alpha D_{n-1} &= \beta^{n-2} (D_2 - \alpha D_1) \end{aligned}$$

a odtud řešením soustavy dvou lineárních rovnic

$$D_n = \frac{1}{\alpha - \beta} (\alpha^{n-1} (D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1} (D_2 - \alpha D_1))$$

neboli

$$D_n = C_1 \alpha^n + C_2 \beta^n, \quad C_1 = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)}, \quad C_2 = \frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\alpha - \beta)}. \quad (49)$$

Poslední výraz pro D_n se snadno pamatuje: všimněte si, jak se podobá obecnému řešení *lineární diferenciální rovnice* druhého řádu s konstantními koeficienty $y(n) = C_1 e^{\lambda_1 n} + C_2 e^{\lambda_2 n}$. Vztah 49 je sice odvozen pro $n > 2$ ale platí i pro $n = 1, 2$. Konstanty C_1, C_2 lze proto nalézt jednoduše řešením soustavy

$$D_1 = C_1 \alpha + C_2 \beta, \quad D_2 = C_1 \alpha^2 + C_2 \beta^2.$$

Druhý případ: Nechť nyní je $\alpha = \beta \neq 0$. Rovnosti 47 a 48 přejdou v jednu

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha (D_{n-1} - \alpha D_{n-2}),$$

a odtud

$$D_n - \alpha D_{n-1} = A \alpha^{n-2}, \quad (50)$$

kde $A = D_2 - \alpha D_1$.

Zaměníme n za $n-1$, dostaneme $D_{n-1} - \alpha D_{n-2} = A\alpha^{n-3}$ a odtud $D_{n-1} = \alpha D_{n-2} + A\alpha^{n-3}$. Když dosadíme toto do 50, dostaneme $D_n = \alpha^2 D_{n-2} + 2A\alpha^{n-2}$. Opakujeme tento postup ještě několikrát ($(n-3)$ -krát) a dostaneme $D_n = \alpha^{n-1} D_1 + (n-1)A\alpha^{n-2}$ nebo

$$D_n = \alpha^n ((n-1)C_1 + C_2), \quad C_1 = \frac{A}{\alpha^2}, \quad C_2 = \frac{D_1}{\alpha}.$$

Konstanty C_1, C_2 lze opět určit z rovnic $D_1 = \alpha C_2$, $D_2 = \alpha^2(C_1 + C_2)$. Všimněte si opět podobnosti s řešením *lineárních diferenciálních rovnic*, například $y'' - 2y' + y = 0$.

Příklad 5. Vypočteme rekurentní metodou determinant z příkladu 2.

Řešení: Představíme si prvek v pravém dolním rohu determinatu ve tvaru $a_n = x + (a_n - x)$ a pak můžeme determinant napsat jako součet dvou determinantů:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & & x \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x & x & & a_{n-1} & x \\ x & x & \dots & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & 0 \\ x & a_2 & x & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x & x & & a_{n-1} & 0 \\ x & x & \dots & x & a_n - x \end{vmatrix}$$

V prvním determinantu odečteme poslední sloupec od ostatních, čímž dostaneme matici v horním trojúhelníkovém tvaru. Druhý determinant rozložíme podle posledního sloupce

$$D_n = x(a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_{n-1} - x) + (a_n - x)D_{n-1}$$

To je rekurentní vztah. Po dosazení analogického výrazu pro D_{n-1}

$$\begin{aligned} D_n &= x(a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_{n-1} - x) + \\ &\quad + x(a_1 - x)(a_2 - x)\dots(a_{n-2} - x)(a_n - x) + \\ &\quad + D_{n-2}(a_{n-1} - x)(a_n - x). \end{aligned}$$

Opakujeme toto $(n-2)$ -krát, a jelikož $D_1 = a_1 = x + (a_1 - x)$,

dostaneme:

$$\begin{aligned}
 D_n &= x(a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_{n-1} - x) + \\
 &\quad + x(a_1 - x) \dots (a_{n-2} - x)(a_n - x) + \\
 &\quad + \dots + x(a_2 - x) \dots (a_n - x) + \\
 &\quad + (a_1 - x)(a_2 - x) \dots (a_n - x),
 \end{aligned}$$

což odpovídá výsledku příkladu 2.

Příklad 6. Máme spočítat determinant n -tého řádu

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & & 0 \\ 0 & 2 & 5 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}$$

Řešení: Rozložíme D podle první řádky a druhý sčítanec rozložíme dle prvního sloupce. Najdeme tak rekurentní vztah

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}.$$

Rovnice $x^2 - 5x + 6 = 0$ má kořeny $\alpha = 2$, $\beta = 3$, tedy očekáváme $D_n = C_1 2^n + C_2 3^n$ (rovnice 49). Konstanty C_1, C_2 určíme z rovnic $D_1 = 5$, $D_2 = 19$ a dostaneme (srovnejte s příkladem 8.2)

$$D_n = C_1 \alpha^n + C_2 \beta^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

Vyjádření determinantu jako sumy determinantů s využitím linearity

Některé determinanty lze lehce spočítat tak, že je rozložíme na součet determinantů téhož řádu podle věty

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \dots \\ b_{21} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ b_{n1} & a_{n2} & \dots \end{vmatrix}$$

Příklad 7.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & & a_2 + b_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

Řešení: Tento determinant lze vzhledem k prvnímu řádku rozložit na dva determinanty, každý z nich vzhledem k druhé řádce lze opět rozložit na dva atd. Když dojdeme k poslední řádce, dostaneme celkem 2^n determinantů. Každý z nich lze popsat n -ticí (x_1, \dots, x_n) , kde každé číslo je buď nula nebo jednička, $x_i = 0$, resp. $x_i = 1$ znamená, že i -tý řádek je a_i, \dots, a_i , resp. b_1, \dots, b_n .

Dva řádky prvního typu jsou ale úměrné a řádky druhého typu jsou si přímo rovny. Při $n > 2$ každý získaný determinant obsahuje alespoň dva řádky alespoň jednoho typu, a je tedy nulový. Tedy

$$D_1 = a_1 + b_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_n = 0, \quad n > 2.$$

Přičtení konstanty ke všem prvkům matice

Tento postup se používá v těch případech, kdy po přičtení stejného čísla ke všem prvkům matice dostaneme determinant, který lze spočítat a u něhož lze pohodlně určit *algebraické doplňky* všech prvků. Metoda je založena na vlastnosti, že pokud ke všem prvkům A přičteme stejné číslo x , pak se $\det A$ zvětší o x -krát součet algebraických doplňků všech prvků matice A .

Podívejme se na

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} a_{11} + x & \dots & a_{1n} + x \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}$$

Rozložíme D' na dva determinanty vzhledem k první řádce, každý z nich na dva determinanty vzhledem k druhé řádce a pokračujeme, až dostaneme D pomocí součtu 2^n determinantů (podobně jako u příkladu 7). Ty z nich, které obsahují více než jednu řádku prvků

rovných x , jsou rovny nule. Složky obsahující jednu řádku prvků rovných x rozložíme podle této řádky. Dostaneme

$$D' = D + x \sum_{i,j=1} A_{ij},$$

kde A_{ij} je determinant matice A bez i -tého řádku a j -tého sloupce násobený znaménkem $(-1)^{i+j}$, což jsme chtěli dokázat. Výpočet D' tedy vede k výpočtu D a sumy jeho algebraických doplňků.

Příklad 8. Vypočtete determinant D_n z příkladu 2.

Řešení: Odečteme od všech prvků číslo x a dostaneme determinant diagonální matice

$$D' = \begin{vmatrix} a_1 - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - x & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n - x \end{vmatrix}$$

Algebraické doplňky prvků D' , které neleží na hlavní diagonále jsou rovny nule. Pro prvek na diagonále je algebraický doplněk roven součinu všech zbylých prvků na diagonále. Proto

$$D_n = (a_1 - x) \dots (a_n - x) + x \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (a_j - x),$$

což je stejný výsledek jako v příkladu 2.

8.1 Obyčejné determinanty s čísly

Úkol: Spočítejte determinant

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -9 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Zjistěte, jaká metoda je pro vás nejpohodlnější.

Řešení:

1. Zkusíme nejprve rozvoj podle prvního řádku.

$$\begin{aligned}
 D &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -1 & 4 \\ -9 & 2 & 7 \\ -9 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-5) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \\
 &+ 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 5 & -9 & 7 \\ 4 & -9 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 5 & -9 & 2 \\ 4 & -9 & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= 2 \cdot 60 - 5 \cdot 21 + 1 \cdot (-45) + (-2) \cdot 3 = -36.
 \end{aligned}$$

Museli jsme tedy vypočítat čtyři determinanty 3×3 .

2. Většinou si můžeme ušetřit dost práce, pokud nejprve pomocí řádkových úprav vynulujeme jeden sloupec či řádek. Řádkovou úpravou nyní myslíme to, že k libovolnému řádku můžeme přičíst lineární kombinaci *ostatních* řádků. Při takové úpravě se determinant nezmění. Můžeme také libovolný řádek vynásobit číslem λ , ale pak se determinant změní λ -krát (je tudíž vhodné žádat $\lambda \neq 0$).

V našem případě nám dá nejméně práce vynulovat třetí sloupec. Provedeme úpravy $(2) + (1) \rightarrow (2)$, $(3) - 2 \cdot (1) \rightarrow (3)$, $(4) - (1) \rightarrow (4)$ a rozvineme D podle třetího sloupce

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

Jelikož jsme teď už z pohodlně a obáváme se, že i při výpočtu determinantu 3×3 uděláme chybu, provedeme ještě úpravu $(1) - 2 \cdot (2) \rightarrow (1)$. Tím dosáhla námaha potřebná pro výpočet naprostého minima

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot (0 + 12) = -36.$$

3. Pro milovníky *Gaussovy eliminace* existuje ještě další možnost. Pomocí řádkových úprav uvedených v bodě 2 můžeme matici za znakem determinantu převést na horní trojúhelníkový tvar. Determinant

je pak roven součinu čísel na diagonále.

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} 2 \cdot (2) + 3 \cdot (1) \rightarrow (2) \\ 2 \cdot (3) - 5 \cdot (1) \rightarrow (3) \\ (4) - 2 \cdot (1) \rightarrow (4) \end{array} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -9 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 14 \\ 0 & 7 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} (3) + 7 \cdot (2) \rightarrow (3) \\ (4) + (2) \rightarrow (4) \end{array} \\
 & = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 6 & 102 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -36.
 \end{aligned}$$

*KV

8.2 Determinant s řeckými písmeny

Úkol: Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq \beta$ spočtěte determinant řádu n

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

Řešení: Z rozvoje determinantu podle prvního sloupce plyne rekurentní relace

$$D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}.$$

Napišeme-li si výsledek pro několik prvních n ,

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \alpha + \beta \\
 D_2 &= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \\
 D_3 &= \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3,
 \end{aligned}$$

snadno uhadneme výsledek

$$D_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta},$$

který dokážeme indukci.

*TB

8.3 Vandermondův determinant

Úkol: Spočítejte Vandermondův determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Výstraha: x^i zde značí exponent, nikoliv horní index.

Řešení: Tento determinant jsme již velmi rychle spočítali ve 4. příkladu v úvodu této kapitoly. Nyní jej spočítáme znovu „standardní“ metodou.

K výpočtu je bezpodmínečně nutná znalost vzorce pro rozdíl n -tých mocnin.

$$a^n - b^n = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Komentáře k použitým úpravám:

1. první sloupec odečteme od všech ostatních
2. vyškrtáme první sloupec a řádek (rozvoj determinantu)
3. použijeme vzorec pro rozdíl n -tých mocnin
4. z prvního sloupce vytkneme $x_1 - x_0$, z druhého $x_2 - x_0$, atd., až z posledního $x_n - x_0$
5. od druhého řádku odečteme x_0 -násobek prvního řádku, od třetího řádku odečteme x_0^2 -násobek prvního řádku, atd.
6. od třetího řádku odečteme x_0 -násobek druhého řádku, od čtvrtého řádku odečteme x_0^2 -násobek druhého řádku, atd.
7. postupně výše uvedeným způsobem „vyčistíme“ celý determinant
8. dostali jsme opět Vandermondův determinant, ale o stupeň menší, celý postup znouvu zopakujeme

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_0 & x_1 - x_0 & \cdots & x_n - x_0 \\ x_0^2 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^2 - x_0^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n - x_0^n & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{vmatrix} \stackrel{(2),(3)}{=} \\
& \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & \cdots & x_n - x_0 \\ (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) & \cdots & (x_n - x_0)(x_n + x_0) \\ (x_1 - x_0)(x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2) & \cdots & (x_n - x_0)(x_n^2 + x_nx_0 + x_0^2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_1 - x_0)(x_1^{n-1} + \cdots + x_0^{n-1}) & \cdots & (x_n - x_0)(x_n^{n-1} + \cdots + x_0^{n-1}) \end{vmatrix} \\
& \stackrel{(4)}{=} \prod_{i=1}^n (x_i - x_0) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 + x_0 & \cdots & x_n + x_0 \\ x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2 & \cdots & x_n^2 + x_nx_0 + x_0^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} + \cdots + x_0^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} + \cdots + x_0^{n-1} \end{vmatrix} \stackrel{(5)}{=} \\
& \prod_{i=1}^n (x_i - x_0) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ x_1^2 + x_1x_0 & \cdots & x_n^2 + x_nx_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} + \cdots + x_1x_0^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} + \cdots + x_nx_0^{n-2} \end{vmatrix} \stackrel{(6)}{=} \\
& \prod_{i=1}^n (x_i - x_0) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} + \cdots + x_1^2x_0^{n-3} & \cdots & x_n^{n-1} + \cdots + x_n^2x_0^{n-3} \end{vmatrix} \stackrel{(7)}{=} \\
& \stackrel{(7)}{=} \prod_{i=1}^n (x_i - x_0) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \stackrel{(8)}{=}
\end{aligned}$$

$$\prod_{i=1}^n (x_i - x_0) \prod_{i=2}^n (x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \stackrel{(8)}{=} \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^n (x_i - x_j)$$

*VP

8.4 Výpočet cirkulantu využitím znalosti spektra

Úkol: Vypočtěte determinant cyklické matice (cirkulantu)

$$\det C = \det \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_n & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_n & c_0 & \cdots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n & c_0 \end{pmatrix}$$

Řešení: Budeme se zajímat o determinant součinu matice C s *Van-dermondivou maticí* V (viz příklad 8.3). Prvky x_m ($m = 0, \dots, n$) v matici V zvolíme tak, že m -tý prvek bude m -tým řešením rovnice $x^{n+1} = 1$. Bude tedy $x_m = \varepsilon_m = \exp \frac{2\pi i}{n+1} m$, kde i je imaginární jednotka a $m = 0, \dots, n$.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_{n-1} & \varepsilon_n \\ \varepsilon_0^2 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \cdots & \varepsilon_{n-1}^2 & \varepsilon_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon_0^{n-1} & \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} & \varepsilon_n^{n-1} \\ \varepsilon_0^n & \varepsilon_1^n & \varepsilon_2^n & \cdots & \varepsilon_{n-1}^n & \varepsilon_n^n \end{pmatrix}$$

Základním pozorováním, které povede k vyřešení úlohy je překvapivá rovnost

$$\varepsilon_m^n \varepsilon_m = \varepsilon_m^{n+1} = 1, \quad (51)$$

což platí pro každé m . Dále budeme chtít použít

$$\det CV = \det C \det V.$$

Součin matic na levé straně můžeme vypočítat přímo (vypisujeme pouze první sloupec)

$$\begin{vmatrix} c_0 + c_1\varepsilon_0 + c_2\varepsilon_0^2 + \cdots + c_{n-1}\varepsilon_0^{n-1} + c_n\varepsilon_0^n & \cdots \\ c_n + c_0\varepsilon_0 + c_1\varepsilon_0^2 + \cdots + c_{n-2}\varepsilon_0^{n-1} + c_{n-1}\varepsilon_0^n & \cdots \\ c_{n-1} + c_n\varepsilon_0 + c_0\varepsilon_0^2 + \cdots + c_{n-2}\varepsilon_0^{n-1} + c_{n-1}\varepsilon_0^n & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ c_1 + c_2\varepsilon_0 + c_3\varepsilon_0^2 + \cdots + c_n\varepsilon_0^{n-1} + c_0\varepsilon_0^n & \cdots \end{vmatrix}$$

Užijeme vztah 51, označíme $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n$ a dostaneme

$$\det CV = \begin{vmatrix} f(\varepsilon_0)1 & f(\varepsilon_1)1 & \cdots & f(\varepsilon_n)1 \\ f(\varepsilon_0)\varepsilon_0 & f(\varepsilon_1)\varepsilon_1 & \cdots & f(\varepsilon_n)\varepsilon_n \\ f(\varepsilon_0)\varepsilon_0^2 & f(\varepsilon_1)\varepsilon_1^2 & \cdots & f(\varepsilon_n)\varepsilon_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\varepsilon_0)\varepsilon_0^n & f(\varepsilon_1)\varepsilon_1^n & \cdots & f(\varepsilon_n)\varepsilon_n^n \end{vmatrix}.$$

To není nic jiného než $\det V \prod_{m=0}^n f(\varepsilon_m)$, z každého sloupce vytýkáme $f(\varepsilon_l)$. Právě získaný výsledek má být ovšem také roven $\det C \det V$, takže

$$\det C \det V = \prod_{m=0}^n f(\varepsilon_m) \det V$$

Determinant Vandermondovy matice, která má různé prvky, je nenulový, a proto jím může celou rovnost zkrátit

$$\det C = \prod_{m=0}^n f(\varepsilon_m), \quad f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k, \quad \varepsilon_m = \exp \frac{2\pi im}{n+1}.$$

*VP

8.5 Zobecněná Hilbertova matice

Úkol: Spočítejte determinant a inverzní matici k

$$B_{kl} = \frac{1}{c_k + d_l}, \quad k, l = 1, \dots, n.$$

Volba $c_n = n$, $d_n = n - 1$ vede k *Hilbertově matici*.

Řešení: Nejprve budeme hledat inverzní matici. Vypočítáme *minor* B^{ij} . Vynulujeme j -tý sloupec všech řádků matice B tím, že odečteme příslušný násobek i -tého řádku, který jediný zůstává nezměněn. Tuto operaci můžeme napsat pro element B_{kl} , $k \neq i$ jako

$$\frac{1}{c_k + d_l} \rightarrow \frac{1}{c_k + d_l} - \frac{c_i + d_j}{c_k + d_j} \frac{1}{c_i + d_l} = \frac{1}{c_k + d_l} \left(\frac{c_k - c_i}{c_k + d_j} \frac{d_l - d_j}{c_i + d_l} \right).$$

Spočteme determinant B_{kl} rozvinutím právě odvozené ekvivalentní matice podle j -tého sloupce. Z linearity determinantu plyne, že z každého řádku můžeme vytknout $\frac{c_k - c_i}{c_k + d_j}$ a z každého sloupce $\frac{d_l - d_j}{d_l + c_i}$: zbude matice B^{ij} , která je totožná s B s vyškrtnutým i -tým řádkem a j -tým sloupcem. Dostaneme tak

$$\det B = \frac{(-1)^{i+j}}{c_i + d_j} \left(\prod_{k \neq i} \frac{c_k - c_i}{c_k + d_j} \right) \left(\prod_{l \neq j} \frac{d_l - d_j}{d_l + c_i} \right) \det B^{ij}. \quad (52)$$

B^{ij} vystupuje také v definici inverzní matice (viz také příklad 6.5)

$$(B^{-1})_{ji} = (-1)^{i+j} \frac{\det B^{ij}}{\det B}.$$

Užitím (52) tedy dostaneme pro inverzní matici předpis

$$(B^{-1})_{ji} = (c_i + d_j) \prod_{k \neq i} \frac{c_k + d_j}{c_k - c_i} \prod_{l \neq j} \frac{d_l + c_i}{d_l - d_j}.$$

Všimněme si, že $\det B^{ii}$ je roven determinantu matice B , z níž jsme vynechali i -tý řádek a i -tý sloupec. Vzorec (52) je pak rekurentním vztahem pro $\det B$. Jeho n -násobnou aplikací dostaneme

$$\det B = \prod_{i=1}^n \frac{1}{c_i + d_i} \prod_{k < i} \frac{c_k - c_i}{c_k + d_i} \frac{d_k - d_i}{d_k + c_i} = \frac{\prod_{i < k} (c_i - c_k)(d_i - d_k)}{\prod_{i,k} (c_i + d_k)}$$

*BK

8.6 Rezultant

Úkol: Rezultantem dvou polynomů $f(x) = \sum_0^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_0^s b_j x^j$, jejichž kořeny označme α_i , resp. β_j , se nazývá výraz

$$\begin{aligned} R(f, g) &= a_n^s b_s^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^s (\alpha_i - \beta_j) = a_n^s \prod_{i=1}^n g(\alpha_i) = \\ &= (-1)^{ns} b_s^n \prod_{j=1}^s f(\beta_j) = (-1)^{ns} R(g, f). \end{aligned}$$

Tedy resultant je nulový, právě když mají polynomy f a g společný kořen. Dokažte, že resultant lze vyjádřit ve formě determinantu matice řádu $n + s$, která má tvar

$$D = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \cdots & \circ \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ \circ & \cdots & \circ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ b_s & b_{s-1} & \cdots & b_1 & b_0 & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & b_s & b_{s-1} & \cdots & b_1 & b_0 & \cdots & \circ \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ \circ & \cdots & \circ & b_s & b_{s-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{pmatrix},$$

kde „ a -série” řádků čítá s členů a „ b -série” n členů. Při důkazu vám možná pomůže součin matic DM , kde M je Vandermondova matice ze všech kořenů obou polynomů

$$M = \begin{pmatrix} \beta_1^{n+s-1} & \beta_2^{n+s-1} & \cdots & \beta_s^{n+s-1} & \alpha_1^{n+s-1} & \cdots & \alpha_n^{n+s-1} \\ \beta_1^{n+s-2} & \beta_2^{n+s-2} & \cdots & \beta_s^{n+s-2} & \alpha_1^{n+s-2} & \cdots & \alpha_n^{n+s-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_s^2 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_s & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: Determinant matice M je, jak známo (viz příklad 8.3), ro-

ven

$$\det M = \prod_{i < j}^s (\beta_i - \beta_j) \prod_{j=1}^s \prod_{i=1}^n (\beta_j - \alpha_i) \prod_{i < j}^n (\alpha_i - \alpha_j) =$$

$$= a_n^{-s} b_s^{-n} R(g, f) V(f) V(g).$$

Zde jsme označili $V(f)$ a $V(g)$ Vandermondovy determinanty složené z kořenů pouze polynomu f resp. g . Chceme využít toho, že determinant součinu je součinem determinantů, potřebujeme tedy vědět, že DM je

$$\begin{pmatrix} \beta_1^{s-1} f(\beta_1) & \cdots & \beta_s^{s-1} f(\beta_s) & \circ & \cdots & \circ \\ \beta_1^{s-2} f(\beta_1) & \cdots & \beta_s^{s-2} f(\beta_s) & \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1 f(\beta_1) & \cdots & \beta_s f(\beta_s) & \circ & \cdots & \circ \\ f(\beta_1) & \cdots & f(\beta_s) & \circ & \cdots & \circ \\ \circ & \cdots & \circ & \alpha_1^{n-1} g(\alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-1} g(\alpha_n) \\ \circ & \cdots & \circ & \alpha_1^{n-2} g(\alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-2} g(\alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \cdots & \circ & \alpha_1 g(\alpha_1) & \cdots & \alpha_n g(\alpha_n) \\ \circ & \cdots & \circ & g(\alpha_1) & \cdots & g(\alpha_n) \end{pmatrix}$$

Determinant blokově diagonální matice je roven součinu determinantů bloků a navíc lze z každého sloupce vytknout $f(\beta_i)$ či $f(\alpha_i)$, takže

$$\det(DM) = \left[\prod_{j=1}^s f(\beta_j) \right] V(g) \left[\prod_{i=1}^n g(\alpha_i) \right] V(f) =$$

$$= b_s^{-n} R(g, f) V(g) a_n^{-s} R(f, g) V(f).$$

Když toto srovnáme s vyjádřením determinantu M , vidíme, že opravdu $\det D = R(f, g)$.

Poznamenejme, že rezultantu je možné užít k detekci více-násobných kořenů, a to v podobě $R(f, f')$. *DŠ

8.7 Poloha bodu vůči nadrovině

Úkol: Necht' $x^1, \dots, x^n, y \in \mathbb{R}^n$, $x^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$ jsou (navzájem různé) body v obecné poloze. Určete, jak souvisí znaménko determinantu následující matice s polohou bodu y vzhledem k nadrovině určené body x^1, \dots, x^n (obrázek 14)

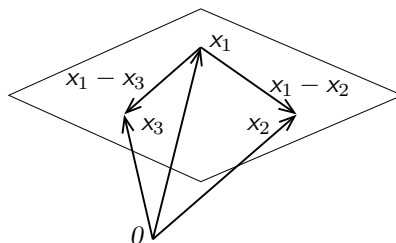
$$\begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^n & \dots & x_n^n & 1 \\ y_1 & \dots & y_n & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: Nejprve si povšimněme, že determinant ze zadání příkladu je právě tehdy nulový, když daný bod y leží v nadrovině definované body x^1, \dots, x^n (označme ji μ).

Tento determinant vymizí totiž právě tehdy, pokud jsou řádky matice lineárně závislé, což je právě tehdy, když lze poslední řádek vyjádřit jako lineární kombinaci řádků ostatních (prvních n řádků je lineárně nezávislých, neboť body x^1, \dots, x^n jsou dle zadání příkladu v obecné poloze). Determinant je nulový tedy právě tehdy, pokud existují koeficienty a_i ($1 \leq i \leq n$) takové, že platí $y = \sum_{i=1}^n a_i x^i$ a zároveň $1 = \sum_{i=1}^n a_i$, což je právě tehdy, když y je *afinní kombinací* bodů x^1, \dots, x^n , neboli právě tehdy, když y leží v nadrovině μ . Toto tvrzení se opírá o skutečnost, že libovolný bod nadroviny lze zapsat jako

$$x^1 + \sum_{i=2}^n b_i (x^i - x^1), \quad b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}. \quad (53)$$

V této lineární kombinaci je součet všech koeficientů právě $1 + \sum_i b_i - \sum_i b_i = 1$. Množina definovaná vztahem 53 se nazývá *afinní*



Obrázek 14: Nadrovina v \mathbb{R}^3 (tedy rovina) definovaná body x^1, x^2, x^3 . Algebraicky je tato množina popsána lineárními kombinacemi 53.

prostor (dimenze $n - 1$). Pokud tato množina neobsahuje nulový vektor, *není* to vektorový prostor (to je například když $x^1 \neq 0$ a $x^1 \notin \mathcal{L}(\{x^2, \dots, x^n\})$).

Nyní si rozmyslíme, že pro všechny body ve stejném otevřeném poloprostoru určeném nadrovinou μ je determinant ze zadání příkladu nenulový a má stejné znaménko. Zvolme libovolný bod y^0 neležící v μ a necht' v je libovolný vektor z \mathbb{R}^n . Necht' je funkce $f(\lambda)$ definována následovně:

$$f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^n & \dots & x_n^n & 1 \\ y_1^0 + \lambda v_1 & \dots & y_n^0 + \lambda v_n & 1 \end{pmatrix}$$

Zřejmě $f(0)$ je hodnota diskutovaného determinantu v bodě y^0 ; rozvojem determinantu dle posledního řádku snadno nahlédneme, že funkce f je lineární funkcí v proměnné λ . Necht' je nyní y libovolný bod v \mathbb{R}^n neležící v μ a necht' $v = y - y^0$. Pokud y a y^0 leží ve stejném otevřeném poloprostoru určeném nadrovinou μ , potom $f(0)$ a $f(1)$ mají stejné znaménko, jinak by totiž funkce f musela být nulová pro nějaké $\lambda \in (0, 1)$, potom by ale bod $y^0 + \lambda v$ byl bodem nadroviny μ , a tedy by body y^0 a $y = y^0 + v$ by ležely v různých otevřených poloprostorech určených nadrovinou μ . Pokud naopak body y a y^0 leží v různých otevřených poloprostorech určených nadrovinou μ , potom existuje $\lambda \in (0, 1)$ takové, že bod $y^0 + \lambda v$ leží v nadrovině μ , a tedy $f(\lambda) = 0$. Potom ale z linearity funkce f plyne, že hodnoty $f(0)$ a $f(1)$ mají různé znaménko.

Naše úvahy lze tedy shrnout následovně: Determinant ze zadání příkladu je nulový právě tehdy, když y leží v nadrovině určené body x^1, \dots, x^n . Navíc pro všechny body ležící ve stejném otevřeném poloprostoru určeném touto nadrovinou má stejné znaménko. *DK

8.8 Cauchy–Binetova věta

Úkol: Necht' A a B jsou matice typu $n \times m$ pro $m \geq n$ a A_I , resp. B_I , pro $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ je matice vzniklá z A , resp. B , pokud v ní ponecháme pouze sloupce s indexy z množiny I . Dokažte, že potom

platí

$$\det(AB^T) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ |I|=n}} \det(A_I B_I^T). \quad (54)$$

Řešení: Rozepsáním definice determinantu a součinu matic okamžitě zjistíme, že levá strana dokazované rovnosti je rovna:

$$\begin{aligned} \det(AB^T) &= \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n (AB^T)_{i, \pi(i)} = \\ &= \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n \sum_{k_i=1}^m A_{i, k_i} B_{\pi(i), k_i} = \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^m \prod_{i=1}^n A_{i, k_i} B_{\pi(i), k_i} \end{aligned}$$

Zjednodušíme si zápis tím, že v prostřední sumě budeme počítat přes všechny funkce $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ (rozmyslete si tento krok)

$$\begin{aligned} \det(AB^T) &= \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \sum_f \prod_{i=1}^n A_{i, f(i)} B_{\pi(i), f(i)} = \\ &= \sum_f \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n A_{i, f(i)} B_{\pi(i), f(i)}. \end{aligned}$$

Ukážeme, že pokud funkce f není prostá, pak je příslušný sčítanec ve výše uvedené sumě nulový. Nechť tedy $f(i_1) = f(i_2)$ pro $i_1 \neq i_2$ a nechť permutace π' je π pozměněná pouze pro i_1 a i_2 tak, že $\pi'(i_1) \stackrel{\text{df}}{=} \pi(i_2)$ a $\pi'(i_2) \stackrel{\text{df}}{=} \pi(i_1)$. Protože sčítáme přes všechny permutace, můžeme každou permutaci π nahradit jí odpovídající π' , na všechny se dostane⁴³.

$$\begin{aligned} \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n A_{i, f(i)} B_{\pi(i), f(i)} &= \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi' \prod_{i=1}^n A_{i, f(i)} B_{\pi'(i), f(i)} = \\ &= \sum_{\pi} -\operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n A_{i, f(i)} B_{\pi'(i), f(i)} = - \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n A_{i, f(i)} B_{\pi(i), f(i)} \end{aligned}$$

⁴³Toto je typický příklad počítání přes konečnou grupu. Platí totiž $\mathbb{G} = \{a_1, \dots, a_n\} = \{ba_1, \dots, ba_n\}$, kde b je libovolný prvek grupy \mathbb{G} .

V posledním kroku jsme použili zaměnitelnost $\{[\pi(i_1), f(i_1)], [\pi(i_2), f(i_2)]\} = \{[\pi'(i_2), f(i_2)], [\pi'(i_1), f(i_1)]\}$, která se opírá o $f(i_1) = f(i_2)$. Porovnáním levé a pravé strany ihned zjistíme, že musí platit

$$\sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n A_{i, f(i)} B_{\pi(i), f(i)} = 0,$$

samozeřejmě pouze pokud f není prostá.

Můžeme tedy předpokládat, že všechny funkce $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$, přes které se sčítá, jsou prosté, a tedy rozepsat pravou stranu následovně:

$$\det(AB^T) = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ |I|=n}} \sum_{f(\{1, \dots, n\})=I} \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n A_{i, f(i)} B_{\pi(i), f(i)}.$$

Nyní již zbývá jen zaměnit sumy a znovu si připomenout definici součinu matic

$$\begin{aligned} \det(AB^T) &= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ |I|=n}} \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \sum_{f(\{1, \dots, n\})=I} \prod_{i=1}^n A_{i, f(i)} B_{\pi(i), f(i)} = \\ &= \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ |I|=n}} \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n (A_I B_I^T)_{i, \pi(i)} = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ |I|=n}} \sum_I \det(A_I B_I^T). \end{aligned}$$

Vztah 54, který jsme právě dokázali, má pěknou geometrickou interpretaci. Pokud položíme $B = A$ a řádky matice A chápeme jako n vektorů z \mathbb{R}^m , $m \geq n$, pak $\det(AA^T)$ je kvadrát n -rozměrného objemu rovnoběžnostěny P definovaného těmito vektory. Toto tvrzení je triviální pro $n = m$ (pak je $\det(AA^T) = (\det A)^2$), pro $n < m$ na něj lze narazit při integraci přes n -dimenzionální plochu v \mathbb{R}^m (AA^T je *Grammova matice*).

Determinanty na pravé straně (54) souvisí podobně s ortogonálními průměty P do $V_I = \mathcal{L}(\{e_i, i \in I\})$, kde e_i je vektor ze samých nul a s jedničkou na i -tém místě (to jsou pak m -rozměrné rovnoběžnostěny v m -rozměrném prostoru). Takové promítání se dělá jednoduše tak, že z promítaného vektoru vynecháme všechny souřadnice, jejichž index není v I .

Například pro $m = 3$ a $n = 2$ říká (54), že kvadrát plochy kosočtverce K definovaného vektory $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ je roven součtu kvadrátů ploch kosočtverců, které vzniknou průmětem K do rovin x_1x_2 (V_{12} v terminologii předchozího odstavce), x_2x_3 (V_{23}) a x_1x_3 (V_{13}).

Rovnici (54) můžeme také chápat jako jisté *zobecnění Pythagorovy věty*, neboť pro $m = 2$ a $n = 1$ dává tato rovnice známé tvrzení $|v|^2 = v_1^2 + v_2^2$. *DK

9 Naše první vlastní čísla

9.1 Fibonacciho posloupnost

Úkol: Nalezněte explicitní vzorec pro n -tý člen Fibonacciho posloupnosti, která je definovaná počátečními podmínkami $a_1 = a_2 = 1$ a rekurzivním předpisem $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ (tedy $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$). Spočtete limitu podílu a_n/a_{n-1} pro $n \rightarrow \infty$. Návod: najděte zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(a_{n-1}, a_n) = (a_n, a_{n+1})$ a diagonalizujte jej.

Poznámka: Úlohu také lze vyřešit, aniž bychom zmínili pojem „diagonalizace zobrazení“. V úvodu ke kapitole 8 jsme odvodili vztah 49, který lze použít pro libovolnou posloupnost definovanou lineárním rekurentním vztahem $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$. Metoda, kterou použijeme nyní, je početně stejně pracná jako odvození v kapitole 8. Její výhodou je ale systematickosti a to, že používá standardní nástroj lineární algebry, vlastní čísla.

Řešení: Díky linearitě předpisu $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ lze posloupnost popsat pomocí lineárního zobrazení

$$f: \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matici A nyní zdiagonalizujeme; že to půjde, zaručuje její symetrie.

Charakteristickou rovnicí $0 = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 1$ řeší vlastní čísla

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_+ \doteq 1,618, \quad \lambda_- \doteq -0,618.$$

Vlastní vektory v_{\pm} , které splňují rovnici $(A - \lambda_{\pm} I)v_{\pm} = 0$, mají (až na libovolný násobek) tvar

$$v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix}, \quad v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix}.$$

a tyto vektory je třeba zapsat jako sloupce matice C do formule diagonalizace $A = CDC^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_- & 1 \\ \lambda_+ & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (55)$$

Inverzní matici C^{-1} rozměru 2×2 jsme spočetli jako ostřílení pionýři z hlavy podle Čihákova vzorce:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Matici A^n , přiřazující $(a_0, a_1)^T$ vektor $(a_n, a_{n+1})^T$, získáme z (55) lehce:

$$\begin{pmatrix} \circ & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+^n & \circ \\ \circ & \lambda_-^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_- & 1 \\ \lambda_+ & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} = \dots$$

Jedno maticové násobení nám dává

$$\dots = \begin{pmatrix} 1 \cdot \lambda_+^n & 1 \cdot \lambda_-^n \\ \lambda_+ \cdot \lambda_+^n & \lambda_- \cdot \lambda_-^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_- & 1 \\ \lambda_+ & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (56)$$

a jelikož $a_0 = a_2 - a_1 = 0$ a $a_1 = 1$, výsledek a_n lze odečíst na pozici 12 — zajímá nás horní složka vektoru $(a_n, a_{n+1})^T = A^n(a_0, a_1)^T = A^n(0, 1)^T$ a vidíme $a_n = (A^n)_{12}a_1$.

Prvek matice (56) v pravém horním rohu je

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_+^n - \lambda_-^n). \quad (57)$$

Všimněte si, že pro velká n lze zanedbat druhý člen, a tudíž poměr a_n/a_{n-1} se asymptoticky blíží právě k vlastnímu číslu $\lambda_+ \doteq 1,618$, jak jsme mohli očekávat od chvíle, kdy jsme spočítali vlastní čísla. Ptáte se proč? Násobit nějaký vektor v maticí A znamená zapsat jej jako $\alpha v_+ + \beta v_-$ a první složku násobit λ_+ a druhou λ_-

$$A(\alpha v_+ + \beta v_-) = \lambda_+ \alpha v_+ + \lambda_- \beta v_-.$$

Takto tedy vypadá *diagonalizované zobrazení*⁴⁴ A . Při násobení vektoru maticí A^n zaměníme λ_{\pm} za λ_{\pm}^n a vidíme, že ve výsledku bude dominovat složka příslušná největšímu vlastnímu číslu (srovnejte s příkladem 14.1). Exaktně zapsáno $A^n(a_1, a_0)^T = \lambda_+^n(a_1, a_0)^T + o(\lambda_+^n) \cdot (1, 1)^T$, a tudíž $a_{n+1}/a_n = \lambda_+^{n+1}/\lambda_+^n + o(1) = \lambda_+ + o(1)$.

Uvedenému poměru se říká *zlatý řez*, je to zároveň poměr stran obdélníka, z něhož po odříznutí čtverce zbude obdélník původnímu podobný, což Fibonacciho posloupnost napodobuje. *LM

⁴⁴Věta o *spektrálním rozkladu* nám zaručuje, že takovou diagonalizaci lze provést pro libovolný hermitovský operátor ($A^\dagger = A$; stačí dokonce pouze, aby byl operátor normální, $AA^\dagger = A^\dagger A$).

9.2 Gershgorinova věta

Úkol: Necht' A je matice typu $n \times n$. Necht' K_i je kruh v komplexní rovině se středem v bodě A_{ii} a poloměru $r_i = \sum_{j \neq i} |A_{ij}|$. Necht' $K = \bigcup_i K_i$. Dokažte, že všechna vlastní čísla matice A leží v množině K (Gershgorinova věta). Množina K se nazývá Gershgorinova množina a K_i se nazývají Gershgorinovy kruhy.

Pomocí této věty dokažte následující dvě tvrzení

1. Necht' A je ostře diagonálně dominantní matice, tedy

$$\forall i : |A_{ii}| > \sum_{j \neq i} |A_{ij}|. \quad (58)$$

Potom je A regulární.

2. Hermitovská ($A^\dagger = A$) diagonálně dominantní (neostrá nerovnost v definici 58) matice s kladnými prvky na diagonále je pozitivně semidefinitní. Pokud je matice dokonce ostře diagonálně dominantní, potom je pozitivně definitní.

Řešení: Necht' v je libovolný vlastní vektor matice A příslušný k vlastnímu číslu λ . Necht' je jeho k -tá složka největší (v absolutní hodnotě). Z definice násobení matic ihned plyne: $\lambda v_k = \sum_i A_{ki} v_i$. Tedy platí:

$$\begin{aligned} (\lambda - A_{kk})v_k &= \sum_{i \neq k} A_{ki} v_i \\ |\lambda - A_{kk}| |v_k| &= \left| \sum_{i \neq k} A_{ki} v_i \right| \\ |\lambda - A_{kk}| |v_k| &\leq \sum_{i \neq k} |A_{ki}| |v_i| \\ |\lambda - A_{kk}| |v_k| &\leq \sum_{i \neq k} |A_{ki}| |v_k| \\ |\lambda - A_{kk}| &\leq \sum_{i \neq k} |A_{ki}| \end{aligned}$$

Tedy $\lambda \in K_k$ a tedy všechna vlastní čísla matice A leží v Gershgorinově množině.

1. Pokud je matice A ostře diagonálně dominantní, potom žádný její Gershgorinův kruh neobsahuje nulu. Vlastní čísla jsou tedy nenulová a matice A je regulární.

2. Hermitovské matice mají pouze reálná vlastní čísla. Pokud je taková matice diagonálně dominantní (resp. ostře diagonálně dominantní) a na diagonále má kladná čísla, potom její Gershgorinova množina obsahuje pouze nezáporná (resp. kladná) reálná čísla. Taková matice je tedy pozitivně semidefinitní (resp. definitní).

*DK

9.3 Vlastní čísla jedné obyčejné matice

Úkol: J je matice typu $n \times n$ se samými jedničkami ($J_{ij} = 1$). Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice $x \cdot I + yJ$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Určete determinant této matice.

Řešení: Libovolný nenulový vektor je vlastním vektorem matice I a příslušným vlastním číslem je jednička. Matice I má tedy jediný vlastní podprostor a tím je celý prostor. Matice J má jednonásobné vlastní číslo n (příslušné vlastní vektory jsou tvaru (α, \dots, α) , $\alpha \neq 0$) a $(n - 1)$ -násobné vlastní číslo 0 (příslušné vlastní vektory jsou všechny vektory, jejichž složky se sčítají na nulu). Protože, vlastní podprostory matice J jsou podprostory (jediného) vlastního podprostoru matice I , můžeme shrnout:

- Pro $y = 0$ má matice n -násobné vlastní číslo x a příslušné vlastní vektory jsou všechny nenulové vektory.
- Pro $y \neq 0$ má matice jednonásobné vlastní číslo $x + ny$, příslušné vlastní vektory jsou všechny nenulové vektory tvaru (α, \dots, α) , a dále $(n - 1)$ -násobné vlastní číslo x , příslušné vlastní vektory jsou všechny vektory, jejichž složky se sčítají na nulu.

Determinant matice je součin vlastních čísel, tedy $x^{n-1}(x + ny)$. Srovnejte s příkladem 2 v úvodu kapitoly 8. Všimněte si také, že součet vlastních čísel je $n(x + y)$, tedy roven stopě matice, jak má být.

*DK

9.4 Vlastní čísla pro začátečníky

Úkol: Je dána matice A :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

- Určete spektrum A (nalezněte vlastní čísla A).
- Nalezněte vlastní vektory A .
- Určete Jordanův kanonický tvar J_A matice A a matici Q tak, aby platilo $A = QJ_AQ^{-1}$.

Řešení:

a) *Spektrum* matice A , značeno $\sigma(A)$, je množina kořenů charakteristického polynomu $\chi(\lambda) \equiv \det(A - \lambda)$. Tento polynom lze spočítat buď přímo, nebo pomocí lemmatu (srovnejte s příkladem 9.10)

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + \text{Tr } A \cdot \lambda^2 - (A_1 + A_2 + A_3) \cdot \lambda + \det A,$$

A_i je determinant matice vzniklé z A vypuštěním i -tého řádku a i -tého sloupce. Takto dostáváme

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3),$$

tedy $\sigma(A) = \{1, 2, 3\}$. Při hledání kořenů $\chi(\lambda)$ jsme nejprve zkusmo našli $\lambda = 1$ a pak jsme vydělili $\chi(\lambda)/(\lambda - 1) = -\lambda^2 + 5\lambda - 6$.

b,c) Protože jsou všechna vlastní čísla jednonásobná, je matice A diagonalizovatelná. Matice Q pak bude mít jako sloupce vlastní vektory příslušné jednotlivým vlastním číslům.

Pokud je v vlastním vektorem A příslušejícím vlastnímu číslu λ , znamená to $(A - \lambda)v = 0$. Pro naše tři vlastní čísla to představuje tři soustavy dvou rovnic pro tři neznámé (jednu složku vždy volíme, vlastní vektor lze vždy násobit libovolným číslem). Řešením postupně dostaneme vlastní vektory A , například

$$\lambda = 1 : v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2 : v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 3 : v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezli jsme tedy

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

*PK

9.5 Vlastní čísla matice 4×4

Úkol: Je dána matice A :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -10 & 15 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Určete charakteristický polynom $\chi(\lambda)$ a spektrum (množinu vlastních čísel) $\sigma(A)$ matice A .

- Vyjděte přímo z definice $\chi(\lambda)$.
- Využijte vzorce (pro matice 4×4)

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) = & \lambda^4 - \lambda^3 \cdot \text{Tr } A + \\ & + \lambda^2 \cdot (A_{1,2} + A_{1,3} + A_{1,4} + A_{2,3} + A_{2,4} + A_{3,4}) - \\ & - \lambda \cdot (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + \det A. \end{aligned} \quad (59)$$

$A_{i,j}$ je determinant matice typu 2×2 vzniklé z A vypuštěním dvou sloupců a stejných dvou řádků (i -tý a j -tý sloupec, i -tý a j -tý řádek). A_k je determinant matice typu (3×3) vytvořené z A vypuštěním sloupce a stejného řádku (i -tý sloupec a i -tý řádek). Srovnajte s příkladem 9.10.

- Prohazováním řádků a sloupců v determinantu převed'te matici $A - \lambda$ na blokově horní trojúhelníkovou matici a použijte lemmatu

$$\det(A - \lambda) = \det \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} = \det X \det Z,$$

v němž X , Z jsou obecně libovolné čtvercové matice, jejichž dimenze dávají dohromady dimenzi A . V našem případě to budou matice 2×2 a 2×2 .

Řešení:

a) $\chi(\lambda) \equiv \det(A - \lambda)$, determinant snadno spočteme rozvojem podle prvního sloupce (pouze jeden nenulový člen) a pomocí *Sarrusova pravidla*:

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 5 & -10 & 15 \\ 0 & 6 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 8 - \lambda & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 2) \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 0 & 2 \\ 2 & 8 - \lambda & -2 \\ 2 & 0 & 6 - \lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -(2 + \lambda)[(6 - \lambda) \cdot (8 - \lambda) \cdot (6 - \lambda) - 32 + 4\lambda] =$$
$$= -(2 + \lambda)[- \lambda^3 + 20 \cdot \lambda^2 - 128 \cdot \lambda + 256]$$

Při rozkladu polynomu v hranatých závorkách⁴⁵ (ozn. $Q(\lambda)$) můžeme využít *věty o racionálních kořenech polynomu s celočíselnými koeficienty*:

Nechť $P(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i$. Je-li $\lambda = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ kořenem $P(x)$, pak p dělí a_0 a q dělí a_n .

V našem případě to znamená, že pokud existuje λ nějaký racionální kořen $Q(\lambda)$, pak $\lambda \in \{\pm 2, \pm 4, \dots, \pm 256\}$. Postupným dosazováním zjistíme, že $\lambda = 4$ je kořenem $Q(\lambda)$. Pak $Q(\lambda)/(\lambda - 4) = -\lambda^2 + 16\lambda - 64 = -(\lambda - 8)^2$, a tedy

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 8)^2(\lambda - 4)(\lambda + 2), \text{ odkud } \sigma(A) = \{-2, 4, 8\}$$

b) Hodnoty $A_{i,j}$ (hlavních minorů 2×2) jsou $A_{1,2} = 48$, $A_{1,3} = 32$, $A_{1,4} = 48$, $A_{2,3} = -12$, $A_{2,4} = -16$, $A_{3,4} = -12$. Hlavní minory 3×3 jsou $A_1 = 256$, $A_2 = -96$, $A_3 = -64$, $A_4 = -96$ a konečně $\det A = -512$. Dosadíme do vzorce 59 a dostaneme charakteristický polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 - 18\lambda^3 + 88\lambda^2 - 512,$$

o němž díky větě z bodu b) víme, že jeho racionální kořeny leží v $\{\pm 2, \pm 4, \pm 8, \dots, \pm 256\}$. S jistou dávkou vytrvalosti se dopracujeme i tentokrát k $\sigma(A) = \{-2, 4, 8\}$.

⁴⁵Pokud jsme si náhodou nevšimli, že lze z hranaté závorky vytknout $\lambda - 8$.

c) Pokud prohodíme druhý a třetí řádek a potom druhý a třetí sloupec v matici $A - \lambda$, dostaneme pro $\chi(\lambda)$

$$-\begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & -10 & 15 \\ 0 & 2 & 8-\lambda & -2 \\ 0 & 6-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -10 & 5 & 15 \\ 0 & 8-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix}.$$

Nezapomněli jsme přitom měnit znaménko za každé prohození. Toto je blokově horní trojúhelníkový tvar, takže lze použít naše lemma:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -10 \\ 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(8-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 32)$$

Když rozložíme kvadratický trojčlen, dostaneme opět správný výsledek. Všimněte si, že jsme maximálně zužitkovali nuly v matici a celé počítání se ztenčilo na determinant 2×2 . *PK,KV

9.6 Sinus matice

Úkol: Spočítejte

$$\sin \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Řešení: Tento příklad ilustruje, jak lze obecně počítat funkci z matice. Jiný možný postup je předveden v příkladu 9.8. Jediná známá operace s maticemi je násobení (a sčítání), proto se snažíme funkci rozvinout v mocninnou řadu, kde se vyskytuje právě jen sčítání a násobení matic. Aby se nám obecné mocniny dobře počítaly, matici diagonalizujeme.

Matici označíme $\frac{\pi}{4}A$ a budeme ji pomocí *podobnostní transformace* diagonalizovat. Hledáme tedy matici C takovou, aby bylo $C^{-1}AC = D$ a D byla diagonální matice. Víme totiž, že platí $A^n = (CDC^{-1})^n = CD^nC^{-1}$, a tedy pokud sinus matice definujeme jako mocninnou řadu, bude platit i $\sin A = \sin(CDC^{-1}) = C(\sin D)C^{-1}$, kde sinus diagonální matice znamená použít sinus na jednotlivé elementy na diagonále (představte si $\sin D$ opět jako řadu; umocnit diagonální matici znamená umocnit prvky na diagonále).

Nejprve určíme vlastní čísla matice A pomocí rovnice $\det(A - \lambda) = 0$. Řešením kvadratické rovnice zjistíme $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$.

Protože jsou tato čísla různá, víme, že je diagonalizace možná (není třeba hledat kapitolu o Jordanově tvaru matic). Čísla musela vyjít reálná, neboť matice A je symetrická a reálná.

Dále určíme transformační matici C . Vztah $A = CDC^{-1}$ říká, že matice C^{-1} musí převádět z kanonické báze — $\{(1, 0), (0, 1)\}$ — do báze vlastních vektorů v_1, v_2 matice A . Násobení maticí D pak říká, že pokud maticí A násobíme vektor v , nestane se nic jiného, než že složka v ve směru v_1 se násobí λ_1 a složka ve směru v_2 se násobí λ_2 (*spektrální rozklad zobrazení*). Jelikož máme ale nyní výsledek vyjádřen v bázi $\{v_1, v_2\}$, je třeba se ještě vrátit do báze kanonické, což zařídíme násobením maticí C .

Vlastní vektory matice A najdeme jako řešení rovnic $(A - \lambda_i) v_i = 0$. Získáme $v_1 = (1, 1)$ a $v_2 = (1, -1)$ a podle předchozího odstavce je třeba tyto vektory zapsat do sloupců matice C (srovnejte s příklady 6.2, 4.9). Ježto byla matice A symetrická a reálná a její vlastní čísla různá, musely tyto vektory vyjít kolmé. Pokud vektory navíc normujeme na jedničku, dostaneme *ortogonální matici* M a inverzní matice se k ní hledá obzvláště jednoduše⁴⁶: $M^{-1} = M^T$. Platí $|v_1| = |v_2| = \sqrt{2}$, tedy matice $M = (1/\sqrt{2})C$ je ortogonální a matice $(1/\sqrt{2})C^T$ je k ní inverzní.

Pro obecnou matici 2×2 lze ale inverzní matici najít snadno také podle Čihákova pravidla (příklad 6.5): zaměnit členy na diagonále, změnit znaménka u členů mimo diagonálu a celé dělit determinan-tem. Oběma postupy dojdeme k podobnostní transformaci:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sinus původní matice pak už není žádný problém

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\sin \begin{pmatrix} 3\pi/4 & 0 \\ 0 & \pi/4 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*KV

⁴⁶Obvykle se připomíná, že $U^\dagger = U^{-1}$ pro matice unitární, tedy matice jejichž řádky tvoří ortonormální systém ve smyslu skalárního součinu komplexních vektorů. Pro reálné matice jsou pojmy “unitární” či “ortogonální” ekvivalentní.

9.7 Odmocnina z matice

Úkol: Je zadána matice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Určete \sqrt{A} (tj. všechny takové matice \sqrt{A} pro které platí $(\sqrt{A})^2 = A$).

Řešení: Matici A převedeme na diagonální tvar, který už lze jednoduše odmocnit (srovnejte s příkladem 9.6). Pokud totiž najdeme matice D (diagonální) a C , které splňují $A = CDC^{-1}$, pak platí $\sqrt{A} = C\sqrt{D}C^{-1}$. Pro důkaz stačí pravou stranu rovnosti umocnit na druhou:

$$(C\sqrt{D}C^{-1})^2 = C\sqrt{D}C^{-1}C\sqrt{D}C^{-1} = C(\sqrt{D})^2C^{-1} = CDC^{-1} = A$$

což dokazuje výše uvedené tvrzení. Odmocninu z diagonální matice provedeme prostě tak, že odmocníme jednotlivé elementy (neboť D^2 znamená umocnit diagonální elementy na druhou).

Nejdříve určíme vlastní čísla matice A jako kořeny *charakteristického polynomu* $P(\lambda) = \det(A - \lambda)$. V našem případě je to (srovnejte s příkladem 9.10)

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{Tr} A + \det A = \lambda^2 - 13\lambda + 36 \quad (60)$$

a jeho kořeny jsou $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$. Matice D má tedy tvar

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Nyní určíme vlastní vektory matice A z rovnice $(A - \lambda)v = 0$. Pro $\lambda_1 = 4$ dostaneme například $v_1 = (1, -1)^T$, pro $\lambda_2 = 9$ třeba $v_2 = (2, 3)^T$. Pomocí vlastních vektorů vytvoříme matici C a to tak, že do sloupců⁴⁷ matice C zapisujeme vlastní vektory A ve stejném pořadí, v jakém jsme psali vlastní čísla A do diagonální matice D .

⁴⁷Matice C má z vektoru zapsaného ve složkách v bázi $\{v_1, v_2\}$ udělat složky v bázi kanonické. Srovnejte s příkladem 4.9.

K matici C hned také spočítáme inverzní matici, budeme ji za chvíli potřebovat

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyní tedy platí

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a stačí odmocnit diagonální matici D . To lze provést celkem čtyřmi způsoby

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 3 \end{pmatrix}$$

a dostaneme tedy čtyři různá řešení pro \sqrt{A}

$$\sqrt{A}_{1,2} = \pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{A}_{3,4} = \pm \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Na závěr poznamenejme, že je tímto způsobem zřejmě možné odmocnit libovolnou diagonalizovatelnou matici (pokud nejsou vlastní čísla nezáporná, musíme přejít do komplexních čísel). Autorovi příkladu však není známo, jestli existuje odmocnina libovolné matice.

*KK

9.8 Sinus či odmocnina matice jinak

Úkol: V příkladu 9.6 jsme měli za úkol najít sinus matice, v příkladu 9.7 jsme hledali odmocninu z matice. Metody použité v citovaných příkladech využívaly teorie Jordanova tvaru. Zde si ukážeme, jak můžeme počítat funkce matic (ale jenom některých, viz dále) bez použití Jordanova tvaru. Vaším úkolem bude nejprve dokázat slabší variantu následujícího pozorování

Budiž A matice, jejíž Jordanův tvar je čistě diagonální (což nastane např. pokud je A normální tzn. $AA^\dagger = A^\dagger A$). Dále necht' jsou f a

g funkce spojité v bodech spektra $\sigma(A)$ a platí $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \sigma(A)$. Pak je také $f(A) = g(A)$.

Stačí pokud dokážete toto pozorování pro analytické funkce. Toto pozorování použijte k řešení příkladů 9.6, 9.7, tzn. spočtete

- $\sin A$, kde $A = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$
- \sqrt{A} , kde $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

Řešení: Podle předpokladů je Jordanův tvar matice A čistě diagonální, tudíž existuje diagonální matice D (na diagonále jsou vlastní čísla A) a matice C , pro něž $A = CDC^{-1}$. Funkce f a g jsou podle předpokladů analytické, lze je tedy rozvinout do mocninné řady:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Pro výpočet funkce matice A samozřejmě použijeme vyjádření pomocí řady, aneb $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$, obdobně pro $g(A)$. Za A dosadíme CDC^{-1} a dostaneme

$$\begin{aligned} f(A) &= f(CDC^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (CDC^{-1})^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n C D^n C^{-1} = C f(D) C^{-1}. \end{aligned}$$

Obdobně pro funkci $g(x)$. Prozkoumejme jak vypadá $f(D)$. Samozřejmě je

$$f(D) = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_1^n & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

pro $g(D)$ dospějeme k obdobnému výsledku, pouze na diagonále bude místo funkce $f(\lambda_i)$ funkce $g(\lambda_i)$. Ovšem podle předpokladů

je $f(\lambda_i) = g(\lambda_i)$ (připomeňme, že na diagonále matice D jsou vlastní čísla A) a matice $f(D)$ a $g(D)$ jsou proto stejné. Je tedy $Cf(D)C^{-1} = Cg(D)C^{-1}$, odkud $f(A) = g(A)$.

Předvedme si nyní využití tohoto pozorování. Chceme spočít \sqrt{A} , kde

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla této matice jsou $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$ a Jordanův tvar je proto nutně diagonální. Funkce odmocnina (označme si ji f) má na spektru hodnoty $f(\lambda_1) = \sqrt{4} = 2$ a $f(\lambda_2) = \sqrt{9} = 3$. Funkci g nadefinujeme tak, aby v ní vystupovalo pouze násobení a sčítání, čili operace, které jsou na maticích přirozené. Obecně se snažíme, aby funkce g , byla polynomem co možná nejnižšího stupně. Můžeme třeba proložit přímkou body $(\lambda_1, f(\lambda_1))$ a $(\lambda_2, f(\lambda_2))$, odkud

$$g(x) = \frac{1}{5}(x + 6).$$

Potom skutečně $f(\lambda_1) = g(\lambda_1)$ a $f(\lambda_2) = g(\lambda_2)$. Podle předchozího pak musí být

$$\sqrt{A} = \frac{1}{5}(A + 6 \cdot I) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix},$$

což je jeden z výsledků v příkladu 9.7. Ostatní výsledky bychom dostali, pokud bychom položili například $f(9) = -3$, $f(4) = 2$, atd.

Spočtěme si ještě $\sin A$, kde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Opět označíme $\sin x$ jako $f(x)$. Vlastní čísla matice A jsou $\lambda_1 = \frac{3}{4}\pi$, $\lambda_2 = \frac{\pi}{4}$ a hodnota funkce f na spektru je $f(\lambda_1) = \sin \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ a $f(\lambda_2) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Funkce g , která se rovná funkci f na spektru je v tomto případě obzvlášť jednoduchá $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tudíž

$$\sin A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

a to je naše řešení příkladu 9.6 na pět řádků.

*VP

9.9 Napůl normální, napůl nilpotentní zobrazení

Úkol: Najděte vlastní vektory a vlastní čísla zobrazení $d : y \mapsto y'$ na prostoru $V = \mathcal{L}(\{\sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x\})$. Najděte Jordanovu bázi prostoru V vzhledem k zobrazení d . Má zobrazení d nějaké invariantní podprostory? Je V rozložitelný na invariantní podprostory?

Řešení: Nemusíme být asi příliš zběhlí v lineární algebře, abychom uhadli, že vlastní funkce d (s příslušnými vlastními čísly) budou

$$\lambda_1 = i : e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \lambda_1 = -i : e^{ix} = \cos x - i \sin x.$$

Ať se ale budeme namáhat sebevíc, další vlastní čísla ani vlastní funkce (až na násobek těch již nalezených) se nám nepodaří najít. Zkusme tedy k úloze přistoupit systematicky lineárně (algebraicky).

V prostoru V si zvolíme bázi B ze zadání (lineární nezávislost si zájemci ověří sami). Zjistíme, jak zobrazení d působí na vektory báze, a určíme matici d

$$\begin{array}{l} \sin x \xrightarrow{d} (0, 1, 0, 0) \\ \cos x \xrightarrow{d} (-1, 0, 0, 0) \\ x \sin x \xrightarrow{d} (1, 0, 0, 1) \\ x \cos x \xrightarrow{d} (0, 1, -1, 0) \end{array} \Rightarrow d_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bystří tuší, že budeme dále hledat vlastní čísla a vlastní vektory této matice. Charakteristický polynom matice d_B najdeme nejsnáze jako

$$\det(d_B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 + 1)^2,$$

srovnajte s příkladem 9.5c. Vlastní čísla jsou tedy skutečně pouze $\pm i$. Budeme se věnovat nejprve vlastnímu číslu $\lambda = i$. Zjistíme, jaká je dimenze kernelu matice $d_B - i I$: z Gaussovy eliminace provedené níže (bez pravé strany) vidíme, že hodnota matice je tři, a tedy dimenze *jádra* pouze jedna. K číslu $\lambda = i$ tedy existuje jediný vlastní vektor v_1 . Ten můžeme také nalézt pomocí níže uvedené Gaussovy eliminace, tentokrát se samými nulami vpravo. Z posledních tří řádků matice na konci úprav plyne, že poslední dvě složky v_1 jsou nulové. První řádka říká, že si můžeme například druhou složku zvolit, a zvolíme-li si ji rovnu jedné, vyjde vektor $v_1 = (i, 1, 0, 0)$. Neboli

právě vlastní funkce $\cos x + i \sin x = e^{ix}$. Všimněte si, že zatímco složky vektoru v_1 záleží na volbě báze, *vlastní funkce zobrazení* d (a samozřejmě i vlastní číslo) zůstávají nezměněny.

Dále víme, že není-li $\dim \text{Ker}(d_B - \lambda)$ rovno (aritmetické) násobnosti λ , musí posloupnost $\dim \text{Ker}(d_B - \lambda)$, $\dim \text{Ker}(d_B - \lambda)^2$, \dots (ostře) růst, dokud této násobnosti nedosáhne. Odpovídající podprostor (kdy se růst zastaví) se nazývá *kořenový podprostor*, a (lineární obal) sjednocení těchto kořenových podprostorů pro všechna vlastní čísla je celý prostor.

V našem případě tedy musí být $\dim \text{Ker}(d_B - \lambda)^2 = 2$ a stejně tak i $\dim \text{Ker}(d_B - \lambda)^k$ s $k > 2$ (zájemci mohou opět ověřit). Zajímá nás báze těchto (totožných⁴⁸) prostorů.

Jelikož jsme již našli $v_1 \in \text{Ker}(d_B - \lambda)$ a hledáme další vektor z $\text{Ker}(d_B - \lambda)^2$, stačí⁴⁹ najít řešení rovnice $(d_B - i)v_2 = v_1$. Potlačíme mírné nechutenství a s gusem se pustíme do Gaussovy eliminace (na způsob příkladu 1.1)

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} -i & -1 & 1 & 0 & i \\ 1 & -i & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{i \cdot (2)+(1) \rightarrow (2)} & \\ & & \left(\begin{array}{cccc|c} -i & -1 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & i & 2i \\ 0 & 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{\begin{array}{l} i \cdot (2)+(3) \rightarrow (3) \\ (4)-(2) \rightarrow (4) \end{array}} & \\ & & & & \left(\begin{array}{cccc|c} -i & -1 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & i & 2i \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2i & -2i \end{array} \right) \end{aligned}$$

Řešení této rovnice je opět nekonečně mnoho, vidíme, že mají tvar $v_2 = (0, 0, i, 1) + \alpha v_1$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Dospíváme k zajímavému závěru. Jordanovu bázi příslušnou k vlastnímu číslu i tvoří tedy funkce $x e^{ix}$ a e^{ix} (místo $x e^{ix}$ lze brát

⁴⁸Pozor, neříkáme, že $(d_B - \lambda)^2 = (d_B - \lambda)^3$. Pouze jádra těchto matic se shodují.

⁴⁹Jiná možnost by byla spočítat matici $(d_B - \lambda)^2$ — buď umocněním již známé matice $d_B - \lambda$, anebo jednoduše určením působení této matice na bázevé funkce B — najít řešení $(d_B - \lambda)^2 v_2 = 0$ a dopočítat $v_1 = (d_B - \lambda)v_2$.

i $x e^{ix} + \alpha e^{ix}$ s libovolným $\alpha \in \mathbb{C}$). Teď určitě uhadneme, jaká bude situace u druhého vlastního čísla, a můžeme působení operátoru d na V popsat tabulkou

$$d : \begin{cases} x e^{ix} & \xrightarrow{d-i} & e^{ix} & \xrightarrow{d-i} & 0 \\ x e^{-ix} & \xrightarrow{d+i} & e^{-ix} & \xrightarrow{d+i} & 0, \end{cases}$$

která je zobecněním *spektrálního rozkladu*; o něm se mluví u diagonalizovatelných operátorů: tam obsahuje každý řádek (řetízek) tohoto schématu jediný vektor. Jinak řečeno, v Jordanově bázi $J = \{e^{ix}, x e^{ix}, e^{-ix}, x e^{-ix}\}$ má zobrazení d matici

$$d_J = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Tato matice je *blokově diagonální*, a tedy vektory příslušné jednotlivým blokům odpovídají *invariantním podprostorům*, na které lze rozložit V . Závěr je: $V_+ = \mathcal{L}(\{x e^{ix}, e^{ix}\})$ a $V_- = \mathcal{L}(\{x e^{-ix}, e^{-ix}\})$ jsou invariantní podprostory a $V_+ \oplus V_- = V$. Všimněte si, že i u matice d_B byl díky nulovému bloku vlevo dole vidět jeden invariantní podprostor, a to $V_0 = \mathcal{L}(\{\sin x, \cos x\})$, neboli $f \in V_0 \Rightarrow df \in V_0$.

Na závěr si jen pro ujasnění pojmů uvědomte, že zobrazení $d - i$ je na prostoru V_+ nilpotentní, a to stupně dva (tedy $(d - i)^2$ je na V_+ identicky nulové zobrazení). prostoru funkcí typu $P(x) \cos nx + Q(x) \sin nx$. *KV

9.10 Jak počítat charakteristický polynom matice 3×3 pomocí jejích invariantů

Úkol: Budiž dána matice 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

přesvědčete se přímým výpočtem, že koeficienty charakteristického polynomu ($\det(A - \lambda \cdot)$ jako polynomu v proměnné λ) lze vyjádřit

pomocí výrazů $\text{Tr } A$, $\det A$ a $\text{Tr } A^2$ a že jsou tedy nezávislé na volbě souřadné soustavy. Najděte vztah mezi $\text{Tr } A$, $\det A$, $\text{Tr } A^2$ a vlastními čísly matice A .

Řešení: Použijeme *multilinearitu determinantu* jako zobrazení, které třem vektorům z \mathbb{R}^3 přiřadí determinant matice, do jejíchž sloupců zapíšeme tyto vektory.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Stejným způsobem pokračujeme, dokud to jde, a nakonec dostaneme

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & -\lambda & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & a_{13} \\ 0 & -\lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & -\lambda & 0 \\ a_{31} & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \\ &\lambda \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Všimněte si, že koeficient u λ^k je součet *hlavních minorů* typu $(3 - k) \times (3 - k)$ opatřený znaménkem $(-1)^k$. Takový hlavní minor je determinant matice, která vznikne z A vynecháním libovolné k -tice řádků a stejné k -tice sloupců. Toto pravidlo lze dokázat pro charakteristické polynomy libovolné matice $n \times n$.

Abychom dostali jasnou interpretaci (rozuměj vhodné označení, které nezabírá tolik místa) všech členů v odvozeném vztahu, spočítáme si $\text{Tr } A^2$ a sestavíme výraz $\frac{1}{2}((\text{Tr } A)^2 - \text{Tr}(A^2))$. Výsledkem navržených výpočtů by mělo být zjištění, že uvažovaný výraz se stopami je (až na znaménko) koeficientem u první mocniny λ . Máme proto

$$\det(A - \lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 \text{Tr } A - \lambda \frac{1}{2}((\text{Tr } A)^2 - \text{Tr}(A^2)) + \det A.$$

Tento vzorec je obzvláště výhodný pro symetrické matice, u kterých je $\text{Tr}(A^2)$ rovno součtu kvadrátů všech elementů matice A . U obecných matic je $\text{Tr}(A^2) = \sum_{ij} a_{ij}a_{ji}$.

Invariance koeficientů charakteristického polynomu (používá se pro ně také název *invarianty matice*) je jednoduchým důsledkem právě odvozeného vzorce. Koeficienty jsou tvořeny výrazy $\text{Tr } A$, $\text{Tr } A^2$ a $\det A$, které jsou stejné pro podobné matice (připomeňte si cykličnost stopy, větu o determinantu součinu a rozmyslete si, že je-li $A \sim B$ pak také $A^2 \sim B^2$).

Ještě nám zbývá zjistit jaký je vztah mezi koeficienty charakteristického polynomu a vlastními čísly matice A . Vlastní čísla matice A jsou kořeny charakteristického polynomu. Pro algebraické rovnice platí tzv. *Viětovy vzorce*, které popisují vztahy mezi koeficienty a kořeny rovnice. Pro kořeny x_1, \dots, x_n rovnice

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

platí

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_{n-1} \\ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n x_i x_j &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = a_{n-2} \\ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^n x_i x_j x_k &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -a_{n-3} \\ &\dots \\ \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_n}}^n x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} &= x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n a_0 \end{aligned}$$

V našem případě je proto

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \text{Tr } A \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 &= \frac{1}{2}((\text{Tr } A)^2 - \text{Tr}(A^2)) \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= \det A,\end{aligned}$$

kde λ_i jsou kořeny charakteristického polynomu (vlastní čísla matice A). Nalezli jsme tedy vztah mezi vlastními čísly, stopou, stopou druhé mocniny a determinanem. *VP

9.11 Jednorozměrný model krystalu

Úkol: Mějme soustavu N stejných kuliček, každá o hmotnosti m , navzájem pospojovaných pružinkami o stejné tuhosti k tak, že tvoří jakýsi řetízek. Krajiní kuličky jsou stejnými pružinkami připoutány k pevným stěnám. Při vychýlení některé kuličky z rovnováhy (ve směru podél řetízku, vše bereme jednorozměrně) na ni budou sousední dvě působit silami, které se ji budou snažit vrátit zpět do rovnováhy. Je-li x_n výchylka n -té kuličky, bude se celý systém řídit soustavou pohybových rovnic⁵⁰ (nefyzičtí nechtě si představují $m = k = 1$)

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \Omega^2(x_2 - 2x_1) \\ \ddot{x}_2 &= \Omega^2(x_3 - 2x_2 + x_1) \\ &\dots \\ \ddot{x}_{N-1} &= \Omega^2(x_N - 2x_{N-1} + x_{N-2}) \\ \ddot{x}_N &= \Omega^2(-2x_N + x_{N-1})\end{aligned}$$

kde $\Omega^2 = k/m$. Z první a poslední rovnice můžeme vyčíst okrajové podmínky: první a N -tá kulička jsou pružinkou spojeny s pevnými body (jako by bylo $x_0 = x_{N+1} = 0$).

Pokud si vzpomenete, jak lze druhou derivaci přibližně vypočítat pomocí diferencí, jistě vás nepřekvapí, že vlnová rovnice (pro podélné vlny) v elastickém prostředí má tvar

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

⁵⁰Jistě vidíte, jak jsme tyto rovnice získali: na i -tou kuličku (která není na kraji) působí sousední kuličky celkovou silou úměrnou délce pružiny, tedy $m\ddot{x}_i = F = -k(x_i - x_{i-1}) - k(x_i - x_{i+1})$.

(x je výchylka a z je souřadnice). Interpretujeme-li vhodně členy v naší soustavě rovnic, můžeme dokonce získat vyjádření pro rychlost vlny c pomocí materiálových konstant (proved'te).

Vaším úkolem bude najít taková řešení naší soustavy rovnic, při nichž všechny kuličky kmitají se stejnou frekvencí, a určit tyto vlastní frekvence.

Řešení: Soustavu zapíšeme do maticového tvaru

$$\ddot{x} = -Mx, \quad (61)$$

kde

$$M = \Omega^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Když si vzpomeneme na rovnici pro jednoduché kmity $\ddot{x} = -\omega^2 x$, budeme hledat vlastní čísla této matice ve tvaru $\lambda = \omega^2$, kde ω jsou právě vlastní frekvence kmitů soustavy. Přesněji řečeno: řešení (61) lze formálně napsat jako $x(t) = \exp(i\sqrt{M}t)x_0$, a tedy budou vlastní kmity mřížky odpovídat vlastním vektorům M a frekvence těchto kmitů budou odmocniny z příslušných vlastních čísel. Pokud je počáteční podmínka rovna v_1 , což je vlastní vektor s vlastním číslem λ_1 , bude pohyb mřížky popsán $x(t) = e^{i\sqrt{\lambda_1}t} v_1$, což je stojaté vlnění (vektor v_1 je v čase konstantní) s frekvencí $\sqrt{\lambda_1}$. Komplexní čísla z $x(t)$ odstraníme podobně jako v příkladu 7.5.

Charakteristická rovnice pro náš systém je

$$\det M_\omega = 0, \quad \text{kde } M_\omega = \begin{pmatrix} 2\Omega^2 - \omega^2 & -\Omega^2 & \dots & 0 \\ -\Omega^2 & 2\Omega^2 - \omega^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2\Omega^2 - \omega^2 \end{pmatrix}.$$

Budeme-li teď hledat vlastní frekvence ve tvaru $\omega = 2\Omega \sin \varphi$,

přejde charakteristická rovnice (až na konstantu) na tvar

$$D_N = \begin{vmatrix} 2 \cos 2\varphi & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 \cos 2\varphi & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 \cos 2\varphi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \cos 2\varphi \end{vmatrix} = 0.$$

Zde si buď vzpomeneme na příklad 8.2, kde stačí položit $\alpha = -e^{2i\varphi}$, $\beta = -e^{-2i\varphi}$ (zvládli bychom to ale i bez tohoto příkladu, viz příklad 6 z úvodu kapitoly 8), nebo ještě jednou dokážeme indukcí, že

$$D_N = \frac{\sin 2(N+1)\varphi}{\sin 2\varphi}. \quad (62)$$

Pro $N = 1$ je to zřejmé, pro $N = 2$ to dá jenom trochu počítání, a dále použijeme rekurentní formuli, kterou získáme rozvojem D_N podle prvního sloupce:

$$D_N = 2D_{N-1} \cos \varphi - D_{N-2}.$$

Z (62) konečně dostaneme vlastní frekvence jako

$$\omega_j = 2\Omega \sin \frac{j\pi}{2(N+1)}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (63)$$

Pokud si říkáte, že na tohle se přece dá přijít, jenom když víte dopředu, jak to vyjde, snad vás napadne, že by výsledek (63) měl jít také spočítat nějak jinak. Máte samozřejmě pravdu. Fyzikální intuice a analogie s vlnou ve spojitém prostředí (nefyzikům asi tohle řešení bude připadat ještě víc „spadlé z nebe“) nám napoví, že by výchyly x_k mohly být také tvaru „vlny“

$$x_k = e^{i(qk - \omega t)}, \quad (64)$$

kde q je zatím nespecifikovaný parametr (vlnový vektor; pozor, k je tady index od x_k , tedy prostorová souřadnice). Dosazením tohoto vyjádření do naší původní soustavy rovnic dá (pro $k = 2, \dots, N-1$)

$$-\omega^2 = \Omega^2(2 \cos(qk) - 2) \Rightarrow \omega = 2\Omega \sin \frac{qk}{2}. \quad (65)$$

Nakonec si ještě řekneme, že všechny rovnice (včetně $k = 1, N$) budou vypadat naprosto stejně, když formálně položíme $x_0 = 0, x_{N+1} = 0$ (fyzikálně: první a poslední kulička je pružinkou spojena se zdí). Aby toto mohlo být splněno pro všechny časy, musí v (64) být

$$q(N + 1) = m\pi ,$$

kde m je celé. Ale dosazení tohoto do (65) dá výsledek ekvivalentní výsledku předchozímu, a navíc jsme ještě našli přímo vlastní vektory matice M (dopočítejte). *TB

10 Grupy matic a otců

10.1 Jak zatočit s maticemi v \mathbb{R}^2

Úkol:

1. Určete matici otočení okolo počátku o úhel φ v \mathbb{R}^2 . Najděte její vlastní čísla a vlastní vektory. Vynásobením dvou takových matic ověřte, že tyto matice tvoří grupu. Ukažte, že je to právě $\mathbb{SO}(2)$, grupa všech ortogonálních matic 2×2 s jednotkovým determinanem.
2. Napište matice otočení v \mathbb{R}^3 okolo souřadných os.
3. Vysvětlete, proč je množina ortogonálních unimodulárních matic 3×3 totéž, co množina všech matic otočení v \mathbb{R}^3 .
4. Pro zadanou matici $A \in \mathbb{SO}(3)$ určete osu rotace a úhel otočení.

Řešení: 1. Nejprve se musíme přesvědčit, že otočení R_φ okolo počátku v \mathbb{R}^2 je lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (a tedy že je vůbec možné jej popsat pomocí matice). Je ale zřejmé, že (1) vyjde nastejno vektor nejprve otočit a pak násobit číslem $\lambda \in \mathbb{R}$ nebo nejprve jej násobit a pak teprve otočit; stejně tak (2) je $R_\varphi(v+u) = R_\varphi v + R_\varphi u$.

Obecné lineární zobrazení f z \mathbb{R}^n kamkoliv je plně popsáno n hodnotami $f(v_1), \dots, f(v_n)$, kde v_1, \dots, v_n mohou být libovolné lineárně nezávislé vektory (báze \mathbb{R}^n). V našem případě si zvolíme vektory $v_1 = (1, 0)^T$ a $v_2 = (0, 1)^T$.

Při rotaci o úhel φ proti směru hodinových ručiček se tyto vektory zobrazí následovně

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Chceme-li, aby násobením $(1, 0)^T$ maticí A_φ vznikl vektor $(\cos \varphi, \sin \varphi)^T$, musíme napsat do prvního sloupce A_φ právě $(\cos \varphi, \sin \varphi)^T$. Podobně to uděláme s $(0, 1)^T$ a dostaneme výsledek

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Uvažujme nyní matici A_φ jako zobrazení $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Vlastní čísla této matice spočítáme jako kořeny charakteristického polynomu $\det(A_\varphi - \lambda)$. Uveďme jen výsledek spolu s vlastními vektory

$$\lambda_1 = e^{i\varphi} : \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = e^{-i\varphi} : \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Jelikož je matice A_φ nesymetrická, mohla skutečně vyjít některá vlastní čísla komplexní. Protože je ale matice A_φ reálná, je možné všechna komplexní vlastní čísla sdružit do komplexně sdružených párů a jim odpovídající vlastní vektory jsou pak také komplexně sdružené: přesně, jak nám to vyšlo.

Že nebude existovat reálné vlastní číslo (pro $\varphi \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), jsme mohli také uhodnout předem. V rovině \mathbb{R}^2 totiž neexistuje vektor, který by při rotaci o jiný úhel než celočíselný násobek π zachovával směr.

Nyní ukážeme, že násobením matic A_φ a A_ϱ vznikne matice $A_{\varphi+\varrho}$ (neboli že přiřazení matice A_φ rotaci o φ je *homomorfizmus*). Matice lze přímo vynásobit a použít vzorce pro sinus a kosinus součtu dvou úhlů. My to ale provedeme pomocí diagonálního tvaru matic (uvažujeme rotace o φ a ϱ)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varrho & -\sin \varrho \\ \sin \varrho & \cos \varrho \end{pmatrix} = \\ & = C \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} C^{-1} C \begin{pmatrix} e^{i\varrho} & 0 \\ 0 & e^{-i\varrho} \end{pmatrix} C^{-1} = \\ & = C \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varrho} & 0 \\ 0 & e^{-i\varrho} \end{pmatrix} C^{-1} = C \begin{pmatrix} e^{i(\varphi+\varrho)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\varphi+\varrho)} \end{pmatrix} C^{-1} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\varrho) & -\sin(\varphi+\varrho) \\ \sin(\varphi+\varrho) & \cos(\varphi+\varrho) \end{pmatrix}, \quad \text{kde } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Doplňme, že mezi maticemi A_φ , $\varphi \in (0; 2\pi)$ tvaru (66) je i jednotková matice a zároveň, že ke každé matici A_φ existuje i její inverze $A_{-\varphi}$, která je též tvaru (66). Tyto matice tedy tvoří grupu.

Snadno se také můžeme přesvědčit, že všechny (reálné) *ortonormální matice*⁵¹ 2×2 s determinanem jedna mají tvar A_φ . Jedna

⁵¹Matice splňující $A^T A = \dots$

možnost je prostě řešit soustavu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = . , \quad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$$

pro neznámé a, b, c, d . Výhodnější je ale uvědomit si, že $A^T A = .$ znamená: sloupce A jsou navzájem kolmé vektory délky jedna. Za první sloupec tedy zvolíme obecný vektor délky jedna $(\cos \varphi, \sin \varphi)^T$ a druhý sloupec pak může být už pouze $\pm(-\sin \varphi, \cos \varphi)^T$. Z podmínky $\det A = 1$ plyne, že musíme zvolit znaménko plus.

Můžeme tedy shrnout

$$\mathbb{SO}(2) = \{A_\varphi, \varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle\}.$$

2. Rotace $R_\varphi^{x_1}$ kolem osy x_1 v \mathbb{R}^3 není nic jiného než rotace v rovině $x_2 x_3$ kolem počátku. Při takové rotaci se \mathbb{R}^3 rozpadá na *direktní součet* dvou podprostorů $V_1 = \mathcal{L}((1, 0, 0))$ a $V_{23} = \mathcal{L}(\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\})$, na nichž působí rotace odděleně (což zapisujeme jako $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_{23}$). Jinak řečeno platí

$$v_1 \in V_1, v_2 \in V_{23} \Rightarrow R_\varphi^{x_1} v_1 \in V_1, R_\varphi^{x_1} v_2 \in V_{23}.$$

Říkáme, že \mathbb{R}^3 je vůči lineárnímu zobrazení $R_\varphi^{x_1}$ rozložitelný na *invariantní podprostory* $R_\varphi^{x_1}$. Matice rotace $A_\varphi^{x_1}$ bude mít tedy *blokově diagonální tvar* a bloky budou odpovídat působení $R_\varphi^{x_1}$ na V_1 a V_{23} . Působení na V_{23} již známe (vztah 66) a působení na V_1 je jednoduché: při rotaci $R_\varphi^{x_1}$ zůstávají vektory z V_1 nezměněny. Proto je

$$A_\varphi^{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Matice rotací okolo os x_2 a x_3 dostaneme při cyklické záměně souřadnic x_1, x_2, x_3

$$A_\varphi^{x_2} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad A_\varphi^{x_3} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (68)$$

3. Klíčové je vědět, že ortogonální matice 3×3 s jednotkovým determinantem, tedy matice z $\mathbb{SO}(3)$, zachovávají (složkový) skalární součin

$$Ax \cdot Ay = A^T Ax \cdot y = x \cdot y.$$

Důsledkem pak je, že se zachovávají i délky vektorů: $|Ax| = \sqrt{Ax \cdot Ax} = \sqrt{x \cdot x} = |x|$. Potom ovšem musí být všechna vlastní čísla A v absolutní hodnotě rovna jedné.

Jelikož je stupeň charakteristického polynomu matice A tři a součin jeho kořenů je roven $\det A = 1$, zbývá pouze možnost, že jsou jeho vlastní čísla $1, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}$. Matice A je tedy podobná matici $\text{diag}(1, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi})$ a tato matice je zase podobná matici (67), neboli matici rotace kolem osy x . Podobnost těchto matic pak znamená, že existuje báze, v níž je zobrazení $Ax \mapsto x$ rotací kolem osy x .

4. Násobky vlastního vektoru příslušného vlastnímu číslu jedna jsou jediné vektory, které zůstanou působením matice nezměněny: definují proto osu rotace. Matice A je kromě toho podobná matici (67), její vlastní čísla jsou tedy $1, e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}$. Stopa A je tedy

$$\text{Tr } A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 \cos \varphi.$$

Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{SO}(3)$ určíme tudíž úhel rotace ze vztahu

$$\frac{\text{Tr } A - 1}{2} = \cos \varphi.$$

*KV

10.2 Matice otočení v \mathbb{R}^3

Úkol: Budeme se zabývat vlastními otočeními v \mathbb{R}^3 (těmi, jejichž determinant je jedna⁵²).

- V kanonické bázi \mathbb{R}^3 najděte matici otočení o úhel τ kolem osy dané jednotkovým vektorem $u = (u_1, u_2, u_3)^T$.
- Ukažte, že každé vlastní otočení lze složit ze tří „elementárních“ otočení, například (v tomto pořadí) kolem osy z , x a opět z .

⁵²Nevlastní otočení jsou otočení spojená se zrcadlením.

c) Najděte vztah mezi úhlem τ a úhly elementárních otočení, ze kterých bylo dané otočení složeno.

Řešení: Na začátek úmluva: rotaci o úhel φ kolem osy o budeme značit $\widehat{R}_o(\varphi)$, a její matici vůči kanonické bázi $R_o(\varphi)$.

a) Chceme-li otočit vektor x , všimneme si nejprve, že se mění jen jeho složka kolmá k ose rotace, tj.

$$x_{\perp} = x - u(x \cdot u).$$

Všimněte si, že rozklad $x = x_{\perp} + x_{\parallel}$, $x_{\parallel} = u(x \cdot u) \in \mathcal{L}(u)$, $x_{\perp} \in V_{\perp}$ lze provést pro každý vektor x a je vždy jednoznačný. To je přesně situace, kterou máme na mysli, pokud píšeme $\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(u) \oplus V_{\perp}$. Jelikož jsou navíc při zadaném skalárním součinu prostory $\mathcal{L}(u)$ a V_{\perp} na sebe kolmé (každý vektor $\mathcal{L}(u)$ je kolmý na každý vektor V_{\perp}), nazýváme V_{\perp} *ortogonálním doplňkem* $\mathcal{L}(u)$.

Vraťme se ale k otočením v \mathbb{R}^3 . Zavedeme ještě vektor $v = u \times x_{\perp}$, který je kolmý na x i u a má stejnou velikost jako x_{\perp} (nemáte-li rádi symbol \times , pak prostě ve složkách $v_i = \varepsilon_{ijk} u_j (x_{\perp})_k$; symbol ε_{ijk} je vysvětlen v příkladu 6.1b). Rotaci v rovině definované vektory x_{\perp} a v pak vyjádříme

$$R_u(\tau)x_{\perp} = x_{\perp} \cos \tau + v \sin \tau,$$

viz příklad 10.1. Znovu si vzpomeneme, že \widehat{R}_u nemění x_{\parallel} . Po mírné úpravě ($u \times x = u \times x_{\perp}$) dostaneme výsledek

$$\widehat{R}_u(\tau)x = R_u(\tau)(x_{\parallel} + x_{\perp}) = u(x \cdot u) + [x - u(x \cdot u)] \cos \tau + (u \times x) \sin \tau.$$

Vidíme, že toto zobrazení je lineární. Samozřejmě to lze odpozorovat i z geometrické definice otáčení: například je jedno, zda dva vektory například (stejně) otočíme a pak sečteme, nebo zda je nejprve sečteme a pak otočíme.

Matice zobrazení \widehat{R}_u pak bude (alespoň zkontrolujte, pro zkrácení píšeme $\sin \tau = s$, $\cos \tau = c$)

$$R_u(\tau) = \begin{pmatrix} u_1^2(1-c) + c & u_1 u_2(1-c) - u_3 s & u_1 u_3(1-c) + u_2 s \\ u_1 u_2(1-c) + u_3 s & u_2^2(1-c) + c & u_2 u_3(1-c) - u_1 s \\ u_1 u_3(1-c) - u_2 s & u_2 u_3(1-c) + u_1 s & u_3^2(1-c) + c \end{pmatrix}$$

Matice vektorového součinu se počítá v příkladu 6.4, projektory na podprostory ($x_{||}$) najdete v příkladu 6.3.

b) Označme x' , y' , z' přímky, na které se při rotaci \widehat{R} zobrazí souřadnicové osy a p průsečnici rovin xy a $x'y'$ (případ, kdy tyto roviny splývají, je triviální), viz obrázek 15. V první fázi provedeme otočení kolem osy z o takový úhel φ_1 , že osa x se zobrazí na přímku p (chceme-li, aby byly tyto úhly určeny jednoznačně, musíme se omezit na vhodný interval; otočení potom musíme provést tak, aby při něm kladná poloosa x přešla na příslušnou polopřímku na přímce p ; chcete-li, promyslete). Potom otočíme kolem nové osy x , tj. přímky p o takový úhel ϑ , aby osa z přešla do požadované polohy z' (to lze, neboť osa z' je kolmá k rovině $x'y'$, tedy i k přímce p). Nakonec přidáme otočení kolem nové osy z' o takový úhel φ_2 , aby přímka p přešla na osu x' . Existují tedy *Eulerovy úhly* φ_1 , ϑ a φ_2 takové, že

$$\widehat{R}_U(\tau) = \widehat{R}_{z'}(\varphi_2)\widehat{R}_p(\vartheta)\widehat{R}_z(\varphi_1). \quad (69)$$

Ale otočení kolem os p i z' můžeme dostat pomocí otočení kolem os x a z (je to celkem názorné — snad) jako

$$\begin{aligned} \widehat{R}_p(\vartheta) &= \widehat{R}_z(\varphi_1)\widehat{R}_x(\vartheta)\widehat{R}_z^{-1}(\varphi_1), \\ \widehat{R}_{z'}(\varphi_2) &= (\widehat{R}_p(\vartheta)\widehat{R}_z(\varphi_1))\widehat{R}_z(\varphi_2)(\widehat{R}_p(\vartheta)\widehat{R}_z(\varphi_1))^{-1} \end{aligned}$$

V prvním případě nejdřív přetočíme přímku p do osy x , kolem které provedeme příslušnou rotaci, načež ji zase vrátíme zpátky na p , ve druhém případě je to podobné, jen o krok delší.

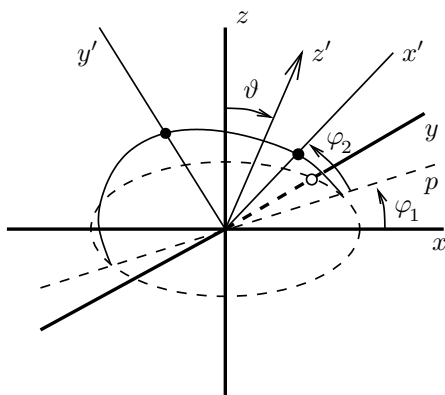
Když toto dosadíme do (69), dostaneme

$$\widehat{R}_U(\tau) = \widehat{R}_z(\varphi_1)\widehat{R}_x(\vartheta)\widehat{R}_z(\varphi_2), \quad (70)$$

tedy stejnou rotaci dostaneme také tak, že složíme otočení o stejné úhly, ale kolem původních os a v opačném pořadí!

c) Podobně jako v bodě a) značme pro zkrácení goniometrické funkce od úhlů φ_1 , φ_2 a ϑ po řadě c_1 , s_1 , c_2 , s_2 , C , S . Podle (70) stačí mezi sebou pronásobit tři matice odpovídající elementárním rotacím (viz příklad 10.1). Matice výsledného otočení bude

$$R_U(\tau) = \begin{pmatrix} c_1c_2 - s_1s_2C & -c_1s_2 - c_2s_1C & s_1S \\ s_1c_2 + s_2c_1C & -s_1s_2 + c_1c_2C & -c_1S \\ s_2S & c_2S & C \end{pmatrix} \quad (71)$$



Obrázek 15: Eulerovy úhly, pomocí nichž je definováno libovolné otočení v \mathbb{R}^3 . Představme si, že je na osy x , y položen disk (je vyznačen čárkovaně). Nejprve otáčíme o φ_1 kolem osy z tak, aby osa x přešla do p (průsečnice rovin xy a $x'y'$). Pak sklápíme rovinu xy (disk) kolem p (v té chvíli to je osa x) o úhel ϑ , takže osa z přejde do konečné polohy z' . Nakonec otáčíme podle této nové osy z' o φ_2 , čímž dostaneme osy x a y do správné polohy.

Chceme-li zjistit úhel otočení, které popisuje tato matice, nemusíme ji srovnávat s maticí $R_U(\tau)$, kterou jsme spočítali v bodě a. Stačí si vzpomenout, že stopa matice otočení o úhel τ ale je $1 + 2 \cos \tau$ (viz příklad 10.1). Srovnáním se stopou matice (71) dostaneme

$$\cos \tau = \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin^2 \frac{\vartheta}{2},$$

nebo také po úpravě

$$\cos \frac{\tau}{2} = \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

*TB

10.3 Grupa Lorentzových transformací

Úkol: Charakterizujte lineární transformace na prostoru \mathbb{R}^4 (pro jednoduchost hovořme o jejich maticích), které zachovávají formu $\varphi(x) = x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, tedy transformace A , pro které $\varphi(Ax) = \varphi(x)$. Uvažujeme pouze kartézské souřadnice; s označením $x_4 = ct$ se jedná o normu čtyřvektoru x , používanou ve speciální teorii relativity. Speciálně dokažte, že

- všechny transformace s touto vlastností tvoří grupu — značíme ji \mathbb{G}_{Lor} a nazývá se Lorentzova grupa (a její prvky jsou Lorentzovy transformace, o nichž ještě dost uslyšíte).
- matice Lorentzových transformací $A \in \mathbb{G}_{\text{Lor}}$ splňují podmínky $|\det A| = 1$, $|A_{44}| \geq 1$.
- speciální Lorentzovy transformace, tj. ty $A \in \mathbb{G}_{\text{Lor}}$, pro něž $\det A = 1$, $A_{44} \geq 1$, tvoří podgrupu \mathbb{G}_{Lor} ; značíme ji $\mathbb{G}_{\text{Lor}}^+$.

Řešení: Zavedeme-li v \mathbb{R}^4 standardní skalární součin $(x \cdot y) = \sum_{k=1}^4 x_k y_k$ a označíme-li

$$I_- = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

můžeme normu čtyřvektoru zapsat jako

$$\varphi(x) = (I_- x \cdot x).$$

Požadavek invariance formy φ vzhledem k transformacím A , tj. $\varphi(x) = \varphi(Ax)$, upravíme následujícím způsobem:

$$\varphi(x) = (I_- x \cdot x) = \varphi(Ax) = (I_- Ax \cdot Ax) = (A^T I_- Ax \cdot x).$$

Odtud dostaneme nutnou a postačující podmínku na matici A , aby patřila do \mathbb{G}_{Lor} :

$$A \in \mathbb{G}_{\text{Lor}} \Leftrightarrow A^T I_- A = I_-. \quad (72)$$

a) To, že všechny Lorentzovy transformace tvoří grupu, plyne okamžitě z podmínky (72); předvedeme zde např. důkaz uzavřenosti vůči násobení:

$$A, B \in \mathbb{G}_{\text{Lor}} \Rightarrow (AB)^T I_- AB = B^T A^T I_- AB = B^T I_- B = I_-.$$

Jednotková matice I_- patří do \mathbb{G}_{Lor} evidentně a ke každé $A \in \mathbb{G}_{\text{Lor}}$ je v \mathbb{G}_{Lor} také matice A^{-1} (jejíž existence je zaručena bodem b).

b) Z (72) plyne okamžitě $|\det A| = 1$. Necháme nyní matici A působit na vektor $x = (0, 0, 0, 1)^T$, pro který je $\varphi(x) = 1$. Vyjde $Ax = (A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44})^T$, a z $\varphi(Ax) = 1$ pak plyne

$$A_{44}^2 = 1 + \sum_{k=1}^3 A_{k4}^2 \geq 1,$$

jak jsme chtěli.

Dokážeme ještě další fakt, který budeme potřebovat, a to uzavřenost \mathbb{G}_{Lor} vůči transpozici matice. Nechť tedy $A \in \mathbb{G}_{\text{Lor}}$. Provedeme sekvenci jednoduchých úprav ($I_-^2 = I_-$)

$$A^T I_- A = I_- \Rightarrow I_- A^T I_- A A^{-1} = I_-^2 A^{-1} = A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_- A^T I_- = A^{-1} \Rightarrow A I_- A^T I_- = I_- \Rightarrow A I_- A^T = I_- ,$$

tedy také $A^T \in \mathbb{G}_{\text{Lor}}$.

c) Zřejmě je $I_- \in \mathbb{G}_{\text{Lor}}^+$. Nechť $A, B \in \mathbb{G}_{\text{Lor}}^+$. Platí

$$(BA)_{44} = B_{44}A_{44} + \sum_{k=1}^3 B_{4k}A_{k4}. \quad (73)$$

Z bodu b) a faktu $B^T \in \mathbb{G}_{\text{Lor}}$ ale plyne

$$A_{44}^2 = 1 + \sum_{k=1}^3 A_{k4}^2, \quad B_{44}^2 = 1 + \sum_{k=1}^3 B_{4k}^2$$

a *Cauchy-Schwarzova nerovnost* (důkaz viz v příkladu 5.4) nám říká

$$\left| \sum_{k=1}^3 B_{4k} A_{k4} \right| \leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^3 A_{k4}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^3 B_{4k}^2 \right)} = \sqrt{A_{44}^2 - 1} \sqrt{B_{44}^2 - 1} \leq A_{44} B_{44}.$$

Porovnáním s (73) dostaneme $(BA)_{44} \geq 0$, ale protože už víme, že obecně je $|(BA)_{44}| \geq 1$, je uzavřenost $\mathbb{G}_{\text{Lor}}^+$ vůči násobení matic dokázána (to, že determinant zůstává 1, je ovšem triviální). Jednoduchou modifikací tohoto postupu rovněž dokážeme, že ke každé $A \in \mathbb{G}_{\text{Lor}}^+$ je také $A^{-1} \in \mathbb{G}_{\text{Lor}}^+$. Všimněme si, že \mathbb{G}_{Lor} je tedy nesouvislá. *TB

10.4 Rerezentace

Úkol: Nalezněte alespoň dvě jednorozměrné a jednu dvourozměrnou reprezentaci grupy \mathbb{S}_3 , tedy grupy permutací tříprvkové množiny.

Řešení: Připomeňme definici reprezentace.

Reprezentace grupy \mathbb{G} je *morfizmus* φ , který prvkům \mathbb{G} přiřazuje lineární zobrazení na nějakém vektorovém prostoru V . Dimenzí reprezentace rozumíme dimenzi V . Morfizmus je zobrazení, které zachovává grupovou operaci, tedy $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ pro $\forall a, b \in \mathbb{G}$ a dále $\varphi(1) = \dots$. Jinak řečeno: n -dimenzionální reprezentace grupy je takové přiřazení matice $n \times n$ ke každému prvku grupy, při kterém násobení prvků grupy odpovídá násobení matic.

Dvě snadno odhalitelné jednorozměrné reprezentace obecné grupy \mathbb{S}_n jsou identita (každému prvku se přiřadí jednička) a znaménko permutace ($\pi \in \mathbb{S}_n$ se přiřadí $\text{zn}(\pi)$).

Dvourozměrná reprezentace se také přímo nabízí: \mathbb{S}_3 lze chápat jako symetrie rovnostranného trojúhelníka v \mathbb{R}^2 . Trojúhelník umístíme podle obrázku 16 a prvkům \mathbb{S}_3 pak přiřadíme matice zobrazení,

které odpovídají těmto symetriím

$$\text{identita: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rotace o } \pm \frac{2\pi}{3}: \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{zrcadlení: } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Matice rotací v \mathbb{R}^2 jsme spočítali v příkladu 10.1. Matice zrcadlení lze získat pohodlně ze zrcadlení podle osy y (první matice v řádku „zrcadlení“, označme ji Z_y) jako $A_\alpha Z_y A_{-\alpha}$, kde A_α je matice rotace o α , a dosazujeme buď $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, nebo $\alpha = -\frac{2}{3}\pi$ (tedy matice z řádku „rotace“).

Lze si samozřejmě položit otázku, jaké existují ještě další reprezentace grupy \mathbb{S}_3 . Abychom mohli tuto otázku zodpovědět, musíme se zmínit o ekvivalentních a reducibilních reprezentacích.

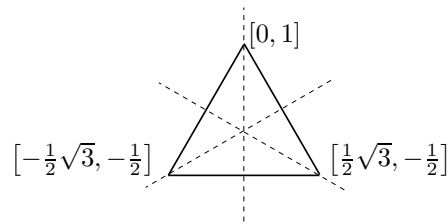
Pokud jsou r_1, r_2 dvě reprezentace \mathbb{G} na V , které jsou svázány podobnostní transformací

$$r_1(g) = \varphi r_2(g) \varphi^{-1}, \quad \forall g \in \mathbb{G}$$

pro nějaké pevné (bijektivní) zobrazení $\varphi: V \rightarrow V$, mluvíme o *ekvivalentních reprezentacích*. Takové reprezentace se tedy liší jen tím, že ve V volíme různé báze.

Je-li r reprezentace na V , a existuje-li $\emptyset \neq V_1 \subset V$, $V_1 \neq V$, pro něžž platí $(r(g))v_1 \in V_1$ pro každý prvek grupy g a každý vektor $v_1 \in V_1$, potom reprezentaci r nazveme *reducibilní*. Ostatní reprezentace nazýváme *ireducibilní*.

Lze ukázat, že pokud u reprezentace konečné (pozor pro takovou grupu $\{\exp(tN)\}$, N nilpotentníto již neplatí!) grupy existuje výše definovaný invariantní podprostor V_1 , pak lze rozložit V na $V_1 \oplus V_2$, kde také $(r(g))v_2 \in V_2$ pro každý prvek grupy g a každý vektor $v_2 \in V_2$. To znamená, že lze r „složit“ ze dvou reprezentací nižší dimenze, které působí na V_1 a V_2 : to znamená, že lze zvolit bázi ve V tak, že *všchny* matice $r(g)$, $g \in \mathbb{G}$ budou blokově diagonální (a bloky



Obrázek 16: Symetrie rovnostranného trojúhelníka jako zobrazení $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tvoří reprezentaci \mathbb{S}_3 , grupy permutací množiny $\{1, 2, 3\}$.

budou mít stejnou velikost i polohu; odpovídají zobrazením $V_1 \rightarrow V_1$ a $V_2 \rightarrow V_2$, což jsou také reprezentace). *Ireducibilní reprezentace* jsou tedy jakési „základní kameny“ pro vytváření všech možných reprezentací dané grupy⁵³.

Při zjišťování, zda jsme již našli všechny ireducibilní reprezentace, nám pomůže následující věta.

Nechť d_1, \dots, d_n jsou dimenze (řády) všech neekvivalentních ireducibilních reprezentací grupy \mathbb{G} o $\#\mathbb{G}$ prvcích. Pak

$$d_1^2 + \dots + d_n^2 = \#\mathbb{G}. \quad (74)$$

Vidíme tedy, že díky $1 + 1 + 2^2 = 6$ jiné ireducibilní reprezentace \mathbb{S}_3 než ty, co jsme již našli, neexistují. Je ale potřeba se přesvědčit, že jsou tyto nalezené reprezentace skutečně ireducibilní: dokážete vysvětlit proč? *KV

⁵³U konečných grup (a nekonečných kompaktních grup) platí, že každou reprezentaci lze „poskládat“ z ireducibilních reprezentací.

11 Exponenciála se nebojí

11.1 Dvuhladinový systém aneb Hrátky s maticí 2×2

Úkol: Jsou zadány matice

$$H_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}, \quad H = H_0 + V.$$

1. Srovnajte spektra a vlastní vektory matic H_0 a H . U vlastních vektorů H předpokládejte $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.
2. Nalezněte řešení rovnic

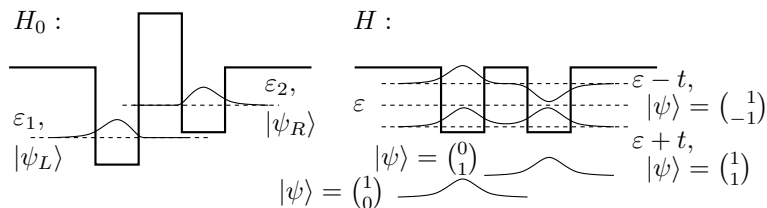
$$H_0|\psi\rangle = i\hbar|\dot{\psi}\rangle, \quad H|\psi\rangle = i\hbar|\dot{\psi}\rangle, \quad \text{kde } |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1(\tau) \\ \psi_2(\tau) \end{pmatrix} \quad (75)$$

s počáteční podmínkou v obou případech $|\psi\rangle(0) = (1, 0)^T$. Pro jednoduchost položte u druhé rovnice $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Symbol \hbar označuje Planckovu konstantu.

3. Vysvětlete, co znamenají fyzikálně výsledky předchozích dvou bodů. Hamiltoniány H_0 a H mohou odpovídat například systému na obr. 17.

Poznámka k označení: časovou proměnnou budeme označovat τ , derivacemi v bodě 2 máme na mysli $|\dot{\psi}\rangle = d|\psi\rangle/d\tau$.

Řešení: 1. Matice H_0 je v diagonálním tvaru, takže její vlastní čísla jsou přímo $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ a odpovídající vlastní vektory jsou $(1, 0)^T$ a $(0, 1)^T$.



Obrázek 17: Systémy odpovídající hamiltoniánům v příkladu 11.1. Připomínáme, že $t < 0$.

Vlastní čísla matice H jsou kořeny charakteristického polynomu $\det(H - \lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{Tr} H + \det H$ (viz vztah 60 v příkladu 9.7 a dalších příkladech kapitoly 9)

$$\lambda^2 - \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - t^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\right)^2 + t^2}. \quad (76)$$

Pro $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ mají vlastní čísla obzvláště jednoduchý tvar $\lambda_{1,2} = \varepsilon \pm t$. V tomto případě se nám budou také snadno počítat vlastní vektory

$$\lambda = \varepsilon + t : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \varepsilon - t : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Řešení rovnice $Av = \dot{v}$ s počáteční podmínkou $v(0) = v_0$ je $v(\tau) = \exp(A\tau)v_0$. Formálně je tento vzorec stejný jako u skalárních funkcí (je-li $\alpha y = y'$, $y(0) = y_0$, pak $y(\tau) = y_0 e^{\alpha\tau}$).

Spočítáme proto exponenciály obou matic. Funkce z diagonálních matic se počítají prostě tak, že funkci použijeme přímo na diagonální elementy, takže

$$\exp\left(\frac{1}{i\hbar}\tau H_0\right) = \begin{pmatrix} \exp\frac{1}{i\hbar}\tau\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \exp\frac{1}{i\hbar}\tau\varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_1\tau} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_2\tau} \end{pmatrix},$$

kde jsme zavedli označení $\varepsilon_{1,2} = \hbar\omega_{1,2}$, které se těší mezi fyziky jisté oblibě.

U matice H budeme mít trochu více práce, ale díky výsledkům bodu 1 jí také nebude mnoho. Víme, že pro $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ je

$$H = \begin{pmatrix} \varepsilon & t \\ t & \varepsilon \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon + t & 0 \\ 0 & \varepsilon - t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

a proto (při označení $\varepsilon = \hbar\omega$, $t = \hbar\omega_t$, $\omega_{\pm} = \omega \pm \omega_t$)

$$\exp\left(\frac{1}{i\hbar}\tau H\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_+\tau} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = e^{-i\omega\tau} \begin{pmatrix} \cos\omega_t\tau & -i\sin\omega_t\tau \\ -i\sin\omega_t\tau & \cos\omega_t\tau \end{pmatrix}.$$

Řešení rovnic 75 s počáteční podmínkou $|\psi\rangle = (1, 0)^T$ je potom (s ohledem na vzorec $v(\tau) = \exp(A\tau)v_0$) vždy první sloupec exponenciály příslušné matice.

$$H_0 : |\psi\rangle(\tau) = e^{-i\omega_1\tau} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H : |\psi\rangle(\tau) = e^{-i\omega\tau} \begin{pmatrix} \cos \omega_t\tau \\ -i \sin \omega_t\tau \end{pmatrix}$$

3. Ze stacionární (bezčasové) *Schrödingerovy rovnice*

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

plyne, že vlastní čísla hamiltoniánu udávají energie (spektrum), které můžeme v systému popsaném tímto hamiltoniánem naměřit. Podobně vlastní vektory udávají stavy, které těmto energiím odpovídají.

Hamiltoniánem H_0 můžeme tedy popsat například dvě oddělené potenciálové jámy, které spolu nekomunikují a ve kterých je vždy jen jedna dostupná energetická hladina. Částice se buďto nachází v jámě vlevo ($|\psi_L\rangle = (1, 0)^T$) a má energii ε_1 , nebo v jámě vpravo ($|\psi_R\rangle = (0, 1)^T$) a pak má energii ε_2 .

Pokud nás zajímá časový vývoj stavu $|\psi\rangle(\tau) = (\psi_1(\tau), \psi_2(\tau))^T$, kdy se částice nachází v čase $\tau = 0$ v jámě vlevo, řešíme časovou Schrödingerovu rovnici (75). V bodě 2 jsme to učinili a vidíme, že při této počáteční podmínce je pravděpodobnost výskytu částice v jámě vlevo, resp. vpravo rovna $|\psi_1(\tau)|^2 = 1$ a $|\psi_2(\tau)|^2 = 0$, tedy v čase konstantní.

Částice může být také ve stavu, který je lineární kombinací $\alpha|\psi_R\rangle + \beta|\psi_L\rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, přičemž $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, aby byl tento stav normován na jedničku. I v tomto případě ale zůstane pravděpodobnost výskytu částice v jámě vlevo $|\psi_1(\tau)|^2$, resp. vpravo $|\psi_2(\tau)|^2$ v čase konstantní (totiž $|\alpha|^2$, resp. $|\beta|^2$).

Systém popsaný hamiltoniánem H odpovídá například dvěma jámám, u nichž je nenulová pravděpodobnost, že částice v jedné jámě přeskóčí do druhé jámy (tunelový jev). Vidíme, že pro $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ snímá porucha⁵⁴ V degeneraci, tedy, že dvojnásobně degenerovaná hladina

⁵⁴Toto označení pochází z úloh řešených tzv. poruchovým počtem, kde známe vlastní čísla a vlastní vektory pouze u operátoru H_0 a hledáme je také pro $H = H_0 + \alpha V$. Vlastní vektory a vlastní čísla H zapíšeme ve tvaru řady v mocninách α a zajímáme se většinou pouze o lineární a případně kvadratický člen: to je přijatelné pouze pokud je α malé, a αV je tedy pouze slabá porucha k H_0 .

$E = \varepsilon$ se rozštěpí na dvě hladiny⁵⁵ $\varepsilon \pm t$. Příslušné vlastní stavy jsou symetrická vlnová funkce $(1, 1)^T$ pro $\varepsilon + t$ a antisymetrická vlnová funkce $(1, -1)^T$ pro $\varepsilon - t$. Jelikož je u reálných systémů $t < 0$, je první zmíněná vlnová funkce základní stav systému (viz obrázek 17). U dvouatomové molekuly by to byl vazebný orbital (zatímco $(1, -1)^T$ by odpovídala antivazebnému orbitalu).

Co se týče časového vývoje, vidíme, že když částici vhodíme do jámy vlevo, $|\psi\rangle(0) = (1, 0)^T$, bude částice „přeskakovat“ mezi jámami, neboť $|\psi_1(\tau)|^2 = \cos^2 \omega_t \tau$ a $|\psi_2(\tau)|^2 = \sin^2 \omega_t \tau$.

Na závěr učiňme ještě dvě poznámky. Rovnice

$$\exp(H\tau/i\hbar)|\psi(0)\rangle = |\psi(\tau)\rangle$$

nás opravňuje nazývat $U(\tau) = \exp(H\tau/i\hbar)$ operátorem časového vývoje nebo také *evolučním operátorem*. Díky hermitovskosti H je tento operátor automaticky unitární. Klidně se o tom přesvědčte.

Konečně se možná čtenář ptá, jak souvisí matice se „skutečnou kvantovou mechanikou“, v níž je stacionární Schrödingerova rovnice (pro jednorozměrný systém)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x).$$

Inu, $\psi(x)$ vždy volíme z nějakého *Hilbertova prostoru*, což je obvykle nekonečnědimenzionální (úplný) vektorový prostor se skalárním součinem. Může se ale také stát, že je dimenze tohoto prostoru konečná (a nebo učiníme nějakou fyzikální aproximaci a omezíme se na podprostor konečné dimenze). Pak si ale lze v tomto prostoru zvolit vhodnou bázi a vyjádřit operátor v hranatých závorkách pomocí matice. *KV

11.2 Soustava diferenciálních rovnic s rezonancí

Úkol: Nalezněte obecné řešení následující soustavy rovnic pro $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 \end{aligned} \quad (77)$$

⁵⁵Formule (76) ukazuje, že i pro $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ porucha způsobí, že se hladiny od sebe vzdálí ($|\lambda_1 - \lambda_2| > |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$).

s počáteční podmínkou $y(0) = (c_1, c_2)^T$.

Řešení: Nejdříve zavedeme následující označení

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

V tomto označení můžeme soustavu zapsat ve tvaru $y' = Ay$. Matice A je matice s konstantními koeficienty, a proto je řešení soustavy (bez počáteční podmínky) jakýkoliv vektor tvaru $\exp(Ax)v$. Pokud máme ještě zadanou nějakou počáteční podmínku typu $y(0) = c$, pak je řešením soustavy vektor $y = \exp(Ax)c$, neboli vektor, který získáme aplikací matice $\exp Ax$ na vektor počátečních podmínek c . Asi nám tedy nezbyde než najít matici $\exp(Ax)$.

Jak na to? Matici A převedeme na Jordanův tvar J_A , a využijeme toho, že platí $\exp(Ax) = C \exp(J_A x) C^{-1}$, kde C je matice, která transformuje složky vektoru z Jordanovy do kanonické báze. Exponenciálu matice J_A už spočteme snadněji (viz vztah 78). Najdeme tedy nejprve Jordanův tvar matice A . Vlastní čísla matice A získáme jako kořeny charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 3)^2.$$

Matice A má dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2} = 3$. Protože

$$\dim \text{Ker}(A - 3I) = 2 - h \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1,$$

existuje jen jeden⁵⁶ vlastní vektor A . Bázi \mathbb{R}^2 tedy z vlastních vektorů A neposkládáme, a A tudíž není diagonalizovatelná. Musí pak ale nutně existovat řetězec délky dva $a \rightarrow b \rightarrow 0$, neboli $(A - 3I)a = b$, $(A - 3I)b = 0$ a a, b pak tvoří bázi \mathbb{R}^2 . Pro kontrolu se můžeme přesvědčit, že $(A - 3I)^2$ je nulová matice. Jordanův tvar tedy bude

$$J_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jako vektor z $\text{Ker}(A - 3I)^2$ zvolme například $a = (1, 0)^T$ a z toho dostaneme $b = (A - 3I)a = (1, 1)^T$. Matice C , která transformuje

⁵⁶Tím myslíme, že prostor vlastních vektorů je jednorozměrný.

A na Jordanův tvar má ve sloupcích vektory b, a (v tomto pořadí), a tedy podle Čihákova pravidla (38 v příkladu 6.5)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Přesvědčte se, že skutečně $J_A = C^{-1}AC$.

Exponenciála potom musí být

$$\begin{aligned} \exp(Ax) &= \exp(CJ_AxC^{-1}) = C \exp(J_Ax) C^{-1} = \\ &= C \exp \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x \right] C^{-1} = C \exp \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \right] C^{-1} \quad (78) \end{aligned}$$

Zde můžeme využít pravidla o exponenciále součtu $\exp(A+B) = \exp A \exp B$, protože obě matice v exponenciále spolu komutují (první matice je násobek \cdot). To nám umožní upravit výše uvedenou rovnici na

$$\exp(Ax) = C \exp \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x \right] \exp \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \right] C^{-1},$$

kde snadno vypočteme obě požadované exponenciály. Je totiž

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} 3x & 0 \\ 0 & 3x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{3x} & 0 \\ 0 & e^{3x} \end{pmatrix}, \\ \exp \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \cdot + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Konečně pro exponenciálu A dostaneme

$$\exp(Ax) = \begin{pmatrix} e^{3x} + xe^{3x} & -xe^{3x} \\ xe^{3x} & e^{3x} - xe^{3x} \end{pmatrix}.$$

Řešením rovnice 78 pak je $y = \exp(Ax)c$, kde c je vektor počátečních podmínek.

Zdá se, že tímto jsme s řešením skončili. Nejvíce času nám při řešení úlohy zabral výpočet exponenciály matice A . Položme si otázku, zda bychom se nemohli bez exponenciály matice A obejít.

Nejdříve prozkoumáme, jak matice $\exp(Ax)$ působí na vektory Jordanovy báze \mathbf{a} a \mathbf{b} .

$$\exp(Ax)\mathbf{a} = \begin{pmatrix} e^{3x} + xe^{3x} & -xe^{3x} \\ xe^{3x} & e^{3x} - xe^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3x} + xe^{3x} \\ xe^{3x} \end{pmatrix}$$

$$\exp(Ax)\mathbf{b} = \begin{pmatrix} e^{3x} + xe^{3x} & -xe^{3x} \\ xe^{3x} & e^{3x} - xe^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$$

Na první pohled se nestalo nic zajímavého. Při podrobnějším zkoumání si však uvědomíme, že

$$\begin{aligned} \exp(Ax)\mathbf{a} &= e^{3x}\mathbf{a} + xe^{3x}\mathbf{b} \\ \exp(Ax)\mathbf{b} &= e^{3x}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Skutečně, nejde o náhodu. Vektor \mathbf{b} je totiž vlastní vektor matice A příslušející vlastnímu číslu $\lambda = 3$. Jinak: platí $A\mathbf{b} = 3\mathbf{b}$. Proto

$$\begin{aligned} \exp(Ax)\mathbf{b} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ax)^n}{n!} \right) \mathbf{b} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n A^n \mathbf{b}}{n!} \right) = \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n 3^n \mathbf{b}}{n!} \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} \right) \mathbf{b} = e^{3x}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Toto neznamena nic jiného, než že pokud je \mathbf{u} vlastní vektor matice A příslušející vlastnímu číslu λ , pak je \mathbf{u} také vlastní vektor matice $\exp A$, příslušející vlastnímu číslu e^λ .

Nyní se zamyslíme nad vektorem \mathbf{a} . Připomeňme si, že vektor \mathbf{a} byl zvolen z $\text{Ker}(A - 3)^2$, neboli $(A - 3)^2 \mathbf{a} = 0$. Navíc $\mathbf{b} = (A - 3)\mathbf{a}$. Proto (u * využíváme opět komutativitu)

$$\begin{aligned} \exp(Ax)\mathbf{a} &= \exp[(A - 3)x + 3x]\mathbf{a} = \exp[(A - 3)x] \exp(3x)\mathbf{a} = \\ &= \exp[(A - 3)x] e^{3x}\mathbf{a} = e^{3x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(A - 3)x]^n}{n!} \right) \mathbf{a} \\ &= e^{3x} \left(\mathbf{a} + (A - 3)x\mathbf{a} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n (A - 3)^n \mathbf{a}}{n!} \right). \end{aligned}$$

V poslední sumě jsou ale už jen nulové matice. Výsledek působení exponenciály na vektor \mathbf{a} je tedy

$$\exp(Ax)\mathbf{a} = e^{3x}\mathbf{a} + xe^{3x}\mathbf{b}.$$

Protože vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} tvoří bázi prostoru \mathbb{R}^2 , můžeme každou počáteční podmínku zapsat jako $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Na takto rozloženou počáteční podmínku pak působí $\exp(Ax)$ následovně

$$\exp(Ax)\mathbf{c} = \exp(Ax)(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\exp(Ax)\mathbf{a} + \beta\exp(Ax)\mathbf{b}.$$

Chování vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} při působení matice $\exp(Ax)$ jsme již vyřešili, proto můžeme pokračovat a dostaneme řešení diferenciální rovnice jako

$$y(x) = \exp(Ax)\mathbf{c} = \alpha(e^{3x}\mathbf{a} + xe^{3x}\mathbf{b}) + \beta(e^{3x}\mathbf{b}). \quad (79)$$

Pro zjišťování chování vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} při působení $\exp Ax$ jsme vůbec nemuseli znát exponenciálu matice A , stačila nám pouze důkladná znalost Jordanova tvaru a Jordanovy báze matice A . Pokud nechceme počítat exponenciálu A , vystačíme si s tímto jednodušším postupem. *VP

11.3 Diferenciální rovnice s pravou stranou

Úkol: Nalezněte obecné řešení soustavy

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= 4y_1 - y_2 + e^{3t}(t + \sin t) \\ \dot{y}_2(t) &= y_1 + 2y_2 + te^{3t} \cos t. \end{aligned} \quad (80)$$

Řešení: Pokud označíme

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} e^{3t}(t + \sin t) \\ te^{3t} \cos t \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

lze rovnici zapsat zkráceně

$$\dot{y} = Ay + f(t).$$

Jedná se tedy o *nehomogenní soustavu lineárních diferenciálních rovnic*. Při jejím řešení budeme postupovat následovně: nejprve (1) najdeme řešení homogenní soustavy a pak (2) metodou variace konstant najdeme obecné řešení nehomogenní soustavy.

1. Homogenní soustavu $Ay = \dot{y}$ jsme již vyřešili v příkladu 11.2. Zopakujme výsledek: v \mathbb{R}^2 jsme našli (Jordanovu) bázi

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Protože každý vektor počátečních podmínek y_0 je možné rozložit do této báze (o které víme, jak se chová při zobrazení $\exp(tA)$), můžeme každé řešení homogenní soustavy zapsat jako lineární kombinaci $\exp(tA)\mathbf{a}$ a $\exp(tA)\mathbf{b}$, neboli

$$y_0 = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \alpha(e^{3t}\mathbf{a} + te^{3t}\mathbf{b}) + \beta e^{3t}\mathbf{b},$$

kde α, β jsou reálné konstanty.

2. Nyní budeme konstruovat řešení nehomogenní soustavy *metodou variace konstant*. Hledejme tedy řešení ve tvaru

$$y(t) = \alpha(t)(e^{3t}\mathbf{a} + te^{3t}\mathbf{b}) + \beta(t)e^{3t}\mathbf{b}, \quad (81)$$

kde $\alpha(t)$ a $\beta(t)$ jsou funkce. Rozložme ještě pravou stranu $f(t)$ do Jordanovy báze \mathbf{b} a \mathbf{a} . Chceme tedy, aby platilo

$$\gamma\mathbf{a} + \delta\mathbf{b} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t}(t + \sin t) \\ te^{3t} \cos t \end{pmatrix} = f(t),$$

odkud $\delta = te^{3t} \cos t$, $\gamma = e^{3t}(t + \sin t - t \cos t)$. Dosadíme-li rovnici (81) do rovnice ze zadání (80) a uvědomíme-li si, že (81) řeší homogenní rovnici $\forall t \in \mathbb{R}$, dostaneme

$$\dot{\alpha}(t)(e^{3t}\mathbf{a} + te^{3t}\mathbf{b}) + \dot{\beta}(t)e^{3t}\mathbf{b} = f(t).$$

Využijme nyní toho, že jsme $f(t)$ rozložili do Jordanovy báze a pišme

$$\dot{\alpha}(t)(e^{3t}\mathbf{a} + te^{3t}\mathbf{b}) + \dot{\beta}(t)e^{3t}\mathbf{b} = \gamma\mathbf{a} + \delta\mathbf{b},$$

neboli ve složkách

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t)e^{3t} &= \gamma \\ \dot{\alpha}(t)te^{3t} + \dot{\beta}(t)e^{3t} &= \delta. \end{aligned}$$

Integrovaním první rovnice určíme $\alpha(t)$

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t)e^{3t} &= e^{3t}(t + \sin t - t \cos t) \\ \alpha(t) &= \int (t + \sin t - t \cos t) dt \\ \alpha(t) &= \frac{t^2}{2} - 2 \cos t - t \sin t + C_1.\end{aligned}$$

Podobně dojdeme k $\beta(t)$

$$\begin{aligned}\dot{\beta}(t)e^{3t} &= te^{3t} \cos t - \dot{\alpha}(t)te^{3t} \\ \dot{\beta}(t) &= t \cos t - t(t + \sin t - t \cos t) \\ \beta(t) &= \int (t \cos t - t^2 - t \sin t + t^2 \cos t) dt \\ \beta(t) &= -\frac{t^3}{3} + \cos t - 3 \sin t + t \sin t + 3t \cos t + t^2 \sin t + C_2.\end{aligned}$$

Takto spočtené koeficienty dosadíme zpět do (81) a dostáváme

$$\begin{aligned}y(t) &= e^{3t} \begin{pmatrix} \alpha(1+t) + \beta \\ \alpha t + \beta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t} \cdot (C_1 + C_2 + C_1 t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 - \cos t - 3 \sin t + t \cos t) \\ e^{3t} \cdot (C_2 + C_1 t + \frac{1}{6}t^3 + \cos t - 3 \sin t + t \cos t + t \sin t) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

kde C_1, C_2 jsou reálné konstanty. Vektor $y(t)$ je obecným řešením nehomogenní soustavy 80. (V [PLA], str. 199 je metoda variace konstant popsána trochu jiným, avšak ekvivalentním způsobem.)

*VP,AK

11.4 Komplexně půvabná diferenciální rovnice

Úkol: Nalezněte řešení $y_i = y_i(t)$, $i = 1, 2$ soustavy rovnic

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_1 + 2y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + y_2\end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $y(0) = (c_1, c_2)^T$.

Řešení: Jako obvykle zavedeme označení

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Zkusme nejdříve najít řešení podle postupu zmíněného v příkladu 11.2, tedy nebudeme explicitně hledat $\exp(At)$. Protože nás však počítání exponenciál matic baví, najdeme posléze řešení i obvyklým způsobem.

Vypočteme vlastní čísla matice A

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 3.$$

Charakteristická rovnice má komplexní kořeny $\lambda_1 = 1 - i\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1 + i\sqrt{2}$. Připomeňme si, že u reálných matic se komplexní vlastní čísla vždy vyskytují v komplexně sdružených párech. To nám nakonec umožní vyjádřit $\exp(At)$ pomocí reálných výrazů se siny a kosiny místo komplexní exponenciály.

Vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu λ_1 je například vektor $u = (i\sqrt{2}, 1)^T$, vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu λ_2 je vektor komplexně sdružený k vektoru u , neboli $v = (-i\sqrt{2}, 1)^T$. Podle toho, co víme z příkladu 11.2, bude účinek exponenciály na vlastní vektory u , v následující

$$\begin{aligned} \exp(At) u &= e^{(1-i\sqrt{2})t} u \\ \exp(At) v &= e^{(1+i\sqrt{2})t} v. \end{aligned}$$

Nechť je dána počáteční podmínka $y(0) = c$. Tento vektor rozložíme do Jordanovy báze matice A , tzn. najdeme čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ taková, že platí $c = \alpha u + \beta v$. Řešením rovnice je $\exp(At) c$, a to můžeme napsat jako

$$\begin{aligned} \exp(At) c &= \exp(At) (\alpha u + \beta v) = \\ &= \alpha e^{(1-i\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{(1+i\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (82)$$

čímž jsme našli řešení zadané diferenciální rovnice.

Leckomu se však komplexní čísla nelíbí, a proto ještě zkusíme zapsat výsledek bez užití komplexních čísel. Vzhledem k tomu, že soustava neobsahovala komplexní čísla, máme — pokud si zvolíme reálné počáteční podmínky c — na reálné řešení také opravdu nárok. Z reálnosti c (tedy $c^* = c$) plyne $\beta = \alpha^*$; všimněte si také, že

takto máme ve volbě c jen dva reálné stupně volnosti a ne čtyři jako v případě komplexního c . Dále si připomeneme dobře známé vztahy

$$2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}, \quad 2i \sin x = e^{ix} - e^{-ix}.$$

Přímočárými algebraickými úpravami pak dostaneme z (82)

$$y(t) = 2 \operatorname{Re} \alpha \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin(t\sqrt{2}) \\ \cos(t\sqrt{2}) \end{pmatrix} e^t + 2 \operatorname{Im} \alpha \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \cos(t\sqrt{2}) \\ \sin(t\sqrt{2}) \end{pmatrix} e^t.$$

Pro zadanou počáteční podmínku c získáme α řešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých $c = \alpha u + \alpha^* v$.

Úlohu jsme již vyřešili a jako početní cvičení ještě můžeme zkusit explicitně nalézt exponenciálu matice A . Vše potřebné je už připraveno, a proto budeme postupovat rychleji. Matici přechodu C najdeme tak, že do jejích sloupců napíšeme vlastní vektory matice A . Matice C a její inverze C^{-1} (nalezená pomocí Čihákova pravidla 38 z příkladu 6.5) je

$$C = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4}i & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4}i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exponenciálu počítáme obvyklým způsobem

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \exp(CtJ_A C^{-1}) = C \exp(tJ_A) C^{-1} = \\ &= C \begin{pmatrix} e^{(1-i\sqrt{2})t} & 0 \\ 0 & e^{(1+i\sqrt{2})t} \end{pmatrix} C^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(e^{(1+i\sqrt{2})t} + e^{(1-i\sqrt{2})t} \right) & -\frac{i\sqrt{2}}{2} \left(e^{(1+i\sqrt{2})t} - e^{(1-i\sqrt{2})t} \right) \\ \frac{i\sqrt{2}}{4} \left(e^{(1+i\sqrt{2})t} - e^{(1-i\sqrt{2})t} \right) & \frac{1}{2} \left(e^{(1+i\sqrt{2})t} + e^{(1-i\sqrt{2})t} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a po úpravě použitím výše zmíněných vzorců pro sinus a kosinus dostaneme elegantnější vyjádření

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{2}) e^t & \sqrt{2} \sin(t\sqrt{2}) e^t \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(t\sqrt{2}) e^t & \cos(t\sqrt{2}) e^t \end{pmatrix}.$$

Řešení diferenciální rovnice je $\exp(tA)$ aplikované na vektor počátečních podmínek c , aneb

$$y(t) = \exp(tA) c = \begin{pmatrix} c_1 \cos(t\sqrt{2}) e^t + c_2 \sqrt{2} \sin(t\sqrt{2}) e^t \\ -c_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(t\sqrt{2}) e^t + c_2 \cos(t\sqrt{2}) e^t \end{pmatrix}.$$

Můžeme zkontrolovat, že jsme dospěli ke stejnému výsledku.

*VP

11.5 Soustava 3 diferenciálních rovnic

Úkol: Vyřešte soustavu

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix}$$

s proměnnou t .

Řešení: Budeme hledat řešení pomocí exponenciály matice At . Nejdříve si matici A převedeme do Jordanova kanonického tvaru. Charakteristický polynom A vychází $p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2$, tomu odpovídají vlastní čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 0$. K vlastnímu číslu $\lambda = 1$ vypočteme vlastní vektor $v_1 = (1, 1, 1)^T$.

Nyní se věnujme dvojnásobnému číslu $\lambda = 0$. Hodnota matice A je 2, hodnota A^2 je 1, tedy $\dim \text{Ker}(A - \lambda) = 1$ a $\dim \text{Ker}(A - \lambda)^2 = 2$. To znamená⁵⁷, že pro $\lambda = 0$ existuje jen jeden vlastní vektor (až na násobek), a proto musíme zkonstruovat jeden řetízek délky dvě. Jak určíme jeho vektory? Nejdříve můžeme řešit např. soustavu

$$A^2 u = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} u = 0.$$

Dostáváme například $u = (0, 3, 1)^T$. Jeho obrazem by měl být vlastní vektor v_2 . Dopočteme $v_2 = Au = (1, 3, 2)^T$. Samozřejmě se může stát, že při řešení rovnice $A^2 v = 0$ se trefíme vektorem u už přímo do

⁵⁷Věděli jsme to už v okamžiku, kdy jsme spočítali $\dim(\text{Ker } A - \lambda) = 1$.

v_2 . Potom je třeba zkusit jiné řešení rovnice $A^2 u = 0$. Tím získáváme Jordanův kanonický tvar $A = QJ_AQ^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ v_1 & v_2 & u \end{array} \quad \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{array}$$

Jiná možnost, která je v tomto případě snad méně pracná (nemusíme počítat A^2), je najít v_2 a pak řešit $Au = v_2$. Tato metoda se ale v obecném případě nemusí vyplatit, konkrétně u matic, které mají k jednomu vlastnímu číslu více řetízků.

Následuje již jen výpočet samotné exponenciely: $\exp(At) = Q \exp(J_A t) Q^{-1}$. Spočítáme si tedy exponenciálu jednotlivých Jordanových bloků. První blok je tvořen jen vlastním číslem 1, a jeho exponenciála je tedy e^t . Druhý blok je přímo Jordanova buňka (násobená t) a její exponenciála je

$$+ \frac{t}{1!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dohromady to dává

$$\begin{aligned} \exp(At) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3e^t + t - 2 & e^t + t - 1 & -3e^t - 2t + 3 \\ 3(e^t + t - 1) & e^t + 3t & -3(e^t + 2t - 1) \\ 3e^t + 2t - 3 & e^t + 2t - 1 & -3e^t - 4t + 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Konkrétní rovnice pro y_1, y_2, y_3 získáme tím, že matici $\exp(At)$ vynásobíme počátečními podmínkami. Jako zajímavost lze uvést, nalik mohou různé počáteční podmínky ovlivnit tvar řešení. Např. zvolíme-li $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0$, pak $y_1 = e^t + t - 1, y_2 = e^t + 3t, y_3 = e^t + 2t - 1$, tedy všechny složky řešení pro $t \rightarrow \infty$ exponenciálně rostou. Zvolíme-li ale $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1$, potom $y_1 = -t + 1, y_2 = -3t, y_3 = -2t + 1$ a složky řešení rostou (v absolutní hodnotě) pouze lineárně. *PV

11.6 Lineární nezávislost řešení soustavy diferenciálních rovnic

Úkol: Necht' vektorové funkce

$$x_1(t), \dots, x_n(t) \quad (83)$$

řeší soustavu n lineárních diferenciálních rovnic $x'(t) = Ax(t)$. Ukažte, že k tomu, aby vektory (83) byly lineárně nezávislé pro všechny časy t , je nutné a stačí, aby byly lineárně nezávislé pro $t = 0$.

Řešení: Sloupcové vektory (83) naskládáme do čtvercové matice $X(t)$, jejíž determinant označíme $W(t)$ (tzv. *Wronského determinant*). Chceme tedy dokázat

$$W(0) \neq 0 \iff (W(t) \neq 0 \quad \forall t).$$

Spočteme časovou derivaci $W'(t)$. Determinant zapíšeme jako sumu (přes π) součinů typu $a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$. Tyto součiny se derivují podle známého pravidla

$$(a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)})' = a'_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} + \dots \\ \dots + a_{1\pi(1)}a_{2\pi(2)} \cdots a'_{n\pi(n)}.$$

Z každého zderivovaného součinu nyní vezmeme člen, v němž se derivovalo $a_{1\pi(1)}$ (π je samozřejmě v každém členu jiné). Všech těchto $n!$ výrazů dá dohromady determinant matice A , v níž jsou všechny elementy v prvním řádku zderivovány. Pokud označíme k -tý řádek r_k , znamená to tedy

$$W'(t) = \sum_{k=1}^n \det \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_{k-1}(t) \\ r_k'(t) \\ r_{k+1}(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \det \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_{k-1}(t) \\ A_{kj}r_j(t) \\ r_{k+1}(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{pmatrix}.$$

Determinant v poslední dvojité sumě je ale $A_{kj}\delta_{kj}W(t)$ (proč je determinant s $k \neq j$ nula?), což nám dá

$$W'(t) = \sum_{k=1}^n A_{kk}W(t) = \text{Tr } A \cdot W(t).$$

Dostáváme jednoduchou diferenciální rovnici pro $W(t)$, jejímž řešením je

$$W(t) = W(0) \exp(t \text{Tr } A).$$

Odtud již snad je platnost našeho tvrzení evidentní. *TB

11.7 Jsou exponenciála a logaritmus opravdu navzájem inverzní?

Úkol: Ukažte, že řady pro exponenciálu a logaritmus jsou navzájem inverzní funkce, přímým dosazením jedné řady do druhé. Z toho potom přímo plyne, že i pro matice platí $\ln \exp A = A$.

Řešení: Použijeme řady

$$y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\ln y = \frac{y-1}{1} - \frac{(y-1)^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(y-1)^n}{n} + \dots$$

Je nutno podotknout, že druhá řada má poloměr konvergence roven 1. Všechny naše úvahy se tedy budou týkat pouze intervalu $y \in (0, 2)$.

Náš postup bude následující: Nejprve vyjádříme v co nejpřehlednějším tvaru výraz $(y-1)^n = (e^x-1)^n$ pro všechna přirozená n . Poté tento tvar dosadíme do řady pro $\ln y$. Nakonec odvodíme, že vskutku platí $\ln e^x = x$ pro $y = e^x \in K$, kde K je oblast, na níž řada pro $\ln y$ konverguje; v našem výpočtu bude $K = \{y \in \mathbb{C}, |y-1| < 1\}$.

Nejprve tedy zjednodušíme výraz $(e^x-1)^n$. Podle binomické věty

platí

$$\begin{aligned}
 (e^x - 1)^n &= e^{nx} - \binom{n}{1} e^{(n-1)x} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} e^x + (-1)^n = \\
 &= \left[1 + \frac{nx}{1!} + \dots + \frac{n^k x^k}{k!} + \dots \right] - \\
 &\quad - \binom{n}{1} \left[1 + \frac{(n-1)x}{1!} + \dots + \frac{(n-1)^k x^k}{k!} + \dots \right] + \dots \\
 &\quad \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots \right] + (-1)^n
 \end{aligned}$$

Sdružíme nyní členy se stejnou mocninou x . To lze díky již výše zmiňované absolutní konvergenci řady e^x .

$$\begin{aligned}
 (e^x - 1)^n &= 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n + \\
 &\quad + x \frac{1}{1!} \left[n - \binom{n}{1} (n-1) + \dots + (-1)^n \binom{n}{n-1} \right] + \quad (84) \\
 &\quad + x^2 \frac{1}{2!} \left[n^2 - \binom{n}{1} (n-1)^2 + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \right] + \dots \\
 &\quad \dots + x^k \frac{1}{k!} \left[n^k - \binom{n}{1} (n-1)^k + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \right] + \dots
 \end{aligned}$$

Protože ale $e^x - 1$ neobsahuje absolutní člen, je nejnižší mocnina x v uvedeném rozvoji n . Prvních n řádků je tedy nulových. Tento fakt, který lze dokázat i přímým výpočtem, později ještě jednou využijeme.

Zkoumejme nyní, jaký je koeficient u členu x^m ve výrazu

$$\ln((e^x - 1) + 1) = \frac{(e^x - 1)^1}{1} - \frac{(e^x - 1)^2}{2} + \frac{(e^x - 1)^3}{3} - \dots$$

pro $m > 1$. Podle výše uvedeného je tento koeficient stejný jako koeficient u x^m ve výrazu

$$\frac{(e^x - 1)^1}{1} - \frac{(e^x - 1)^2}{2} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{(e^x - 1)^m}{m}$$

Dosadíme-li nyní z výše odvozené formule pro $(e^x - 1)^n$, zjistíme, že tento koeficient je roven

$$\begin{aligned}
 a_m &= \frac{1}{m!} \left[1 - \frac{[2^m - \binom{2}{1} 1^m]}{2} + \frac{[3^m - \binom{3}{1} 2^m + \binom{3}{2} 1^m]}{3} - \dots + \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^{m-1} \frac{[m^m - \binom{m}{1} (m-1)^m + \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1}] }{m} \right]
 \end{aligned}$$

Naším posledním úkolem bude dokázat, že tento výraz je pro $m > 1$ roven nule. Zde vede k cíli následující úvaha: Přeskupíme uvažovaný výraz tak, že dáme k sobě členy s mocninou k^m o stejném základu a tento výraz zjednodušíme. Nakonec ukážeme, že součet těchto výrazů pro $k = 1, \dots, m$ je roven nule.

První ohlášený krok je

$$\begin{aligned} m! \cdot a_m &= 1^m \left[1 + \frac{1}{2}2 + \frac{1}{3}3 + \dots + \frac{1}{m}m \right] - \\ &- 2^m \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \binom{3}{1} + \dots + \frac{1}{m} \binom{m}{m-2} \right] + \\ &+ 3^m \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \binom{4}{1} + \dots + \frac{1}{m} \binom{m}{m-3} \right] - \dots \\ &\dots + (-1)^{i-1} i^m \left[\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} \binom{i+1}{1} + \frac{1}{i+2} \binom{i+2}{2} + \dots + \frac{1}{m} \binom{m}{m-i} \right] + \\ &+ (-1)^{m-1} \frac{1}{m} m^m. \end{aligned}$$

Pomocí identity

$$\frac{1}{i+k} \binom{i+k}{k} = \frac{(i+k)!}{k!i!} \cdot \frac{1}{i+k} = \frac{(i+k-1)!}{k!(i-1)!} \cdot \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \binom{i+k-1}{k}.$$

lze výrazně zjednodušit i -tý řádek

$$\begin{aligned} (-1)^{i-1} i^m \left[\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} \binom{i+1}{1} + \frac{1}{i+2} \binom{i+2}{2} + \dots + \frac{1}{m} \binom{m}{m-i} \right] &= \\ = (-1)^{i-1} i^{m-1} \left[1 + \binom{i}{1} + \binom{i+1}{2} + \dots + \binom{m-1}{m-i} \right] &= \\ = (-1)^{i-1} i^{m-1} \binom{m}{i}. \end{aligned}$$

Poslední krok spočíval v opakovaném používání identity $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Celkem je tedy

$$m! \cdot a_m = 1^{m-1} \binom{m}{1} - 2^{m-1} \binom{m}{2} + \dots + (-1)^{m-1} m^{m-1} \binom{m}{m},$$

což je (eventuelně až na „normalizaci“) koeficient u x^{m-1} v rozvoji $(e^x - 1)^m$ do řady (84). Již výše jsme ale vysvětlili, že tento výraz je roven nule. Zároveň je zřejmé, že u x^1 je koeficient jedna, tedy $\ln(e^x) = x$. *JV

11.8 Generátory (2) aneb Výpočet exponenciály trikem pro speciální matici

Úkol: Vypočítejte $\exp(i\varphi n \cdot \sigma)$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Vektor σ obsahuje Pauliho matice (viz příklad 6.1)

$$\sigma = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

a $n = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$, $|n| = 1$. Pokud se v tomto zápisu nevyznáte, pak vězte, že máte spočítat exponenciálu z matice

$$i\varphi n \cdot \sigma = i\varphi \left(n_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + n_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

Z výsledku odvodíte, že (1) reálné kombinace Pauliho matic $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ generují grupu $\text{SU}(2)$ a podobně že (2) reálné kombinace matic $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ generují $\text{U}(2)$

Řešení: Exponenciálu si rozepíšeme do řady

$$\exp(i\varphi n \cdot \sigma) = 1 + i\varphi n \cdot \sigma - \frac{\varphi^2 (n \cdot \sigma)^2}{2} - \frac{i\varphi^3 (n \cdot \sigma)^3}{3!} + \dots$$

Mocniny matice $n \cdot \sigma$ můžeme upravit pomocí vzorce (30) v příkladu 6.1.

$$\begin{aligned} (n \cdot \sigma)(n \cdot \sigma) &= \sum_{j=1}^3 n_j \sigma_j \sum_{k=1}^3 n_k \sigma_k = \sum_{j,k=1}^3 n_j n_k (\sigma_j \sigma_k) = \\ &= \sum_{j,k} n_j n_k \left[\sum_l i \epsilon_{lkj} \sigma_l + \delta_{kj} \right] = 0 + \sum_j n_j^2 = |n|^2 = 1 \end{aligned}$$

Výraz $v_l = \sum_{jk} n_j n_k \epsilon_{lkj}$ je nulový pro každé l : buď to chápeme jako úžení součinu symetrického a antisymetrického součinu (členy $n_j n_k \epsilon_{lkj}$ a $n_k n_j \epsilon_{ljk}$ se vyruší, neboť jsou až na znaménko stejné), nebo víme, že v_l jsou složky vektoru $n \times n = 0$.

Do rozvoje pro exponenciálu pak můžeme za $(n \cdot \sigma)(n \cdot \sigma)$ dosadit

$$\exp(i\varphi n \cdot \sigma) = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots + (n \cdot \sigma) \left[i\varphi - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \dots \right]$$

První část rozvoje lze po vytknutí jednotkové matice napsat jako $\cos \varphi$ a druhou část zase (po vytknutí $in \cdot \boldsymbol{\sigma}$) jako $\sin \varphi$. Výsledek můžeme tedy zapsat v elegantním tvaru

$$\exp(i\varphi n\boldsymbol{\sigma}) = \cos \varphi + (n\boldsymbol{\sigma})i \sin \varphi. \quad (85)$$

Nyní se zamysleme nad tím, co jsme vlastně tímto výpočtem dokázali. Předně: každou matici A z $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$, resp. z $\mathbb{U}(2)$ lze napsat jako

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad e^{i\alpha} \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{kde } \alpha \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{C}, \\ |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad (86)$$

to lze extrahovat z podmínek $AA^\dagger = 1$ a $\det A = 1$ (resp. $AA^\dagger = 1$ pro matice z $\mathbb{U}(2)$). Dále se přesvědčte, že matice na pravé straně (85) je pouze jiné vyjádření obecné matice z $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$, neboli že pro každou matici ve tvaru (86) vlevo lze zvolit φ a n tak, aby

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \cos \varphi + (n\boldsymbol{\sigma})i \sin \varphi$$

a naopak.

Konečně si uvědomíme, že libovolnou reálnou kombinací Pauliho matic můžeme napsat jako $\varphi n\boldsymbol{\sigma}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Rovnice (85) pak říká, že z těchto lineárních kombinací vygenerujeme celou grupu $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$. Pokud k Pauliho maticím přidáme jednotkovou matici, vygenerujeme zřejmě $\mathbb{U}(2)$, neboť $\exp(i\alpha + i\varphi n\boldsymbol{\sigma}) = e^{i\alpha} \exp(i\varphi n\boldsymbol{\sigma})$. Názorně tedy vidíme, že \mathfrak{u}_2 neboli hermitovské matice (tedy reálné lineární kombinace Pauliho matic a 1 , viz příklad 6.1) generují⁵⁸ $\mathbb{U}(2)$ a \mathfrak{su}_2 čili hermitovské matice s nulovou stopou (tedy lineární kombinace pouze Pauliho matic) generují $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$.

Zdůrazněme, že libovolná *Lieova algebra*, která je lineárním obalem tří objektů splňujících stejné komutační relace jako Pauliho matice

$$[\sigma_j, \sigma_k] = i \sum_l \varepsilon_{jkl} \sigma_l, \quad (87)$$

⁵⁸Pokud místo $\exp(iMt)$ používáme $\exp(Mt)$, budou to antihermitovské matice $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$.

tedy $[\sigma_1, \sigma_2] = i\sigma_3$ a další dvě relace získané cyklickou záměnou, je izomorfní \mathfrak{su}_2 , a tudíž generuje grupu, která je izomorfní $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$.

Jen pro osvěžení pojmů dodejme, že Pauliho matice jsou *infinitesimální generátory* $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$, neboť⁵⁹ $\exp(i\varphi\sigma_1)$, $\varphi \in \mathbb{R}$ je podgrupou $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$ a podobně to platí pro σ_2, σ_3 . Tyto tři podgrupy jsou příklady jednorozměrných *torů* v $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$: máme přitom na mysli jejich izomorfii s komutativní grupou $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ s operací násobení, $\mathbb{U}(1)$, tedy vlastně jednotkovou kružnicí; tuto grupu si můžeme představit také jako interval $\langle 0, 2\pi \rangle$ se sčítáním „modulo“ 2π (tedy slepíme konce úsečky a dostaneme onu kružnici).

Dvourozměrný torus by byla (opět komutativní) grupa $\mathbb{U}(1) \times \mathbb{U}(1)$. To samozřejmě není totéž, co $\mathbb{U}(2)$ (což je nekomutativní grupa; najděte nějaký hezký příklad). Grupa $\mathbb{U}(1) \times \mathbb{U}(1)$ je množina $\{(z_1, z_2), z_{1,2} \in \mathbb{C}, |z_{1,2}| = 1\}$ s násobením po složkách (viz přímé součiny v příkladu 2.1) a lze si ji také představit jako čtverec $\langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$, jemuž slepíme dvě a dvě protilehlé strany. Takto dostaneme záchranný kruh, torus, neboli anuloid. Skutečnost, že v $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$ existují pouze tory dimenze jedna⁶⁰, vyjadřujeme úslovím „*rank* $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$ je jedna“. *MV,KV

11.9 Jedna exponenciální formule pro determinant

Úkol: Necht' $A = \begin{pmatrix} \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \end{pmatrix} - W$ je diagonálně dominantní matice $n \times n$, tj. matice W je „malá“ ve smyslu, že pro každý index $i = 1, \dots, n$ je $\sum_j |w_{i,j}| < 1$. Předpokládáme navíc pro jednoduchost, že W je matice s nulovými prvky na diagonále. Pak platí formule

$$\det A \equiv \det \begin{pmatrix} \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \end{pmatrix} - W = \exp \left(\sum_{S \text{ prostá}} \log(1 - w_S) \right), \quad (88)$$

⁵⁹Pokud bychom používali definici s $\exp(\varphi\sigma_1)$, byl by infinitesimální generátor $i\sigma_1$ místo σ_1 .

⁶⁰Grupa $\{\exp(i\varphi_1\sigma_1), \varphi_1 \in \mathbb{R}\} \times \{\exp(i\varphi_2\sigma_2), \varphi_2 \in \mathbb{R}\}$ by byla kandidátem na takový dvourozměrný torus. Matice $\exp(i\varphi_1\sigma_1), \exp(i\varphi_2\sigma_2)$ spolu ale nekomutují. Upozorňujeme, že díky tomu výše naznačený součin nelze vůbec realizovat jako podgrupu $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$ (jinými slovy grupy, které násobíme, nejsou invariantní podgrupy $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$, viz příklad 2.7).

kde váhy smyček w_S (cyklů, které se mohou i protínat) jsou definovány analogicky jako váhy cyklů w_C , viz podrobněji formuli níže. Symbol \cdot značí jednotkovou matici, jak je to v této knize obvyklé.

Poznámka: Podmínka „malosti“ W zaručuje, že se uvedenou formulí nesnažíme aplikovat například v situacích, kdy determinant reálné matice je záporný. (Na druhé straně formule platí i pro komplexní matice W splňující podmínku nahoře.) Není totiž těžké si uvědomit, že podmínka nahoře implikuje kladnost determinantu (srovnejte s Gershgorinovou větou, příklad 9.2), tzn. souhlasnou orientaci A a \cdot (pro reálné matice samozřejmě).

Řešení: Tato formule je, jak uvidíme, důsledek věty o vyjádření $\det \exp A$ pomocí $\text{Tr } A$. Také se nám budou hodit vyjádření $\text{Tr } W^k$ jako sumy přes všemožné smyčky délky k , viz konec příkladu 6.8.

Zobecníme v teorii permutací již dříve zavedený pojem *cyklu* C (na indexové množině $1, \dots, n$) na obecnější pojem *smyčky* S takto: Symbolem (S, i_1) označujeme *smyčku s vybraným počátkem* i_1 , definovanou jako libovolná posloupnost tvaru $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_1)$, se *žebry* $(i_1, i_2), \dots, (i_k, i_1)$ splňujícími podmínky $i_1 \neq i_2$ atd. Vícenásobné návštěvy jednoho indexu i jsou tedy u smyčky S , narozdíl od cyklu C , *povoleny* (vylučujeme pouze existenci žeber typu (i, i)) a smyčka může tedy mít (na rozdíl od cyklu) libovolně velkou délku $|S| = k$. Délka smyčky je totéž co počet jejích žeber.

Index i_1 nazveme *počátečním bodem* smyčky S . Tento počáteční bod můžeme nyní „zapomenout“ — a mluvíme pak pouze o smyčce S (bez počátečního bodu). V tomto případě tedy ztotožňujeme objekty jako (i_1, \dots, i_n, i_1) a $(i_2, \dots, i_n, i_1, i_2)$. Pro každou smyčku definujeme v souvislosti s maticí $W = (w_{i,j})_{i,j=1}^n$ její *váhu* předpisem (všimněte si znaménka minus, máme totiž matici $A = \cdot - W$)

$$w_S = \prod_{(i,j) \in S} (-w_{i,j}),$$

kde součin se bere přes všechna žebra smyčky S .

Smyčku S nazveme *prostou* pokud ji není možno rozdělit na několik stejných smyček S' tak, aby $S = (S')^m$ kde m -tou mocninou smyčky S' rozumíme tuto smyčku probíhanou m -krát za sebou. (Neznamená to samozřejmě, že bychom prostou smyčkou nemohli

některé indexy navštívit vícekrát!) Je vcelku jasné (odůvodněte podrobněji), že každá smyčka S je vhodnou mocninou $S = (S')^m$ (častěji bude ovšem $m = 1$) nějaké prosté smyčky S' a přitom takováto prostá smyčka S' je určena jednoznačně až na počáteční bod. Ten potom můžeme zvolit celkem $|S'|$ způsoby.

Dokažme nyní konečně vztah (88). Použijme formule $\det \exp M = \exp \operatorname{Tr} M$

$$\det A \equiv \det(\mathbb{1} - W) = \exp \operatorname{Tr} [\log(\mathbb{1} - W)] = \exp \sum_{k=2}^{\infty} -\operatorname{Tr} \frac{1}{k} W^k.$$

Všimněme si, že faktor $1/k$ v rozvoji $\log(\mathbb{1} - W) = \sum_k -(1/k)W^k$ (připomeňme, že pro $k = 1$ máme předpoklad $w_{i,i} = 0$) je právě kompenzován možnou volbou k různých "počátků" ve smyčce S délky k (srovnejte s příkladem 6.8). Připomeňme dále, že stopa matice W^k je dána sumou přes všechny smyčky⁶¹ S délky $|S| = k$ s počátečním bodem

$$\operatorname{Tr} W^k = \sum_{(S, i_1); |S|=k} w_S.$$

Bylo by teď pěkné, kdybychom mohli říci, že se tato suma rovná $\sum_{S; |S|=k} |S| w_S$, kde sčítáme pouze přes smyčky s nespécifikovaným počátečním bodem. Toto pozorování platí ale pouze pro *prosté* smyčky S . Obecněji, příspěvek smyčky S^n , kde S je prostá a má délku m , najdeme ve výrazu $\operatorname{Tr} \log(\mathbb{1} - W) = \sum_k (1/k) \operatorname{Tr} W^k$ s koeficientem $1/mn$ (u členu s pořadím $k = mn$). Na druhé straně, objevíme ho tam (při různých posunech té smyčky S) celkem m -krát — což dává při sumaci přes všechny $k = mn$ celkový příspěvek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{mn} (w_S)^n = -\log(1 - w_S).$$

Výraz $\sum_k (1/k) \operatorname{Tr} W^k$ tedy můžeme přepsat pomocí sumy přes všechny *prosté* smyčky a tím je důkaz skončen:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{Tr} W^k = \sum_{S \text{ prostá}} -\log(1 - w_S).$$

⁶¹Opět nezapomeňte, že $w_{i,i} = 0$.

Tento příklad má důležité aplikace ve statistické fyzice: Připomeňme si definici determinantu a uvědomme si, že každou permutaci na množině $\{1, \dots, n\}$ lze ekvivalentně popsat jako soubor navzájem se neprotínajících cyklů. Sumace přes všechny permutace na množině indexů $\{1, \dots, n\}$ je tedy sumací přes všechny možné soubory $\{C_j\}$ vzájemně se neprotínajících cyklů C_j na $\{1, \dots, n\}$. Můžeme tedy napsat $\det A = \det(-W)$ jako⁶²

$$Z = \sum_{\{C_i\}} \prod_i (-w_{C_i}),$$

kde sčítáme přes všechny možné kolekce navzájem se neprotínajících cyklů (nikoliv obecných smyček!) na množině indexů $\{1, \dots, n\}$. Připomínáme, že $a_{i,i} = 1$, resp. $w_{i,i} = 0$.

Označením veličiny $\det A$ symbolem Z chceme upozornit na fakt, že takovýto objekt se ve statistické fyzice nazývá partiční sumou (a bývá označován symbolem Z). Zde potom jde o partiční sumu jakéhosi abstraktního „plynu“, jehož „molekuly“ jsou právě cykly C . „Váha“ či „aktivita“ w_C molekuly C se pak často píše v exponenciálním tvaru $w_C = \exp(-E(C))$, kde veličina $E(C)$ je „energie“ molekuly (cyklu) C vynásobená Boltzmannovým faktorem $1/kT$.

V našem případě (výpočet determinantu) mají ovšem váhy lichých smyček znaménko minus, a to je fyzikálně jistě neobvyklé. Uvedená analogie není tedy vůbec triviální, poznamenejme, že slavné Onsagerovo řešení Isingova modelu, tedy přesný výpočet jeho volné energie (další technický termín převzatý ze statistické fyziky) může být motivováno právě takovýmto způsobem tzn. snahou převést výpočet příslušné partiční sumy Z na výpočet jistého determinantu. To dodatečné znaménko minus se potom ovšem musí „uměle vytvořit“ a právě způsob jak to udělat tvoří jeden z hlavních triků Onsagerova řešení. (Lev D. Landau kdysi prohásil něco ve smyslu, že si celou teoretickou fyziku promyslel a osvojil znovu a od začátku sám, až měl pocit, že by to všechno vlastně mohl vytvořit sám... S výjimkou Onsagerova řešení, zdůraznil.)

⁶²Další minus! To je zde proto, že každý cyklus *liché* délky (tedy cyklus permutující lichý počet prvků) je *sudá* permutace a naopak. Naše definice w_S tedy vskutku dává sudým cyklům v definici permutace znaménko minus, tak jak to ma být.

Zdůrazněme ještě jednou, že výše uvedená formule (88) je v zásadě použitelná jen pro matice W s „malými“ členy, kdy příspěvky smyček velké délky jsou nevýznamné. Hledáme-li pak přibližnou hodnotu $\log \det A$ (po vydělení objemem jde právě o volnou energii), můžeme se omezit na sumaci přes smyčky předem omezené délky 2, 3 atd.

Nechť je matice A například tvaru *circulant* o rozměrech $n \times n$ tzn. nechť je její množina indexů cyklickou grupou $G = \{0, \dots, n-1\}$ a její prvky mají „translačně invariantní“ tvar $w_{i,j} = w(i-j \bmod n)$, kde $w(0), \dots, w(n-1)$ jsou pevně zadaná čísla. Skutečně zajímavý případ pro aplikace v teoretické fyzice ale nastává, až vezmeme-li jako množinu indexů nějakou vícerozměrnou Abelovu grupu jako třeba $G \times G$ (či G^3); taková grupa se nazývá též *torus*. G^2 si znázorníme v rovině jako čtverec. Jeho protějščí strany ale musíme slepit (jelikož po $n-1$ následuje 0), čímž vznikne onen torus (či též anuloid nebo duše od pneumatiky). Zatím ale berme například $i \in \{1, \dots, n\}$, tj. jednorozměrný torus G^1 .

Definujme nyní „volnou energii“ naší matice A

$$h_i = - \sum_{S; S \ni i} |\text{supp } S|^{-1} (1 - \log w_S),$$

kde suma je přes všechny prosté smyčky obsahující index i a $|\text{supp } S|$ označuje počet prvků „nosiče“ $\text{supp } S$ smyčky S , tedy množiny indexů alespoň jednou navštívených smyčkou S . (Vícenásobné návštěvy se zde nepočítají.)

Všimněme si, že h_{i+1} dostaneme z h_i právě akcí výše zmíněné cyklické grupy: touto akcí se žebro (i, j) zobrazí na $(i+1, j+1)$ (sčítání modulo n), a tedy ze smyčky obsahující i vznikne smyčka obsahující $i+1$. Pro jednu pevně zvolenou smyčku S existuje právě $\text{supp } S$ různých h_k , do kterých tato smyčka přispívá. Pomocí výše uvedené akce můžeme z S získat celkem $\text{supp } S$ různých smyček („stejného tvaru“, jen různě „posunuté“), které všechny obsahují index i . Jelikož je ale pro *circulant* $w_{i,j} = w_{i+1,j+1}$, je w_S invariantní vůči působení uvedené cyklické grupy, a tedy se v h_i objeví pro každý „tvar“ smyčky S celkem $\text{supp } S$ stejných příspěvků; odtud faktor $(\text{supp } S)^{-1}$.

Platí potom vztah $\sum_{i=1}^n h_i = - \sum_S \log(1 - w_S)$ Pro *circulant* A je $h_i \equiv h$, protože $\sum_i h_i = nh$, a tedy $\det A = \exp(hn)$. Uznějte, že

toto je mnohem užitečnější formule, zvláště pro veliká n řádu 10^{27} , než tradiční výsledek pro cirkulant uvedený např. ve skriptech [PLA] na str. 105.

Námi dokázaný vzorec (88) dává zajímavé důsledky např. i v kombinaci s Cramerovým pravidlem. V podílu příslušných dvou determinantů (vyjádřených námi pomocí exponenciál) se totiž velká většina příspěvků w_S vyruší; pro výpočet neznámé x_i pomocí Cramerova pravidla takto zbudou jen ty smyčky, které obsahují index i (zkuste si to nejprve pro pravou stranu \mathbf{b} rovnice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ složenou ze samých jedniček, ať vidíte, jak to funguje). Tímto způsobem získáme vyjádření x_i formulemi typu

$$x_i = \exp \left[- \sum_S (\log(1 - w_S) - \log(1 - \tilde{w}_S)) \right],$$

kde sumace je přes všechny smyčky obsahující i a w_S resp. \tilde{w}_S jsou váhy smyčky S vzaté pro matici $A = I - W$, resp. pro matici A s i -tým sloupcem nahrazeným pravou stranou \mathbf{b} . Pro obecnou pravou stranu \mathbf{b} je ovšem třeba podrobněji ověřit konvergenci příslušné sumy v exponenciále, která se objeví v čitateli Cramerova pravidla.

Poznámky: Zdá se, že přímý kombinatorický důkaz našeho základního tvrzení $\det(I - W) = \exp(\sum_S -\log(1 - w_S))$ neexistuje resp. nebude vůbec jednoduchý. Přinejmenším autorovi tohoto cvičení není znám, a oceníme jakýkoliv úspěšný pokus v tomto směru.

Podmínka jednotek na diagonále A se dá odstranit, ovšem za cenu relativně méně hezké formulace výsledku — promyslete.

K podmínce „malosti“ W . Příklad $\sum_j |w_{i,j}| = 1$ je hraniční; podmínku pro W lze sice ještě asi dále trochu zeslabit (třeba jen pro některé indexy i) ale dostáváme se tak už rozhodně dosti blízko oblasti, kdy řada $\sum_S \log(1 - w_S)$ v exponenciále buď již vůbec nekonverguje nebo přinejmenším nad její případnou konvergencí (absolutní, neabsolutní či jinou) ztrácíme kontrolu. *MZ

12 Lieovy hlavolamy

12.1 Jak připravit kysličník sírový

Úkol: *Prohlédněte si matice*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Ujistěte se, že tyto matice tvoří bázi v prostoru antisymetrických matic 3×3 .
- Vypočítejte komutátory mezi uvedenými maticemi a ukažte, že je prostor z bodu a) Lieova algebra.
- Ověřte, že $\{A_1, A_2, A_3\}$ je infinitesimálním generátorem grupy $\mathbb{S}\mathbb{O}_3$ a že generuje celou tuto grupu. Proto nazýváme výše zmíněnou algebru \mathfrak{so}_3 .

Řešení: a) Slušelo by se zamyslet se na úvod nad tím, zda antisymetrické matice skutečně tvoří vektorový prostor (označme jej A). Uzavřenost vůči sčítání a násobení číslem si ale jistě každý ověří sám.

Obecná antisymetrická matice 3×3 má tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = -\alpha A_3 + \beta A_2 - \gamma A_1,$$

a lze ji tedy zapsat jako lineární kombinaci matic $A_{1,2,3}$. Lineární nezávislost těchto matic je zřejmá, jelikož žádné dvě matice nemají ve stejné poloze nějaký nenulový element.

b) Trošku si zanásobíme a záhy zjistíme, že například $A_i A_j$ je pro $i \neq j$ matice ze samých nul s jednou jedničkou na pozici ji . Z toho pak plyne

$$[A_i, A_j] = \varepsilon_{ijk} A_k,$$

neboli komutátor dvou různých matic A_i je roven třetí matici opatřené určitým znaménkem (v příkladu 6.1 je definován Levi-Civittův symbol ε_{ijk}).

Důležité ale je, že komutováním matic z báze dostaneme opět matici z prostoru A . Jelikož je komutátor v obou argumentech *lineární operátor*, znamená to také, že je prostor A uzavřený při operaci komutování. Tedy tvoří *Lieovu algebru*.

c) *Infinitesimální generátor grupy* \mathbb{G} je prvek g , pro který platí $\exp(\varphi g) \in \mathbb{G}$ pro všechna $\varphi \in \mathbb{R}$. Spočítejme nejprve tuto exponenciálu pro matici A_1 . Tato matice je v blokově diagonálním tvaru: vlevo nahoře je blok velikosti 1×1 obsahující pouze nulu, následuje blok 2×2 . Díky tomu je

$$\exp(\varphi A_1) = \begin{pmatrix} e^{0\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & \exp\left[\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

Exponenciálu matice vpravo dole (φR) spočítáme velmi podobně, jako jsme v příkladech 6.1, 11.8 počítali exponenciály Pauliho matic σ . Klíčové je vědět, že $R^2 = -1$.

$$\exp(\varphi R) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \varphi^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \varphi^{2k+1} R = \cos \varphi + R \sin \varphi.$$

V tomto okamžiku mimochodem vidíme, že matice R (otočení o pravý úhel v rovině) je infinitesimálním generátorem grupy \mathbb{SO}_2 (srovnejte s příkladem 10.1) a že generuje celou tuto grupu: $\exp(\varphi R)$ je prostě otočení v rovině o úhel φ .

Pro matici A_1 jsme teď dostali

$$\exp(\varphi A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

což je ale matice otočení v \mathbb{R}^3 kolem osy⁶³ x_1 o úhel φ (opět viz příklad 10.1). Grupa $\{\exp(\varphi A_1), \varphi \in \mathbb{R}\}$ je samozřejmě komutativní.

Jelikož matice A_2 a A_3 mají oproti A_1 v podstatě jen přechíslované řádky a sloupce ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$), nepřekvapí nás, že podobným výpočtem zjistíme, že $\exp(\varphi A_2)$ a $\exp(\varphi A_3)$ jsou matice otočení kolem os x_2 a x_3 (ještě jednou, viz příklad 10.1, vzorec 66).

⁶³Pro puntičkáře: otočení kolem vektoru $(1, 0, 0)$.

Víme ale, že z takových otočení lze poskládat libovolné otočení v \mathbb{R}^3 : stačí po sobě provést například otočení kolem osy x_3 o φ_1 , pak kolem x_1 o ϑ a pak opět kolem x_3 o φ_2 (toto tvrzení je důkladně probráno v příkladu 10.2 o Eulerových úhlech). Tedy lze libovolný prvek $g \in \mathbb{SO}_3$ zapsat jako

$$g = \exp(\varphi_1 A_3) \exp(\vartheta A_1) \exp(\varphi_2 A_3).$$

Z toho již plyne, že existuje také určitý prvek $a \in \mathfrak{so}_3$ (tedy nějaká lineární kombinace matic $A_{1,2,3}$), pro který je $\exp(a) = g$. Není to přímo $\varphi_1 A_3 + \vartheta A_1 + \varphi_2 A_3$, jelikož matice A_1 a A_3 spolu nekomutují a pak není $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. Na druhou stranu lze ale napsat $\exp(A)\exp(B)$ jako exponenciálu výrazu, který je lineární kombinací A , B , $[A, B]$ a dalších složených komutátorů. Jelikož je \mathfrak{so}_3 uzavřená na komutování, je i tento výraz prvkem \mathfrak{so}_3 (lineární kombinací $A_{1,2,3}$).

My ale nebudeme sledovat tuto obecnou cestu a v příkladu 12.2 ukážeme přímo, jakou antisymetrickou matici je potřeba vložit do exponenciály, aby vyšla nějaká zadaná rotace z \mathbb{SO}_3 . *KV

12.2 Algebra \mathfrak{so}_3 a vektorový součin

Úkol: Zkoumejte vlastnosti operátoru $\{x \mapsto v \times x\} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. (kde v má souřadnice (v_1, v_2, v_3)).

- Najděte matici tohoto operátoru, spektrum a vlastní vektory. Určete známou algebraickou strukturu, do které všechny takovéto operátory patří. Nápověda: dokažte, že tato struktura je lineární prostor.
- Najděte exponenciálu tohoto zobrazení (kam patří?) — využijte poznatku o vlastních číslech a interpretujte geometricky.
- Pro zadané otočení r v \mathbb{R}^3 najděte v , pro který je $\exp(v \times) = r$.

Řešení: Tento operátor je v kanonické bázi vyjádřen maticí (viz příklad 6.4)

$$M = \begin{pmatrix} \circ & -v_3 & v_2 \\ v_3 & \circ & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & \circ \end{pmatrix}.$$

Tyto matice tvoří vektorový prostor, který je navíc uzavřený na operaci komutování, jak jsme se přesvědčili v příkladu 12.1 (komutováním matic příslušných k vektorům \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 dostaneme matici příslušnou vektoru \mathbf{e}_3). Tento prostor je tedy také *Lieovou algebrou* \mathfrak{so}_3 .

Zároveň jsme tím ale také odhalili *izomorfismus*

$$\left\{ (v_1, v_2, v_3) \mapsto \begin{pmatrix} \circ & -v_3 & v_2 \\ v_3 & \circ & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & \circ \end{pmatrix} \right\} : (\mathbb{R}^3, +, \times) \rightarrow (\mathfrak{so}_3, +, [,])$$

srovnajte například $(1, 0, 0)^T \times (0, 1, 0)^T = (0, 0, 1)^T$ a $[A_1, A_2] = A_3$. Z tohoto důvodu budeme matici $M \in \mathfrak{so}_3$, příslušející vektoru \mathbf{v} v tomto izomorfismu psát prostě jako $\mathbf{v} \times$. Zdůrazněme, že struktura $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ je samozřejmě také *Lieova algebra* s komutátorem $[\mathbf{v}, \mathbf{u}] \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

Ukážeme teď, že $\exp(\mathbf{v} \times) \in \mathbb{SO}_3$ a také, jak pro zadané otočení z \mathbb{SO}_3 najít jemu odpovídající $\exp(\mathbf{v} \times)$. Operátor $\mathbf{v} \times$ má vlastní čísla $0, \pm i\|\mathbf{v}\|$. Lze to například vypočítat přímo z maticového vyjádření $\mathbf{v} \times$. Jiná (podle autorů pohodlnější) možnost je si uvědomit, že $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$, tedy libovolný násobek \mathbf{v} je vlastním vektorem $\mathbf{v} \times$ příslušným k vlastnímu číslu 0. Kvůli zbylým vlastním číslům vektorově násobíme rovnici pro vlastní vektory

$$\mathbf{v} \times \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{89}$$

zleva \mathbf{v} . Dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{x}) &= \lambda \mathbf{v} \times \mathbf{x} \\ \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{x} \|\mathbf{v}\|^2 &= \lambda^2 \mathbf{x}, \end{aligned} \tag{90}$$

ve druhém kroku jsme použili známou „identitu bac minus cab“ (viz příklad 19.5) a na pravé straně jsme dosadili znovu rovnici 89. Pokud rovnici 90 násobíme skalárně \mathbf{v} , dostaneme na levé straně nulu, a to znamená, že je buď $\lambda = 0$, nebo $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0$. Vidíme tedy, že vlastní vektory k jiným vlastním číslům musí být kolmé na vlastní vektor pro $\lambda = 0$. Toto není náhoda. Matice $\mathbf{v} \times$ sice není symetrická, ale je *antihermitovská* (tedy $M^\dagger = -M$), čili iM je již *hermitovská* ($(iM)^\dagger = iM$) a její vlastní vektory příslušné různým vlastním

číslům jsou na sebe kolmé. Známé tvrzení, že hermitovské matice mají jen reálná vlastní čísla, nám nyní napovídá, že M má pouze ryze imaginární vlastní čísla.

Nyní již dotáhneme naše hledání nenulových vlastních čísel do vítězného konce. V rovnici 90 je $v \cdot x = 0$, a tedy $\lambda^2 = -\|v\|^2$ a nenulová vlastní čísla mohou být pouze $\pm i\|v\|$. Že to budou opravdu obě dvě, víme proto, že reálná matice M s komplexním vlastním číslem λ má také vlastní číslo $\bar{\lambda}$.

Hledání nenulových vlastních čísel mohlo jít možná rychleji, kdybychom se zaměřili na případ $v = (0, 0, 1)$ (na nějž lze vhodnou volbou báze převést i libovolný obecný případ). Pak by bylo možné díky

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} \\ -\sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

použít to, co jsme zjistili v bodě 1. příkladu 10.1.

Přichází zlatý hřeb programu: matice $\exp(v \times)$ má tedy vlastní čísla $\exp 0, \exp(\pm i\|v\|)$. Vlastní čísla matice libovolné rotace r v \mathbb{R}^3 o úhel φ jsou $1, \exp(\pm i\varphi)$, viz formule 66 v příkladu 10.1: ve vhodné bázi je opět libovolná rotace rotací okolo osy $(1, 0, 0)$.

Pokud $\varphi = \|v\|$, jsou si matice zobrazení r a $\exp(v \times)$ tudíž podobné, neb mají stejná vlastní čísla. Je-li navíc v osa, podle které otáčí r , znamená to, že se shodují jejich vlastní vektory k vlastnímu číslu jedna. Pak ale může být $\exp(v \times)$ už jenom otočení kolem osy v o úhel $\|v\|$, neboť víme, že matice tohoto zobrazení je reálná. O tom, v jakém směru se otáčí, je potřeba ještě trochu přemýšlet.

Tento závěr souhlasí s tvrzením (viz [PLA], cvičení v kapitole Lieova algebra), že v \mathbb{R}_2 je otočení o pravý úhel base infinitesimálního generátoru grupy otáčení. V \mathbb{R}_3 to můžeme chápat tak, že otáčivé vektory ležící v rovině kolmé na osu otáčení o , neboť otočení *takových vektorů* o pravý úhel je možné napsat jako $o \times$, kde o je jednotkový vektor ve směru osy.

Operátor $\exp(v \times)$ otáčí správně i obecné vektory $r \in \mathbb{R}_3$, které nejsou kolmé k v . Připomeňme ještě jednou, že $(v \times)r_{\parallel} = 0$, tedy $\exp(v \times)r_{\parallel} = r_{\parallel}$. Pokud rozložíme $r = r_{\parallel} + r_{\perp}$ na složky ve směru osy a ve směru kolmém, vidíme, že rovnoběžná složka se zachová a kolmá se správně otočí $\exp(v \times)r = r_{\parallel} + \exp(v \times)r_{\perp}$. *PC,KV

12.3 Řešitelné algebry

Úkol: Lieova algebra L se nazývá řešitelnou, jestliže existuje n , že v řadě

$$L^{(1)} = [L, L], L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}], L^{(3)} = [L^{(2)}, L^{(2)}], \dots$$

je $L^{(n)} = 0$. Pod $[I, J]$ máme na mysli množinu všech komutátorů $[x, y]$, $x \in I$, $y \in J$. Dokažte, že algebra horních trojúhelníkových matic je řešitelná.

Řešení: Zapišme horní trojúhelníkovou matici U jako součet $D + N$, kde D je diagonální matice a N má na hlavní diagonále nuly. Rozepíšeme-li komutátor a využijeme-li faktu, že diagonální matice komutují, dostaneme

$$[U_1, U_2] = [D_1 + N_1, D_2 + N_2] = [D_1, N_2] + [N_1, D_2] + [N_1, N_2].$$

Všechny tři matice na pravé straně mají nuly na hlavní diagonále i všude pod ní. Algebra (ideál, viz níže) $L^{(1)}$ tedy obsahuje pouze matice a_{ij} , které mají nenulové prvky pouze pro $i \leq j - 1$ (tedy od první řady nad diagonálou počínaje). Prodloužením tohoto postupu dostáváme, že $L^{(k)}$ obsahuje pouze matice s $i \leq j - k$ a tedy $L^{(n)}$ už obsahuje pouze nulovou matici (rychlost, se kterou se „odsouvají“ nenulové členy je ve skutečnosti větší: $i \leq j + 1 - 2^k$).

Mimochodem: *ideál* I je podalgebra algebry L taková, že $[i, g] \in I$ pro každé $i \in I$ a $g \in L$ (je to tedy obdoba normální podgrupy). Zkuste dokázat, že pokud jsou I, J ideály, pak je i $[I, J]$ ideál.

*DŠ

12.4 Anihilátor

Úkol: Uvažujme nějaký (konečněrozměrný) vektorový prostor \mathbb{V} . Ke každému jeho podprostoru \mathbb{W} přiřadíme podmnožinu \mathbb{W}^* (anihilátor) jeho duálu \mathbb{V}' , která obsahuje všechny formy $f \in \mathbb{V}'$ takové, že $f(v) = 0$ pro všechna $v \in \mathbb{W}$.

a) Dokažte, že \mathbb{W}^* je podprostor \mathbb{V}' a platí

$$\dim \mathbb{W} + \dim \mathbb{W}^* = \dim \mathbb{V} (= \dim \mathbb{V}')$$

- b) Přesvědčte se dále, že platí analogie vztahů z výrokové logiky
 $(A \wedge B)' = A' \vee B, \dots$

$$\begin{aligned}(\mathbb{W}^*)^* &= \mathbb{W}, \\ (\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2)^* &= \mathbb{W}_1^* \cap \mathbb{W}_2^*, \\ (\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2)^* &= \mathbb{W}_1^* \oplus \mathbb{W}_2^*.\end{aligned}$$

$\mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$ je direktní součet prostorů, neboli $\mathcal{L}(\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2)$.

Řešení: Úlohu vyřešíte snadno sami, vzpomenete-li si na vlastnosti *ortogonálního doplňku*. Pravdivost předešlých tvrzení se totiž nezmění, nahradíme-li symbol $*$ symbolem \perp .

Abychom vyjasnili souvislost mezi anihilátorem a ortogonálním doplňkem, uchýlíme se k *Diracově zápisu skalárního součinu*. Ten se opírá o izomorfismus prostorů \mathbb{V} a \mathbb{V}' , který každé formě $f \in \mathbb{V}'$ přiřadí vektor $v_f \in \mathbb{V}$ takový, že $f(x) = (v_f \cdot x) \forall x \in \mathbb{V}$ (po vzoru fyziků komplexně sdružujeme levý vektor). Na zápis $\langle \varphi | \psi \rangle$ tedy můžeme nahlížet buď jako na skalární součin vektorů $|\varphi\rangle$ a $|\psi\rangle$ nebo jako na působení formy $\langle \varphi |$, duální k vektoru $|\varphi\rangle$, na vektor $|\psi\rangle$.

Stačí tedy na \mathbb{V} zavést nějakou bázi $\{e_i\}$ (a na \mathbb{V}' pak příslušnou duální bázi $\{e^j\}$ takovou, že $e^j(e_i) = \delta_i^j$) a dodefinovat potom skalární součin tím, že tuto bázi prohlásíme za ortonormální. Potom prostory \mathbb{W}^\perp a \mathbb{W}^* budou přirozeně izomorfní a můžeme použít naše znalosti ortogonálního doplňku.

Pro ortogonální doplněk už vlastnosti

$$\dim \mathbb{W} + \dim \mathbb{W}^\perp = \dim \mathbb{V}, \quad (\mathbb{W}^\perp)^\perp = \mathbb{W} \quad (91)$$

známe např. ze skript [PLA]. Vlastnost

$$(\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2)^\perp = \mathbb{W}_1^\perp \cap \mathbb{W}_2^\perp$$

plyne okamžitě z linearity skalárního součinu (daný vektor je kolmý ke všem vektorům z \mathbb{W}_1 a ke všem vektorům z \mathbb{W}_2 , právě když je kolmý ke všem jejich lineárním kombinacím), vlastnost

$$(\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2)^\perp = \mathbb{W}_1^\perp \oplus \mathbb{W}_2^\perp$$

je k ní duální a dostaneme ji pomocí $(W^\perp)^\perp = W$. *TB

12.5 Nebojte se Dynkinových diagramů

Úkol: V knize [PLA] autoři načrtli klasifikaci prostých kompaktních Lieových algeber⁶⁴. Závěrem bylo, že možné jsou jen prosté kompaktní Lieovy algebry s Dynkinovými diagramy ze strany 166 zmíněné knihy. Dynkinův diagram (prosté) algebry je (souvislé) schéma obsahující r koleček (tzv. prostých pozitivních kořenů, určitých lineárně nezávislých vektorů generujících r -rozměrný prostor — Cartanovu podalgebru), které mohou být spojeny čarami, udávajícími úhel a poměr délek mezi kořeny.

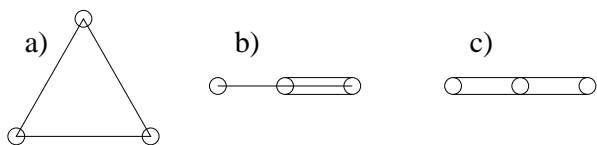
- 0 — pokud nejsou kořeny spojené, znamená to, že jsou kolmé.
- 1 — kořeny spojené jednoduše jsou stejně dlouhé a svírají úhel 120° .
- 2 — kořeny spojené dvojitou čarou mají poměr délek $\sqrt{2}$ a svírají úhel 135° .
- 3 — kořeny spojené trojitou čarou mají poměr délek $\sqrt{3}$ a svírají úhel 150° . Pokud v tomto nebo v minulém případě nakreslíme na spojnici šipku, ukazuje směrem ke kratšímu kořenu, jako při porovnávání čísel $a > b$.⁶⁵

Člověk by se mohl ptát, proč neexistuje například algebra s Dynkinovým diagramem totožným s chemickým vzorcem benzenu. V tomto jednoduchém cvičení na skalární součin dokážete, že zmíněné Dynkinovy diagramy jsou opravdu jediné možné.

1. Nejdříve dokažte počítáním úhlů mezi kořeny a za předpokladu lineární nezávislosti, že se v Dynkinově diagramu nemůže vyskytnout ani jeden z poddiagramů a), b), c) na obrázku 18.
2. Potom si uvědomte, proč se také nemůže vyskytnout žádný obrázek, v němž ve srovnání s a , b nebo c nahradíme nějaký spoj čarou s více spojnicemi.

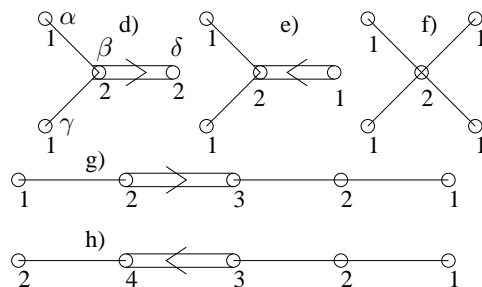
⁶⁴Vlastní klasifikace se provádí pro komplexní Lieovy algebry, k nimž je jednoznačně přiřazena jejich kompaktní reálná forma.

⁶⁵V literatuře se bohužel vyskytuje i opačná konvence.



Obrázek 18: Některé z nepřipustných Dynkinových diagramů.

3. Ukažte, že pokud je nemožný diagram D , je také nemožný každý diagram D' , kde kořen σ nahradíme kořeny α, β spojenými jednoduchou čarou (bude se vám hodit srovnání σ a $\alpha + \beta$). Vysvětlete, proč to znamená, že v Dynkinově diagramu nemohou být žádné cykly.
4. Vysvětlete, proč \mathfrak{g}_2 (tedy dva kořeny spojené trojitou linií) je jediný Dynkinův diagram s trojnou vazbou. Dále stačí uvažovat jen diagramy s nejvýše dvojnými vazbami. Vysvětlete, proč je v Dynkinově diagramu nejvýše jedna dvojná vazba.
5. Výpočtem délek vhodných lineárních kombinací kořenů dokažte, že Dynkinův diagram také neobsahuje žádný ornament na obrázcích d) až k) níže (nečtěte řešení u obrázků), a dokončete tak klasifikaci všech diagramů. Číslíčka u jednotlivých kořenů na obrázcích vám mohou být vodítkem.



Řešení: 1. a 2. V prvním úkolu stačí sečíst úhly mezi třemi kořeny na obrázku. V případech a), b), c) dostaneme postupně $120^\circ + 120^\circ +$

120° , $120^\circ + 150^\circ + 90^\circ$ a $135^\circ + 135^\circ + 90^\circ$. Součet je pokaždé 360° , což znamená, že všechny tři kořeny ve skutečnosti leží v jedné rovině (jinak by součet úhlů musel být menší), a to je v rozporu s předpokladem lineární nezávislosti. Pokud z nějaké jednoduché spojnice na obrázku uděláme násobnou (případně dvojnásobnou nahradíme trojnásobnou), zvětšíme tím i odpovídající úhel a součet úhlů bude dokonce větší než 360° , což pro libovolnou trojici vektorů vůbec nemůže v euklidovském prostoru nastat. Tato věta zodpovídá druhou otázku.

3. Pro zodpovězení třetí otázky je třeba si uvědomit, že pokud kořeny α, β spojené jednoduchou čarou nahradíme jedním kořenem $\sigma = \alpha + \beta$, nedojde v Dynkinově diagramu k žádným jiným změnám (nemusíme kreslit či rušit jiné spojnice). Předpokládejme nějaký Dynkinův diagram D' s kořeny α, β spojenými jednoduchou čarou a ukažme, že existuje i Dynkinův diagram D , v němž tyto kořeny nahradíme jediným kořenem σ .

Zvolme například $\sigma = \alpha + \beta$. Délka σ je stejná jako délka α a β (vše díky úhlu 120° mezi α, β) a skalární součiny ostatních kořenů se σ se redukuje buď na součin s α , nebo s β : z předpokladu, že původní diagram D' odpovídal existujícímu Dynkinovu diagramu, totiž plyne, že žádný kořen nemohl být spojen zároveň s α i β , jelikož bychom získali zakázaný poddiagram a). Celkově řečeno, pokud je smysluplný diagram D' , je také smysluplný každý diagram D , v němž všechny jednoduché spojnice „smrskneme“ do bodu.

Řečeno naopak, je-li diagram D nepřípustný, jsou nepřípustné také všechny diagramy, které vznikly z D tím, že jsme do něj vsunuli jednu či více jednoduchých linií. Z toho například plyne, že nemohou existovat Dynkinovy diagramy s uzavřenou smyčkou, protože bychom je mohli redukovat na diagram a), který nemůže nastat.

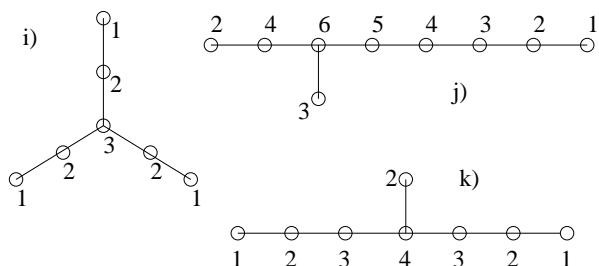
4. Pohledem na obrázek b) zjistíme, že pokud má diagram trojnou vazbu, kořeny spojené touto vazbou nemohou být spojeny už žádnou další vazbou, čili jediný Dynkinův diagram s trojnou vazbou je \mathfrak{g}_2 . Odpovídá mu grupa symetrií oktonionů (Cayleyových čísel). Ostatní diagramy mají tedy nejvýše dvojnou vazbu. V diagramu může být nejvýše jedna dvojná vazba, jinak bychom mohli diagram „smrsknout“ na diagram obsahující c).

5. Pohledme dále na diagramy d), e), které zakazují libovolnou organickou chemii v Dynkinových diagramech. Označme kořeny tak $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, jak je to naznačeno na obrázku d). Kvadrát délky lineární kombinace vektorů naznačené na tomto obrázku je

$$(\alpha + \gamma + 2\beta + 2\delta)^2 = \alpha^2(1_{\alpha^2} + 1_{\gamma^2} + 4_{\beta^2} + 2_{\delta^2} - 2_{\alpha\beta} - 2_{\beta\gamma} - 4_{\beta\delta}) = 0. \quad (92)$$

U numerických koeficientů jsme psali jejich původ, využili jsme vztahů typu $\alpha^2 = \gamma^2 = -2\alpha\beta$ atd. Vzorec (92) platí pro obrázek d), důkaz pro e) získáme pouhou náhradou $\delta \rightarrow \delta/2$ v rovnici (92). Tato rovnice ale ukazuje, že $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nemohou být v euklidovském prostoru lineárně nezávislé. Díky tomu nemůže Dynkinův diagram obsahovat zároveň dvojnou vazbu i větvíci se bod (díky možnosti „smrsknut“ jednoduchých čar ani libovolně vzdálený větvíci se bod).

Zbytek důkazu už jde jako po másle. Diagramy s dvojnými vazbami tedy musí ležet v přímce. Díky nemožnosti diagramů g), h) (kterou jistě už dokážete sami podobně jako s formulí (92)) platí, že pokud není dvojná vazba úplně tou krajní, nalevo a napravo od ní může být pouze jedna jednoduchá vazba: takový diagram nám dává grupu f_4 . Pokud je dvojná vazba na kraji, lze k ní přidat libovolně dlouhou posloupnost jednoduchých vazeb a získat tak série $b_k = so(2k + 1)$ a $c_k = usp(2k)$ (podle orientace šipky). Tím jsme vyčerpali diagramy s násobnými vazbami.



Zbývá tedy klasifikovat diagramy čistě s jednoduchými vazbami. Nemožnost diagramu f) říká, že z každého kořenu mohou vybíhat nejvýše tři spojnice, příslušným kořenům řekněme větvíci body. Důsledkem výše dokázané možnosti „smrsknut“ jednoduché

čáry nemůžeme mít více než jeden větvičí bod, jelikož bychom z takového diagramu mohli získat f). Diagramy bez větvičích bodů jsou samozřejmě povolené, dávají sérii algeber $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{su}(k+1)$, stačí nám tedy již jen prozkoumat diagramy s jedním větvičím bodem. Díky nemožnosti i) musí mít nejkratší větev délku 1, díky nemožnosti k) musí mít druhá nejkratší větev délku nejvýše 2. Pokud má tedy i druhá nejkratší větev délku 1, dostáváme sérii $\mathfrak{d}_k = \mathfrak{so}(2k)$; pokud má druhá nejkratší větev délku 2, dostáváme sérii \mathfrak{e}_k , obsahující jen $\mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8$, jelikož to, co bychom nazývali \mathfrak{e}_9 , je zakázáno⁶⁶ obrázkem j). Ukažme ještě namátkově analogii rovnice (92) pro tento obrázek; příslušnou lineární kombinaci vektorů nazveme d , kořen zcela vlevo α , skalární součiny spojených kořenů jsou $-\alpha^2/2$, faktor $1/2$ se vyruší s faktorem 2 u ab z rozkladu $(a+b)^2$.

$$d^2 = \alpha^2(2^2 + 4^2 + 6^2 + 3^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 - 4 \cdot 6 - 6 \cdot 3 - 6 \cdot 5 - 5 \cdot 4 - 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1) = 0$$

*LM

⁶⁶Sice jsme dokázali, že \mathfrak{e}_9 nemůže být kompaktní algebra konečné dimenze, je však ekvivalentní tzv. afinnímu rozšíření algebry \mathfrak{e}_8 , což je určitá Lieova algebra nekonečné dimenze.

13 Duální prostory k pronájmu

13.1 Transformace složek formy při změně báze

Úkol: ω je lineární forma na \mathbb{R}_2 , $\omega(x) = x_1 + 2x_2$ pro $x = (x_1, x_2)^T$ v bázi $M = (1, 1), (1, -1)$. Najděte souřadnice ω_{N^*} této formy v bázi N^* , která je duální k $N = \{(1, -2), (3, 2)\}$.

Řešení: Lineární formu ω převedeme do báze duální ke kanonické bázi, tedy zjistíme, jak forma působí na vektor x v kanonické bázi. Má-li x v bázi M složky $(x_1^M, x_2^M)^T$, pak je $x = x_1^M(1, 1)^T + x_2^M(1, -1) = (x_1^M + x_2^M, x_1^M - x_2^M)$ a složky v kanonické bázi jsou tedy

$$x_1^K = x_1^M + x_2^M, \quad x_2^K = x_1^M - x_2^M.$$

Z toho úpravou vyjádříme $x_1^M = \frac{1}{2}(x_1^K + x_2^K)$ a $x_2^M = \frac{1}{2}(x_1^K - x_2^K)$, takže

$$\omega(x) = x_1^M + x_2^M = \frac{3}{2}x_1^K - \frac{1}{2}x_2^K. \quad (93)$$

Dále už jen určíme, jak působí ω na vektor x zapsaný pomocí složek v bázi N : z $x = x_1^N(1, -2)^T + x_2^N(3, 2)$ vyčteme $x_1^K = x_1^N + 3x_2^N$ a $x_2^K = -2x_1^N + 2x_2^N$. Dosadíme-li do (93), dostaneme

$$\omega = \frac{3}{2}x_1^K - \frac{1}{2}x_2^K = \frac{5}{2}x_1^N + \frac{7}{2}x_2^N.$$

Složky formy ω v bázi N^* jsou tedy $(\omega_{N^*}^1, \omega_{N^*}^2) = (\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$.

Pro kontrolu můžete explicitně duální bázi k N spočítat ($n^1 = (\frac{1}{4}, -\frac{3}{8})$, $n^2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$) a přesvědčit se, že jsme dostali správný výsledek. Jako dobré cvičení si lze rozmyslet, proč tato metoda funguje.

Úlohu lze řešit i jinak. Využijeme tvrzení: Je-li A matice přechodu od M k N , pak pro složky formy ω platí

$$(\omega_{N^*}^1, \omega_{N^*}^2) = (\omega_{M^*}^1, \omega_{M^*}^2)A.$$

Matici přechodu od $M = \{m_1, m_2\}$ ke K (kde K je kanonická báze) určíme z

$$(m_1, m_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (e_1, e_2) \Rightarrow (e_1, e_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (m_1, m_2).$$

Inverzní matice počítáme nejrychleji pomocí Čihákova pravidla 38 (příklad 6.5). Pro matici přechodu od K k $N = \{n_1, n_2\}$ dostaneme podobně

$$(n_1, n_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} (e_1, e_2)$$

a nakonec tedy

$$(\omega_{N^*}^1, \omega_{N^*}^2) = (1, 2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(5, 7).$$

*PV,KV

13.2 Duální báze

Úkol: *Budíž dán vektorový prostor \mathbb{R}^3 a jeho báze $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ a $N = \{n_1, n_2, n_3\}$, kde*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Úmluva: v tomto příkladu užíváme Einsteinovu sumační konvenci, malými tučnými latinskými písmeny značíme vektory a malými tučnými řeckými písmeny značíme formy. Připomínáme, že indexy bázevých vektorů se píší dole, indexy bázevých forem nahoře; u souřadnic je to naopak, složky vektoru (vůči nějaké bázi) se píší s indexy nahoře, složky formy mají indexy dole.

1. *Najděte duální bázi k bázi S , označte formy tvořící duální bázi jako σ^i a duální bázi označte S^* .*
2. *Najděte souřadnice bázevých vektorů N vůči bázi S .*
3. *Najděte duální bázi k bázi N , označte formy tvořící duální bázi jako ν^i a duální bázi označte N^* .*
4. *Určete souřadnice vektoru $v = (3, 2, 2)^T$ vůči bázím S a N . Uvažujte formu $\phi = (1, -1, 0)$, tj. $\phi(x) = x^1 - x^2$, pokud $x = (x^1, x^2, x^3)$ v kanonické bázi, a určete její souřadnice vůči bázím S^* a N^* .*

Řešení: Nejdříve si uvědomíme, jak vypadá působení formy (lineární funkce, která vezme vektor z \mathbb{R}^3 a přiřadí mu číslo) na vektor w

$$\phi(w) = \phi \left[\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} \right] = \phi_1 w^1 + \phi_2 w^2 + \phi_3 w^3,$$

kde ϕ_i jsou nějaká čísla charakterizující danou formu (jsou to její souřadnice v bázi duální ke kanonické bázi) a w^i jsou souřadnice vektoru w . Především tvrzení lze také zapsat jako (obvyklé násobení řádek krát sloupec)

$$\phi(w) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \phi_1 w^1 + \phi_2 w^2 + \phi_3 w^3 = \phi_i w^i.$$

1. Podmínka na formy, které tvoří duální bázi k S je následující

$$\sigma^i(s_j) = \delta_j^i, \quad (94)$$

což znamená: vypočteme-li hodnotu i -té formy duální báze na j -tém bázevém vektoru, dostaneme jedna, pokud $i = j$, a nula, pokud $i \neq j$. Chceme tedy, aby platilo

$$\begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix} (s_1, s_2, s_3) = \begin{pmatrix} \sigma^1(s_1) & \sigma^1(s_2) & \sigma^1(s_3) \\ \sigma^2(s_1) & \sigma^2(s_2) & \sigma^2(s_3) \\ \sigma^3(s_1) & \sigma^3(s_2) & \sigma^3(s_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

což zapíšeme ve zkratce jako $\Sigma \mathcal{S} = I$, kde \mathcal{S} je matice, která má v i -tém sloupci souřadnice bázevého vektoru s_i a Σ je matice, která má v j -tém řádku souřadnice formy duální báze σ^j . Hledáme-li duální bázi k S , přečteme předcházející tvrzení takto:

$$\Sigma = \mathcal{S}^{-1}.$$

Stačí proto invertovat matici \mathcal{S} a v rádcích této inverze přečíst souřadnice forem báze duální k S vzhledem k bázi duální ke kanonické bázi. Jest

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a složky forem duální báze jsou

$$\sigma^1 = (-1, 1, 1), \quad \sigma^2 = (-2, -2, -1), \quad \sigma^3 = (-2, 3, 1).$$

Připomeňme, jak souvisí složky forem z $(\mathbb{R}^3)^*$ s lineárními zobrazeními na \mathbb{R}^3 . Je-li vektor x zapsán pomocí složek (x^1, x^2, x^3) v kanonické bázi $K = \{e_1, e_2, e_3\}$, pak formy kanonické báze $K^* = \{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ působí na x samozřejmě podle (94), tedy např. $\varepsilon^1(x) = x^1$. Pokud jsme například formu σ^1 zapsali pomocí složek vůči K^* , pak tedy musí být $\sigma^1(x) = -x^1 + x^2 + x^3$. Samozřejmě pokud bychom vektor x zapsali v bázi S , tedy $x = (x_S^1, x_S^2, x_S^3)$, bude mít forma σ^1 opět podle (94) jednoduchý tvar $\sigma^1(x) = x_S^1$.

Ukážeme si ještě jiný způsob, jak v tomto konkrétním případě najít duální bázi. Povšimněte si využití skalárního součinu (\cdot) a vektorového součinu (\times) . Vytvořme vektory:

$$r_1 = +\frac{s_2 \times s_3}{s_1 \cdot (s_2 \times s_3)}, \quad r_2 = -\frac{s_1 \times s_3}{s_1 \cdot (s_2 \times s_3)}, \quad r_3 = +\frac{s_1 \times s_2}{s_1 \cdot (s_2 \times s_3)}.$$

Co je na nich tak zajímavého? Jelikož se *smíšený součin* $a \cdot (b \times c)$ nemění při cyklické permutaci vektorů⁶⁷, platí

$$r_i \cdot s_j = \delta_{ij}, \quad (95)$$

což nám připomene podmínku na duální bázi (94). Problém je v tom, že se jedná o skalární součin dvou vektorů, nikoliv o působení formy na vektor. Skalární součin zapisujeme

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \delta_{ij} a^i b^j = a_j b^j,$$

naproti tomu působení formy na vektor je

$$\alpha(b) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \alpha_j b^j.$$

⁶⁷Pro necyklické permutace se změní pouze znaménko. Je to totiž také determinant matice, do jejíchž řádků napíšeme vektory a, b, c , neboli objem příslušného rovnoběžnostěnu.

Zdá se proto rozumné *udělat z vektoru formu* prostě tak, že napíšeme vektor místo do sloupce do řádku⁶⁸. Tedy shrnuto: napíšeme-li vektory r_i do řádků, máme složky duální báze k S (proved'te výpočet a ověřte, že duální báze vyjde stejně jako užitím prvního postupu).

Ve fyzice se používá pojem *reciproká mříž* trojrozměrného krystalu

$$\{a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\}, \quad (96)$$

generovaného nějakými třemi lineárně nezávislými vektory v_1, v_2, v_3 . Reciproká mříž je generována vektory v'_1, v'_2, v'_3 , které splňují $v_i \cdot v'_j = \delta_{ij}$. Právě jsme tedy odhalili, proč se jí říká někdy duální mříž.

2. K nalezení souřadnic vektorů vůči bázi S lze s výhodou použít vlastností duální báze. Souřadnicemi vektoru n vůči bázi S rozumíme takové koeficienty c^i , že platí

$$n = c^i s_i,$$

podívejme se, co se stane, pokud na vektor n zapůsobíme nějakou formou z duální báze (budeme využívat vlastnosti duální báze (94))

$$\sigma^j(n) = \sigma^j(c^i s_i) = c^i \sigma^j(s_i) = \delta_i^j c^i = c^j, \quad (97)$$

z čehož plyne jasné poučení: chceme-li získat j -tou souřadnici vektoru n vůči S , zapůsobíme na něj j -tou formou duální báze S^* . Konkrétně pro vektor n_1 máme

$$\begin{aligned} (n_1)^1 &= \sigma^1(n_1) = (-1, 1, 1)(3, 1, 3)^T = 1 \\ (n_1)^2 &= \sigma^2(n_1) = (2, -2, -1)(3, 1, 3)^T = 1 \\ (n_1)^3 &= \sigma^3(n_1) = (-2, 3, 1)(3, 1, 3)^T = 0, \end{aligned}$$

tudíž $n_1 = (1, 1, 0)_S^T$. Obdobně postupujeme pro další vektory a výsledkem je $n_2 = (0, 1, 0)_S^T$, $n_3 = (0, 1, 1)_S^T$. Celkově zapíšeme transformační vztahy mezi vektory n_i a s_j tak, jak jsme zvyklí z příkladu 4.9 či 6.2.

$$(n_1, n_2, n_3) = (s_1, s_2, s_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (s_1, s_2, s_3)C. \quad (98)$$

⁶⁸Vznešeně řečeno ztotožnili jsme duální prostor s původním prostorem pomocí skalárního součinu (bilineární formy b). Vektoru $\mathfrak{a} = (a^1, a^2, a^3)$ jsme přiřadili formu α , která je definovaná $\alpha(X) = b(X, \mathfrak{a})$. Jednoduchému tvaru této formy — v našem případě je $b(X, \mathfrak{a}) = \delta_{ij} x^i a^j$ — také vděčíme za to, že je toto ztotožnění tak jednoduché: $\alpha_i = \delta_{ij} a^j$, tj. $\alpha_i = a^i$.

Matice C je tedy *maticí přechodu* od báze S k bázi N , pokud píšeme vektory báze do řádkového vektoru.

3. Duální bázi k N můžeme hledat stejným postupem, jaký jsme užili při hledání duální báze k S . Zde budeme postupovat jinak (nebude to ovšem kratší). Využijeme právě získaného vztahu (98) a znalosti duální báze S^* . Požadavek na vektory duální báze N^* je

$$\begin{pmatrix} \nu^1 \\ \nu^2 \\ \nu^3 \end{pmatrix} (n_1, n_2, n_3) = \cdot, \quad ,$$

avšak díky (98) můžeme také psát

$$\cdot = \begin{pmatrix} \nu^1 \\ \nu^2 \\ \nu^3 \end{pmatrix} (s_1, s_2, s_3) C.$$

Na druhou stranu ovšem

$$\cdot = C^{-1} \cdot, \quad C = C^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} (s^1, s_2, s_3) C$$

a porovnáním posledních dvou výrazů dospějeme ke konečnému vzorečku pro transformaci forem

$$\begin{pmatrix} \nu^1 \\ \nu^2 \\ \nu^3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix} \stackrel{*}{=} C^{-1} \Sigma \quad (99)$$

Matice přechodu od S^* k N^* je tedy C^{-1} a báze formy píšeme do sloupcového vektoru (srovnejte s maticí přechodu mezi S a N výše). Pokud si v (99) představíme místo ν^i , σ^j řádkové vektory složek (místo sloupcových vektorů, v nichž jsou formy, máme tedy matice, v nichž jsou čísla; tento přechod naznačujeme symbolem $\stackrel{*}{=}$), přečteme si v řádcích matice $C^{-1} \Sigma$ složky báze forem

$$\nu^1 = (-1, 1, 1), \quad \nu^2 = (5, -6, -3), \quad \nu^3 = (-2, 3, 1).$$

4. Souřadnice vektoru v určíme již zmíněným užitím duální báze S^* resp. N^* (vztah 97) podle toho, vůči které bázi chceme souřadnice mít. Číselně

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}_N .$$

Navíc víme, že mezi souřadnicemi vůči jednotlivým bazím platí vztah (viz příklad 4.9)

$$C(\cdot)_N = (\cdot)_S, \text{ resp. } (\cdot)_N = C^{-1}(\cdot)_S .$$

Všimněte si, že složky vektorů se převádějí maticí *inverzní* k matici přechodu (a navíc se složky píšou do sloupců, zatímco bázevé vektory do řádků). Nyní přejdeme k určování souřadnic formy $\phi = (1, -1, 0)$ vůči S^* a N^* . Souřadnicemi formy ϕ vůči duální bázi S^* rozumíme takové koeficienty φ_i , že platí

$$\phi = (1, -1, 0) = \varphi_1 \sigma^1 + \varphi_2 \sigma^2 + \varphi_3 \sigma^3 = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)_{S^*} \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix} ,$$

zkráceně $\phi = (\dots)_{S^*} \Sigma$, odkud plyne $(\dots)_{S^*} = \phi \Sigma^{-1}$. Číselně dostaneme

$$\phi = (1, -1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1, 1, 0)_{S^*} ,$$

tedy $\phi(x) = x_K^1 - x_K^2 = x_S^1 + x_S^2$. Obdobným způsobem lze postupovat pokud se zajímáme o souřadnice formy ϕ vůči bázi N^* . Na tomto místě ale provedeme výpočet jinak. Nalezneme totiž transformační vztahy pro souřadnice forem. Víme, že platí vzorec pro transformaci forem (99) a navíc musí být

$$(\dots)_{S^*} \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix} = \phi = (\dots)_{N^*} \begin{pmatrix} \nu^1 \\ \nu^2 \\ \nu^3 \end{pmatrix} .$$

Dosazením z (99) dospějeme k

$$(\dots)_{S^*} \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix} = (\dots)_{N^*} C^{-1} \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \sigma^3 \end{pmatrix},$$

z čehož konečně plyne hledaný vztah pro transformaci souřadnic formem $(\dots)_{S^*} = (\dots)_{N^*} C^{-1}$, resp. $(\dots)_{S^*} C = (\dots)_{N^*}$. Číselně je

$$(1, 1, 0)_{S^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2, 1, 1)_{N^*}.$$

*VP

13.3 Jedna opravdová forma

Úkol: Ukažte, že $\{1, x, \dots, x^n\}$ a

$$\left\{ e^0(f) = f(0), e^1(f) = \frac{1}{1!} f'(0), \dots, e^n(f) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \right\}$$

jsou navzájem duální báze v prostoru všech polynomů stupně nejvýše n na $\langle 0; \infty \rangle$ $P^n(\langle 0; \infty \rangle)$ a jeho duálu $[P^n(\langle 0; \infty \rangle)]^*$.

Vypočítejte složky následující formy, která působí na $P^n(\langle 0; \infty \rangle)$, v bázi $\{e^0, \dots, e^n\}$

$$\varphi : f(x) \mapsto \int_0^\infty x e^{-x} f(x).$$

Návod: $\int_0^\infty x^n e^{-x} = \Gamma(n+1) = n!$

Řešení: Dualitu ověříme podle definice $e^i(e_j) = \delta_j^i$ (e_j označujeme funkci $f(x) = x^j$).

$$e^i(e_j) = \left[\frac{1}{i!} x^j \right]_{x=0}^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i > j. \\ \frac{j(j-1)\dots(j-i+1)}{i!} [x^{j-i}]_{x=0} & \text{pro } i \leq j. \end{cases}$$

Výraz $[x^{j-i}]_{x=0}$ je ale nula pro $i < j$ a jedna pro $i = j$. Pro $i = j$ je také zlomek před tímto výrazem roven jedné, tedy $e^i(e_j) = \delta_j^i$.

Zapišme tedy formu φ jako lineární kombinaci $\alpha_0 \mathbf{e}^0 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}^n$. Díky dualitě ($\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i$) bází $\{\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_n\}$ a $\{\mathbf{e}^0, \dots, \mathbf{e}^n\}$ lze tyto složky počítat jako $\varphi(\mathbf{e}_i) = \alpha_i$. Tedy $\alpha_i = \varphi(x^i) = \int_0^\infty x^{i+1} e^{-x} = (i+1)!$ Formu φ lze tedy na prostoru $P^n(\langle 0; \infty \rangle)$ zapsat jako lineární kombinaci

$$\varphi(f) = f(0) + 2f'(0) + \dots + (n+1)f^{(n)}(0).$$

*KV

14 Matice pro středně pokročilé

14.1 Konvergence k vlastním číslům

Úkol: Necht' A je hermitovská matice a x je libovolný vektor. Dokažte, že následující posloupnost:

$$x_n = \frac{A^n x}{|A^n x|}$$

konverguje k vlastnímu vektoru matice A nebo k nulovému vektoru anebo má dva hromadné body (dejte je do vztahu k vlastním vektorům matice A). Za jakých podmínek konverguje tato posloupnost k vlastnímu vektoru odpovídajícímu největšímu (v absolutní hodnotě) vlastnímu číslu této matice?

Úmluva: v řešení budeme používat pro skalární součin *Diracovu notaci* $a \cdot b = \langle a | b \rangle$.

Řešení: Protože je matice A hermitovská, existuje ortonormální báze e_i tvořená jejími vlastními vektory; příslušná vlastní čísla (o nichž víme, že jsou reálná) označme λ_i v pořadí od největšího k nejmenšímu (v absolutní hodnotě). Potom lze provést *spektrální rozklad* operátoru A^n

$$A^n x = \sum_i \lambda_i^n \langle e_i | x \rangle e_i.$$

Necht' i_0 je nejmenší ze všech indexů i takový, že $\langle e_i | x \rangle \neq 0$. Pro velká n bude $|A^n x|$ určeno především členy odpovídajícími vlastním číslům, které jsou v absolutní hodnotě rovny $|\lambda_{i_0}|$. Potom je x_n přibližně rovno

$$x_n = \frac{A^n x}{|A^n x|} \approx \sum_i \left(\frac{\lambda_i}{|\lambda_{i_0}|} \right)^n \langle e_i | x \rangle e_i$$

a po odstranění části součtu konvergující k nule

$$x_n \approx \sum_{i, |\lambda_i|=|\lambda_{i_0}|} \left(\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \right)^n \langle e_i | x \rangle e_i.$$

Znak $a_n \approx b_n$ je třeba chápat jako $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$.

Pokud všechny členy v součtu s nenulovým koeficientem $\langle e_i | x \rangle$ mají λ_i kladné, potom posloupnost x_n konverguje k nějakému vlastnímu vektoru odpovídajícímu vlastnímu číslu $|\lambda_{i_0}|$. Pokud tomu tak není a jsou některé z nich záporné, potom má uvažovaná posloupnost zřejmě dva *hromadné body* $h_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n}$, $h_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1}$, neboť

$$x_n \approx \sum_{i, \lambda_i = |\lambda_{i_0}|} \langle e_i | x \rangle e_i + \sum_{i, \lambda_i = -|\lambda_{i_0}|} (-1)^n \langle e_i | x \rangle e_i.$$

Rozdíl těchto hromadných bodů je vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu $-|\lambda_{i_0}|$ a pokud jejich průměr je nenulový, je to vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu $|\lambda_{i_0}|$. Pokud je $\lambda_{i_0} = 0$, potom jsou všechny členy od prvního počínaje nulové a posloupnost tedy konverguje k nulovému vektoru.

Posloupnost x_n tedy konverguje k vlastnímu vektoru odpovídajícímu největšímu vlastnímu číslu (v absolutní hodnotě) této matice právě tehdy, pokud je toto číslo kladné, vektor x neleží v ortogonálním doplňku vlastního podprostoru odpovídajícího tomuto vlastnímu číslu a pokud má matice A vlastní číslo $-\lambda_1$, potom musí vektor x navíc ležet v ortogonálním doplňku vlastního podprostoru odpovídajícího tomuto vlastnímu číslu. *DK

14.2 Matice hustoty

Úkol: Uvažujme operátor

$$\widehat{W} = \sum_{i=1}^n w_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|,$$

kde $w_i > 0$ a $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, vektory $|\psi_i\rangle$ jsou normované na jedničku ($\langle \psi_i | \psi_i \rangle = 1$). Používáme Diracovu notaci, protože se jedná o fyzikální příklad — takovým operátorem se v kvantové teorii popisuje statistická směs stavů $|\psi_i\rangle$. Pokud tedy označíme $|\psi_i\rangle = v_i$, můžeme matici hustoty napsat také⁶⁹ jako operátor $W : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $Wx = \sum_i (v_i \cdot x) v_i$.

⁶⁹Tedy $\langle \psi_i |$ značí formu $\psi_i(x) = v_i \cdot x$. Ztotožnili jsme tedy prostor s jeho duálem pomocí bilineární formy dané skalárním součinem (viz také příklad 13.2).

Dokažte, že $\text{Tr } \widehat{W} = 1$ a dále $\text{Tr } \widehat{W}^2 \leq 1$ a zjistěte, kdy nastane rovnost.

Řešení: Díky známému pravidlu $\text{Tr } AB = \text{Tr } BA$ je $\text{Tr } |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \text{Tr } \langle\psi_i|\psi_i\rangle = \langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1$, a tedy $\text{Tr } \widehat{W} = \sum_{i=1}^n w_i = 1$. Vektor $|\psi_i\rangle$ je sloupcový, zatímco $\langle\psi_i|$ je řádkový (viz opět příklad 13.2).

Předchozí krok můžeme odvodit i takto: je-li $|k\rangle$, $k = 1, \dots, N$ ortonormální báze příslušného vektorového prostoru, potom stopa matice je součet diagonálních maticových elementů, načež použijeme rozkladu jedničky $\sum_{k=1}^N |k\rangle\langle k| = 1$. (srovnejte s příkladem 6.3 o ortonormálních projektorech)

$$\text{Tr } |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \sum_{k=1}^N \langle k|\psi_i\rangle\langle\psi_i|k\rangle = \sum_{k=1}^N \langle\psi_i|k\rangle\langle k|\psi_i\rangle = \langle\psi_i|\psi_i\rangle.$$

Podobně spočteme \widehat{W}^2 :

$$\begin{aligned} \widehat{W}^2 &= \sum_i^n w_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \sum_j^n w_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle\langle\psi_j| \\ \text{Tr } \widehat{W}^2 &= \sum_{i,j=1}^n w_i w_j \langle\psi_i|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\psi_i\rangle = \sum_{i,j=1}^n w_i w_j |\langle\psi_i|\psi_j\rangle|^2. \end{aligned}$$

Z Cauchyho nerovnosti (viz příklad 5.4) tím pádem dostaneme, že $|\langle\psi_i|\psi_j\rangle|^2 \leq \langle\psi_i|\psi_i\rangle\langle\psi_j|\psi_j\rangle = 1$. Rovnost nastane, právě když jsou vektory $|\psi_i\rangle$ a $|\psi_j\rangle$ lineárně závislé. Použitím tohoto výsledku už máme

$$\text{Tr } \widehat{W}^2 \leq \sum_{i,j=1}^n w_i w_j = \sum_{i=1}^n w_i \sum_{j=1}^n w_j = 1,$$

což jsme měli dokázat.

Rovnost nastane zřejmě buď v případě $n = 1$, nebo pokud jsou všechny $|\psi_i\rangle$ násobkem jediného vektoru. Jelikož dva lineárně závislé vektory v kvantové teorii popisují tentýž stav, nastane $\text{Tr } \widehat{W}^2 = 1$ pouze tehdy, když matice hustoty popisuje *čistý stav*. Všechny ostatní stavy se nazývají smíšené. *TB

14.3 Spektrum polynomu

Úkol: Necht' $f(x)$ je polynom a $\sigma(A)$ spektrum matice A . Dokažte, že $f(\sigma(A)) = \sigma(f(A))$.

Řešení: Pokud lze matici A diagonalizovat, je tvrzení triviální. Pak totiž platí $\sigma(A^k) = \{\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\}$ pokud $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Nyní tvrzení dokážeme obecněji.

Inkluze $f(\sigma(A)) \subset \sigma(f(A))$ plyne z následujících vztahů pro (libovolný) vlastní vektor x matice A :

$$Ax = \lambda x \Rightarrow A^k x = \lambda^k x, \quad \forall k = 0, 1, \dots \Rightarrow f(A)x = f(\lambda)x.$$

Naopak mějme nějaké $\mu \in \sigma(f(A))$. Z definice je

$$\mu \in \sigma(f(A)) \iff \det(f(A) - \mu) = 0. \quad (100)$$

Rozložme polynom $f(x) - \mu$:

$$f(x) - \mu = \alpha \prod_k (x - x_k), \quad (101)$$

kde $\alpha \neq 0$. Potom platí také

$$f(A) - \mu = \alpha \prod_k (A - x_k).$$

Použijeme-li nyní (100), vidíme, že všechna $A - x_k$ nemohou mít nenulový determinant. Tedy existuje $x_{k_0} \in \sigma(A)$, které podle (101) splňuje $f(x_{k_0}) = \mu$, a opačná inkluze $\sigma(f(A)) \subset f(\sigma(A))$ je takto dokázána.

Pro diagonalizovatelné matice je jednoduchým důsledkem toho, co jsme právě dokázali, tvrzení uváděné v [PLA] jako *Hamilton–Cayleyho věta*: zvolíme-li $f(x) = p(x)$ charakteristický polynom A , je $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) = \{0\}$, a tedy $p(A)$ musí být nulová matice.

Tvrzení platí i pro všechny ostatní matice, ale tam nelze použít tuto jednoduchou úvahu. *TB

14.4 Ještě jednou polynomy matic

Úkol: Uvažujme čtvercovou matici A a (reálný) polynom $P(x)$.

- a) Za jakých podmínek existuje inverze k $P(A)$?
- b) A kdy bude tato inverze opět polynomem matice A ?

Řešení: a) Matice $P(A)$ je invertibilní, pokud není nula jejím vlastním číslem. Podle úlohy (14.3) tedy existuje její inverze, právě když $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$ neobsahuje nulu, neboli když žádné vlastní číslo matice A není kořenem polynomu $P(x)$.

b) Odpověď je úplně stejná jako v bodě a), tedy pokud existuje inverze, je také polynomem. Abychom to nahlédli, uvažujme okruh reálných polynomů se sčítáním a násobením modulo charakteristický polynom matice A (označme jej třeba T ; srovnejte s příkladem 3.4). Násobení matic $P(A)Q(A) \bmod T(A)$ v tomto okruhu dává stejné výsledky jako $P(A)Q(A)$ díky $T(A) = 0$ (viz závěr příkladu 14.3).

Rozložíme-li P na kořenové činitele, vidíme, že v tomto okruhu stačí najít inverzní prvek k těm polynomům stupně 1, které nedělí polynom T . Inverzi k $A - \alpha$, $\alpha \notin \sigma(A)$ můžeme⁷⁰ hledat jako polynom A stupně o jedničku menšího než $T(x)$. Nakonec se sluší poznamenat, že hledáme-li inverzi ke kvadratickému polynomu, který nemá reálné kořeny (a není tudíž v okruhu reálných polynomů rozložitelný na součin polynomů stupně 1), můžeme jej formálně rozložit alespoň na součin dvou komplexních polynomů a najít inverzní prvky k nim. Inverze k tomuto kvadratickému polynomu pak bude jejich součinem a bude již reálná.

Budeme-li po takovém okruhu reálných polynomů reálné proměnné chtít dokonce, aby byl tělesem, tj. existovala v něm inverze

⁷⁰Toto tvrzení není zcela triviální. Inverzní matice k $A - \alpha$ sice existuje, ale je potřeba ověřit, že ji lze vyjádřit jako polynom v A . Důkaz je tento: pokud $T(\alpha)$ není 0, existuje k tak, že $kT(\alpha) + 1 = 0$. Pak je $kT(x) + 1$ polynom s kořenem α a lze jej tedy dělit $x - \alpha$: existuje $P(x)$, že $(x - \alpha)P(x) = kT(x) + 1$, neboli $(x - \alpha)P(x) = 1 \bmod T(x)$. Polynom $P(x)$ je inverz k $(x - \alpha)$. \square Tvrzení, že k polynomu $x - \alpha$ existuje inverze v tělese se sčítáním a násobením modulo $T(x)$, $T(\alpha) \neq 0$, odpovídá intuitivně tomu, že v okruhu $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ se sčítáním a násobením modulo neprvočíselné n existuje inverze k násobení pro prvky nesoudělné s n (příklad 3.1). O existenci inverze se lze u polynomů přesvědčit také přímým výpočtem: získáme soustavu n lineárních rovnic, o níž stačí dokázat, že má řešení.

ke každému nenulovému prvku, vidíme, že stupeň T nebude smět být větší než 2. Např. v případě $T(x) = x^2 + 1$ tak dostaneme těleso polynomů stupně nejvýše 1, které je *izomorfní* s tělesem \mathbb{C} : zkuste jej popsat; jaký polynom odpovídá ve vašem izomorfizmu $2 + 3i$?

*TB

14.5 Polynomy matic potřetí

Úkol: Spočtete $I + A + A^2 + \dots + A^{2000}$, kde matice A je

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Nejprve najdeme vlastní čísla matice A . Charakteristický polynom je $P(\lambda) = -(\lambda + 1)^3$. Matice A má tedy jediné vlastní číslo -1 , a protože hodnota matice $A + I$ je I , existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory. Budeme chtít sestavit *Jordanovu bázi* \mathbb{R}^3 a víme, že se tedy musí skládat ze dvou řetězců: jednoho délky jedna a jednoho délky dva.

Najdeme nejdříve nějaký vektor z $\text{Ker}(A + I)^2 \setminus \text{Ker}(A + I) = \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker}(A + I)$. Jelikož je tento prostor „skoro“ celé \mathbb{R}^3 , zvolíme například $v_3 = (1, 0, 0)^T$ a ověříme $v_2 = (A + I)v_3 = (-1, 0, 1)^T \neq 0$, tedy $v_3 \notin \text{Ker}(A + I)$. Tím máme jeden řetězec hotov ($v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow 0$) a potřebujeme najít ještě druhý řetězec, neboli vlastní vektor A nezávislý na v_2 ; to bude třeba $v_1 = (1, 1, 0)^T$.

V bázi (v_1, v_2, v_3) je matice zobrazení indukovaného maticí A

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a můžeme psát

$$A = PDP^{-1}, \text{ kde } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abychom spočetli příslušnou mocninu matice D , stačí najít mocniny jednotlivých Jordanových buněk. Potřebujeme tedy především

umocnit

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I + N, \text{ kde } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jelikož ale I a N komutují, dostaneme z binomické věty $\tilde{D}^k = (-I)^k + k(-I)^{k-1}N$, neboť všechny mocniny N vyšší než 1 jsou nulové. Vyšlo nám tedy

$$D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & -k(-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix},$$

odkud snadno nahlédneme, že platí

$$\sum_{k=0}^{2000} D^k = -1000 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stačí už jenom dopočítat

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a máme výsledek

$$\sum_{k=0}^{2000} A^k = P \left(\sum_{k=0}^{2000} D^k \right) P^{-1} = -1000 \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledku se lze dobrat i jinak, aniž bychom přitom museli explicitně počítat vlastní vektory matice A . Stačí vědět, že hodnota matice $A + I$ je 1, a tedy existují dva nezávislé vlastní vektory. Odtud plyne, že *minimálním polynomem*⁷¹ matice A je $P_{min}(\lambda) = (\lambda + 1)^2$.

⁷¹Minimální polynom matice A je ten z polynomů splňujících $P(A) = 0$, který má nejmenší stupeň (je jednoznačně dán až na násobek). Víme, že například charakteristický polynom splňuje $P(A) = 0$, ale aby vyšla nula, stačí brát v rozkladu $P(x)$ na kořenové činitele člen $(x - \lambda_i)$ pouze v mocnině rovné délce nejdelšího řetězce pro vlastní číslo λ_i .

Odečtením rovnosti $A^2 + 2A + I = 0$ a rovnosti $A^3 + 2A^2 + A = 0$ (kterou získáme z první vynásobením A) dostaneme $A^3 + A^2 = A + I$, resp. $A^4 + A^3 = A^2 + A$. Indukcí potom $A^{2k+2} + A^{2k+1} = A^2 + A = -(A + I)$ pro $k \in \mathbb{N}$ a

$$\sum_{k=0}^{2000} A^k = I - 1000(A + I) = I - 1000 \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*TB

14.6 Vlastní čísla nerozložitelných matic

Úkol: Matice A typu $n \times n$ je nerozložitelná, pokud ji nelze permutací řádků a symetrickou permutací sloupců převést do následujícího tvaru:

$$\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$$

(B, C, D jsou matice vhodných typů, B a D matice čtvercové, matice O je nulová matice)

Nechť A je nerozložitelná reálná matice a λ je její reálné vlastní číslo, které leží na hranici Gershgorinovy množiny matice A (viz příklad 9.2).

1. Dokažte, že takové vlastní číslo musí být obsaženo ve všech Gershgorinových kruzích matice A .
2. Nechť A je libovolná symetrická diagonálně dominantní matice s kladnými prvky na diagonále. Předpokládejme, že je A nerozložitelná a že v alespoň jednom řádku platí $A_{ii} > \sum_{i \neq j} |A_{ij}|$. Potom je A pozitivně definitní.

Řešení:

1. Nechť x je (reálný) vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu λ . Násobme jej vhodným číslem tak, aby $|x|_\infty = \max_i |x_i| = 1$, a označme k některý z indexů, pro které platí $|x_k| = 1$. Stejně jako při důkazu Gershgorinovy věty (v příkladu 9.2) odvodíme, že platí

(druhá rovnost je pouze jedna z rovnic $(A - \lambda)x = 0$ zapsaná ve složkách)

$$|\lambda - A_{kk}| = |\lambda - A_{kk}| |x_k| = \left| \sum_{i \neq k} A_{ki} x_i \right| \leq \sum_{i \neq k} |A_{ki}| |x_i| \leq \sum_{i \neq k} |A_{ki}|.$$

Tedy λ leží v k -tém z Gershgorinových kruhů, a protože leží na hranici Gershgorinovy množiny, musí ležet na hranici tohoto kruhu.

Označme nyní I množinu těch indexů i , pro které platí $|x_i| = 1$. Zřejmě leží λ na hranici všech Gershgorinových kruhů K_i pro $i \in I$. Je-li λ na hranici příslušného Gershgorinova kruhu ($k \in I$), platí $|\lambda - A_{kk}| = \sum_{i \neq k} |A_{ki}|$ a všechny výše uvedené nerovnosti jsou tedy rovnosti. Díky $\sum_{k \neq i} |A_{ki}| |x_i| = \sum_{k \neq i} |A_{ki}|$ musí být $|x_i|$ rovno jedné, kdykoliv je A_{ki} nenulové.

Ukážeme, že množina I obsahuje všechny indexy. Předpokládejme, že existuje index, který v této množině obsažen není. Provedme permutaci řádků a stejnou permutaci sloupců matice A tak, aby se řádky a sloupce s indexy z I staly posledními řádky a sloupci matice A . Jako D označme podmatici tvořenou posledními $|I|$ řádky a sloupci, jako B , C a O označme podmatice podle zadání z příkladu. Podmatice O je nenulová (neboť A je nerozložitelná), obsahuje tedy nějaký nenulový prvek A_{ij} , kde $i \in I$ a $j \notin I$. Podle úvah na konci minulého odstavce by ale muselo nutně platit $|x_j| = 1$ a tedy $j \in I$, což je spor. Tedy neexistuje index, který by nebyl v I , a stejně tak ani Gershgorinův kruh, na jehož hranici by nebylo λ .

2. Díky diagonální dominantnosti a symetrii je matice pozitivně semi-definitní (viz příklad 9.2) a nula může ležet na hranici její Gershgorinovy množiny. Zároveň ale podle předpokladu existuje alespoň jeden Gershgorinův kruh, ve kterém nula neleží. Podle předchozího bodu tedy nula nemůže být vlastním číslem této matice, a matice je proto dokonce pozitivně definitní. Nerozložitelnost matice nám umožnila předpokládat „ostrou diagonální dominantnost pouze v jednom řádku“.

*DK

14.7 Hadamardovy matice

Úkol: Matice H typu $n \times n$ se nazývá Hadamardova matice řádu n , pokud $H_{ij} \in \{1, -1\}$ a $H^T H = n \cdot I$. Dokažte existenci Hadamardových matic řádu 2^k , $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že existence Hadamardovy matice řádu k implikuje existenci Hadamardovy matice řádu $2k$. Dokažte, že existují pouze Hadamardovy matice sudých řádů a řádu 1. Dokažte, že pokud existuje Hadamardova matice řádu k , existuje i Hadamardova matice řádu k , která obsahuje v prvním sloupci a v prvním řádku pouze jedničky. Jakých hodnot může nabývat determinant Hadamardovy matice řádu k ?

Řešení: Nejprve ukážeme, že existence Hadamardovy matice řádu k implikuje existenci Hadamardovy matice řádu $2k$. Nechť H je Hadamardova matice řádu k a uvažme matici $H' = \begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix}$. Potom platí:

$$\begin{aligned} H'^T H' &= \begin{pmatrix} H^T & H^T \\ H^T & -H^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} H^T H + H^T H & H^T H - H^T H \\ H^T H - H^T H & H^T H + H^T H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \cdot I_k & 0 \\ 0 & 2k \cdot I_k \end{pmatrix} = 2k \cdot I_{2k} \end{aligned}$$

Zápisem I_k , resp. I_{2k} myslíme jednotkovou matici $k \times k$, resp. $2k \times 2k$. Hadamardovy matice řádu 1 a 2 jsou matice $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; matice řádu 2^l , $l \in \mathbb{N}$ pak lze vytvořit uvedeným postupem.

Nechť H je Hadamardova matice řádu $k \geq 2$. Matice $H^T H$ obsahuje mimo diagonálu nulové prvky — to znamená, že řádky matice H jsou na sebe kolmé. Protože jsou však tvořeny ± 1 , musí mít nutně sudou velikost, neboť z $k - i$ jedniček a i minus jedniček nulu nepočítáme, je-li k liché.

Ze vztahu $H^T H = k \cdot I$ plyne $|\det H| = \sqrt{k^k} = k^{k/2}$. Determinant Hadamardovy matice řádu k může mít tedy pouze hodnotu $\pm k^{k/2}$.

Poslední nedokázané tvrzení je, že existuje-li Hadamardova matice H určité velikosti, existuje také stejně velká Hadamardova matice, jejíž první řádek a sloupec obsahuje pouze $+1$. Pokud je totiž některý prvek prvního řádku -1 , potom změním znaménko všech prvků sloupce, který obsahuje tento prvek. Stejně postupujeme i v případě prvků prvního sloupce (měníme samozřejmě znaménko prvků na řádku). Je snadné si rozmyslet, že tyto úpravy neovlivní hodnotu součinu $H^T H$. *DK

14.8 Základní vektorové identity v \mathbb{R}^3

Úkol: Dokažte vektorové identity:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})) \end{aligned}$$

Rozmyslete si, které závorky jsou v uvedených výrazech zbytečné a které naopak musíme bezpodmínečně psát. Dále si uvědomte, že pravou (i levou) stranu lze zapsat v mnoha různých tvarech užitím např. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, $\phi \mathbf{a} = \mathbf{a} \phi$, ... Skalárním součinem myslíme kanonický součin $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$.

Řešení: Důkaz provedeme pomocí souřadnicového zápisu operací vektorový součin (\times) a skalární součin (\cdot). Výsledkem vektorového součinu dvou vektorů je opět vektor, jehož i -tou složku můžeme vyjádřit takto (užíváme *Einsteinovu sumační konvenci*)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k.$$

Levi-Civittův symbol ϵ_{ijk} jsme definovali v příkladu 6.1 a více se o něm pojednává v 19.5, kde jsou odvozeny některé jeho vlastnosti. Při odvozování vektorových identit použijeme z těchto vlastností pouze vztah (189)

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (102)$$

a dále budeme mít na paměti, že ϵ_{ijk} je totálně antisymetrický. Výsledkem skalárního součinu dvou vektorů je číslo, které můžeme zapsat jako

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta_{ij} a_i b_j = a_i b_i = a_j b_j,$$

kde δ_{ij} je Kroneckerův symbol.

Nyní k prvnímu vzorci, který chceme dokázat.

$$(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))_i = \epsilon_{ijk} a_j (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_k = \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} b_l c_m$$

Nyní přišel čas použít identitu (102)

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} b_l c_m &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m = \\ &= \delta_{il} b_l (\delta_{jm} a_j c_m) - \delta_{im} c_m (\delta_{jl} a_j b_l) \end{aligned}$$

Použili jsme $\epsilon_{lmk} = \epsilon_{klm}$. Uvědomíme si, že $\delta_{il}b_l = b_i$ a $\delta_{jm}a_jc_m = a \cdot c$, a můžeme pro libovolné i psát

$$(a \times (b \times c))_i = b_i(a \cdot c) - c_i(a \cdot b),$$

jinak řečeno $a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$, neboli „*identita bac minus cab*“.

Odvození druhého vzorce provedeme rychleji.

$$\begin{aligned} [(a \times b) \cdot (c \times d)]_i &= \epsilon_{ijk}a_jb_k\epsilon_{ilm}c_l d_m = \epsilon_{jki}\epsilon_{lmi}a_jb_kc_l d_m = \\ &= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{kl}\delta_{jm})a_jb_kc_l d_m = \delta_{jl}a_jc_l\delta_{km}b_k d_m - \delta_{kl}b_kc_l\delta_{jm}a_j d_m = \\ &= [(a \cdot c)(b \cdot d) - (b \cdot c)(a \cdot d)]_i. \end{aligned}$$

Poslední vzorec lze snadno odvodit z prvního vzorce, pokud označíme $v = c \times d$. Pokud se však čtenáři zalíbilo počítání se symboly ϵ_{ijk} , může použít následující postup:

$$\begin{aligned} [(a \times b) \times (c \times d)]_i &= \epsilon_{ijk}(\epsilon_{jlm}a_l b_m)(\epsilon_{kno}c_n d_o) = \\ &= (\epsilon_{kij}\epsilon_{lmj})\epsilon_{kno}a_l b_m c_n d_o = (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})\epsilon_{kno}a_l b_m c_n d_o = \\ &= \delta_{kl}\delta_{im}\epsilon_{kno}a_l b_m c_n d_o - \delta_{km}\delta_{il}\epsilon_{kno}a_l b_m c_n d_o = \\ &= b_i a_k \epsilon_{kno} c_n d_o - a_i b_k \epsilon_{kno} c_n d_o = [b(a \cdot (c \times d)) - a(b \cdot (c \times d))]_i. \end{aligned}$$

*VP

14.9 Chování smíšeného součinu při lineárních transformacích

Úkol: Ukažte, že platí (\cdot je skalární součin, \times je vektorový součin, A je libovolný lineární operátor a pohybujeme se v \mathbb{R}^3)

$$\begin{aligned} Au \cdot Av \times Aw &= u \cdot v \times w \det A \\ Au \cdot v \times w + u \cdot Av \times w + u \cdot v \times Aw &= u \cdot v \times w \operatorname{Tr} A \\ Au \cdot Av \times w + Au \cdot v \times Aw + u \cdot Av \times Aw &= \\ &= \frac{1}{2}((\operatorname{Tr} A)^2 - \operatorname{Tr} A^2) u \cdot v \times w \end{aligned}$$

Řešení: Budeme používat Einsteinovu sumační konvenci. Nejprve uvěříme tvrzení $\det A = \epsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3}$ a poté již není těžké ověřit, že (indexy l, m, n jsou volné a *nesčítá* se přes ně) $\epsilon_{lmn} \det A =$

$\varepsilon_{ijk}A_{il}A_{jm}A_{kn}$ (obě tvrzení jsou vysvětlena v příkladu 19.5). Nyní snadno dokážeme první tvrzení

$$\begin{aligned} Au \cdot Av \times Aw &= \varepsilon_{ijk}A_{il}u_lA_{jm}v_mA_{kn}w_n = \\ &= (\varepsilon_{ijk}A_{il}A_{jm}A_{kn})u_lv_mw_n = \varepsilon_{lmn}u_lv_mw_n \det A = u \cdot v \times w \det A. \end{aligned}$$

K důkazu druhého tvrzení použijeme poslední identitu z příkladu 19.5, která říká, že

$$\varepsilon_{ijk}\delta_{lm} = \varepsilon_{mjk}\delta_{il} + \varepsilon_{mki}\delta_{jl} + \varepsilon_{mij}\delta_{kl}.$$

Začneme upravovat pravou stranu.

$$\begin{aligned} u \cdot v \times w \operatorname{Tr} A &= \delta_{lm}A_{ml}\varepsilon_{ijk}u_iv_jw_k = \\ &= \varepsilon_{mjk}(\delta_{il}A_{ml}u_i)v_jw_k + \varepsilon_{mki}u_i(\delta_{jl}A_{ml}v_j)w_k + \varepsilon_{mij}u_iv_j(\delta_{kl}A_{ml}w_k) \end{aligned}$$

Toto je ale přímo výraz $Au \cdot v \times w + u \cdot Av \times w + u \cdot v \times Aw$, a to rozepsaný do složek. Druhé tvrzení je tímto dokázáno.

Důkaz posledního tvrzení provedeme užitím první identity z příkladu 19.5

$$\varepsilon_{lmk}\varepsilon_{nop} = \det \begin{pmatrix} \delta_{ln} & \delta_{mn} & \delta_{kn} \\ \delta_{lo} & \delta_{mo} & \delta_{ko} \\ \delta_{lp} & \delta_{mp} & \delta_{kp} \end{pmatrix}. \quad (103)$$

Nejprve si ale uvědomíme, že platí

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}A_{il}A_{jm} = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})A_{il}A_{jm} = \frac{1}{2}((\operatorname{Tr} A)^2 - \operatorname{Tr} A^2)$$

Opět začneme upravovat pravou stranu.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}((\operatorname{Tr} A)^2 - \operatorname{Tr} A^2)u \cdot v \times w &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}A_{il}A_{jm}\varepsilon_{nop}u_nv_ow_p = \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{lmk}\varepsilon_{nop})A_{il}A_{jm}u_nv_ow_p, \end{aligned}$$

na součin v závorce použijeme identitu (103) a výsledkem je

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(A_{il}u_lA_{jm}v_mw_k + A_{il}v_lA_{jm}w_mu_k + A_{il}w_lA_{jm}u_mv_k - \\ - A_{il}v_lA_{jm}u_mv_k - A_{il}w_lA_{jm}v_mu_k - A_{il}u_lA_{jm}w_mv_k), \end{aligned}$$

nyní stačí využít toho, že $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$ apod. a výsledkem je levá strana dokazované rovnosti. *VP

14.10 Komutátorová binomická formule

Úkol: Dokažte následující formuli s binomickými koeficienty a složenými komutátory, která říká, jak lze prokomutovat C^n přes B .

$$C^n B = BC^n - n[B, C]C^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} [[B, C], C]C^{n-2} - \dots \\ \dots + (-1)^n [\dots [[B, C], C], \dots, C]. \quad (104)$$

Řešení: Zvolíme si matici C pevně a definujeme operátory

$$K(B) = [B, C], \quad L(B) = CB, \quad R(B) = BC.$$

působící na prostoru reálných matic $n \times n$. Nejprve se přesvědčíme, že zobrazení K a R komutují

$$K(R(B)) = K(BC) = [BC, C] = [B, C]C = R([B, C]) = R(K(B)).$$

Můžeme proto využít *binomické formule*

$$L^n = (R - K)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} R^{n-k} K^k. \quad (105)$$

Ostrým pohledem na rovnosti (104) a (105) zjistíme, že říkají totéž, pokud necháme členy v rovnici (105) působit na B . Levou stranu rovnice (104) je třeba číst jako „operátor násobení maticí C zleva“ umocněný na n -tou, tj. L^n . Označení K, L, R jsme volili jako zkratku slov „komutátor“, „levá“ a „pravá“. *LM,MZ

14.11 Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích

Úkol: Najděte vyjádření Laplaceova operátoru ve sférických souřadnicích v \mathbb{R}^n .

Řešení: Vyřešíme nejprve podstatně obecnější úlohu — najdeme tvar Laplaceova operátoru v libovolných ortogonálních souřadnicích.

Uvažujme kartézské souřadnice x_1, \dots, x_n v prostoru \mathbb{R}^n a zavedeme v něm nové souřadnice z_1, \dots, z_n vztahy $z_k = z_k(x_1, \dots, x_n)$.

Transformační pravidlo pro derivace podle souřadnic dostaneme z věty o derivování složené funkce: pokud označíme formální⁷² řádkové vektory gradientů

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \quad \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}\right),$$

říká tato věta, že

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) J, \quad \text{kde } J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial z_j}, \quad (106)$$

přičemž derivace podle \mathbf{x} na pravé straně *nepůsobí* na elementy matice J , jde o čistě algebraické násobení matic. Matice J se nazývá *Jacobiho matice*.

K vyjádření Laplaceova operátoru použijeme nejprve kartézské souřadnice x_1, \dots, x_n , kde je to součet druhých parciálních derivací podle jednotlivých souřadnic, a pak přejdeme pomocí (106) k souřadnicím z_1, \dots, z_n

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)^T = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right) J^{-1} J^{-1T} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)^T. \quad (107)$$

Ještě jednou zdůrazněme, že první gradient v (107) *nepůsobí* na matici J^{-1} , která pochází z (106). Aby se to nepletlo, označíme členy, které musíme derivovat prvním z gradientů, šipkou \uparrow . Rovnice (107) pak bude vypadat

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right) \underset{\uparrow}{J^{-1}} \underset{\uparrow}{J^{-1T}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)^T. \quad (108)$$

Představujte si to tak, že (108) rozepíšeme jako součin maticových elementů, přičemž první z operátorů derivace přiložíme k součinu těch členů, na které ukazuje šipka.

Nyní už se konečně pustíme do počítání. Na tomto místě použijeme požadavek ortogonalilty souřadnic z_1, \dots, z_n , který neříká nic jiného, než že matice

$$D = J^T J \quad (109)$$

⁷²Tím máme na mysli, že bychom měli správně říkat: pro zadanou (hladkou) funkci $f(x_1, \dots, x_n)$ uvažujme vektor $(\partial/\partial \mathbf{x})f = (\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n)$.

má být diagonální. Její diagonální elementy $D_{kk} = \sum_j J_{jk} J_{jk} = \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial z_k}\right)^2$ označme λ_k^2 ($\lambda_k > 0$ jsou tzv. *Laméovy koeficienty*⁷³).
 Dosazením z (109) do (108) máme

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right) D^{-1} J^T J D^{-1T} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)^T.$$

$\uparrow \uparrow \quad \uparrow$

Rozmyslete si, že nyní můžeme použít vzorec pro derivaci součinu funkcí. S využitím $D = D^T$ můžeme tedy napsat Δ jako

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right) D^{-1} J^T \left[\underset{\uparrow}{J} D^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)^T + \underset{\uparrow}{J} D^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)^T + \underset{\uparrow}{J} D^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)^T \right]. \quad (110)$$

Jednotlivým členům tohoto vzorce se budeme věnovat zvlášť — první, který nám dá nejvíc práce, si necháme na konec a zatím se spokojíme s druhými dvěma.

Tedy za prvé, díky (109) platí

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right) D^{-1} J^T \underset{\uparrow}{J} D^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)^T &= \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right) D^{-1} \underset{\uparrow}{\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)^T} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial z_k} \frac{1}{\lambda_k^2}\right) \frac{\partial}{\partial z_k}, \end{aligned} \quad (111)$$

Za druhé,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right) D^{-1} J^T J D^{-1} \underset{\uparrow}{\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)^T} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right) D^{-1} \underset{\uparrow}{\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)^T} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^2} \frac{\partial^2}{\partial z_k^2}. \quad (112)$$

⁷³Představme si „poledník“ v souřadnicích $\{z_i\}$ příslušný k z_k (tj. všechny z_i , $i \neq k$ jsou konstantní) a tečný vektor k němu. Délku tohoto vektoru definujeme jako délku oblouku (ku Δz_k), který po poledníku opišeme, pokud změníme z_k o Δz_k (v limitě $\Delta z_k \rightarrow 0$). Takový vektor je právě k -tý sloupec matice J a jeho délka je rovna λ_k .

Konečně slíbený první člen v (110) (označme jej třeba B) rozepíšeme do složek:

$$B = \sum_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{1}{\lambda_i^2} J_{ij}^T J_{jk} \frac{1}{\lambda_k^2} \frac{\partial}{\partial z_k}. \quad (113)$$

Index j se vyskytuje jenom ve dvou členech a můžeme přes něj snadno vysčítat (použijeme přitom záměnnost parciálních derivací — hádejte, kde)

$$\sum_j J_{ij}^T \frac{\partial J_{jk}}{\partial z_i} = \sum_j J_{ji} \frac{\partial J_{ji}}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z_k} \sum_j (J_{ji})^2 \stackrel{(109)}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_i^2}{\partial z_k} = \lambda_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial z_k}.$$

Dosazením do (113) už dostaneme příjemnější výraz

$$B = \sum_{i,k} \frac{1}{\lambda_i \lambda_k^2} \frac{\partial \lambda_i}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial z_k}.$$

Označíme-li ještě $\Lambda = \prod_i \lambda_i$, můžeme se zbavit sumy přes i : $\sum_i (1/\lambda_i) (\partial \lambda_i / \partial z_k) = (1/\Lambda) (\partial \Lambda / \partial z_k)$.

$$B = \sum_k \frac{1}{\Lambda} \frac{1}{\lambda_k^2} \left(\frac{\partial}{\partial z_k} \Lambda \right) \frac{\partial}{\partial z_k}. \quad (114)$$

Konečně na úplný závěr můžeme složit (111), (112) a (114) zpět do jednoduchého vzorce

$$\Delta = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial z_k} \frac{\Lambda}{\lambda_k^2} \frac{\partial}{\partial z_k}. \quad (115)$$

Vraťme se ještě ke sférickým souřadnicím. Naznačíme induktivní postup, jak je zavést v \mathbb{R}^n .

$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$x_1 = r \cos \varphi_1$	$x_1 = r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$	$x_1 = r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3$
$x_2 = r \sin \varphi_1$	$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$	$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3$
	$x_3 = r \sin \varphi_2$	$x_3 = r \sin \varphi_2 \cos \varphi_3$
		$x_4 = r \sin \varphi_3$

Úhly φ_k pro $k = 2, 3, \dots$ bereme z $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a φ_1 z $(-\pi, \pi)$. Například při přechodu od $n = 2$ k $n = 3$ jsme k dosavadním souřadnicím přidali úhel φ_2 , který popisuje odchylku polohového vektoru daného bodu A od roviny \mathbb{R}^2 . Souřadnice x_1, x_2 tedy musíme vynásobit $\cos \varphi_2$, souřadnice x_3 bude zřejmě $r \sin \varphi_2$. Pro vyšší n je postup stejný, poslední úhel φ_{n-1} je vždy úhel mezi polohovým vektorem bodu A a rovinou \mathbb{R}^{n-1} .

Laméovy koeficienty vyjdou po řadě

$$\begin{aligned}\lambda(r) &= 1 \\ \lambda(\varphi_1) &= r \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \dots \cos \varphi_{n-1} \\ \lambda(\varphi_2) &= r \cos \varphi_3 \dots \cos \varphi_{n-1} \\ &\vdots \\ \lambda(\varphi_{n-2}) &= r \cos \varphi_{n-1} \\ \lambda(\varphi_{n-1}) &= r,\end{aligned}$$

a tedy $\Lambda = r^{n-1} \cos \varphi_2 \cos^2 \varphi_3 \dots \cos^{n-2} \varphi_{n-1}$. Dosazením do (115) po snadné úpravě dostaneme

$$\Delta = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^2} \frac{1}{\cos^{k-1} \varphi_k} \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \cos^{k-1} \varphi_k \frac{\partial}{\partial \varphi_k}, \quad (116)$$

což můžeme také přepsat jako

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi_k^2} - (k-1) \operatorname{tg} \varphi_k \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \right].$$

Speciálně pro $n = 2, 3$ vyjdou známé vztahy

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} \\ \Delta_3 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} + \frac{1}{r^2 \cos \varphi_2} \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \cos \varphi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi_2}.\end{aligned}$$

U sférických souřadnic v \mathbb{R}^3 bývá zvykem používat označení $\varphi_1 = \varphi$ a $\varphi_2 = \vartheta$. *TB

15 Jordan hledí pozitivně

15.1 Birkhoffova věta

Úkol: *Nechť A je bistočastická matice, neboli matice s nezápornými elementy, jejíž všechny řádkové a sloupcové součty jsou 1. Dokažte, že A je konvexní kombinací permutačních matic. Toto tvrzení se nazývá Birkhoffova věta.*

Pojem *konvexní kombinace* vychází z geometrické představy: pro $x_1, \dots, x_n \in V$ je konvexní kombinace libovolná lineární kombinace

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad \text{kde } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \langle 0; 1 \rangle, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Například pro $V = \mathbb{R}^2$ tvoří všechny konvexní kombinace těchto vektorů konvexní n -úhelník s vrcholy v x_1, \dots, x_n (ve speciálních případech může ale být tento obrazec degenerovaný, například pokud jsou všechny vektory kolineární).

Permutační matice P_π je matice lineárního zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, které permutuje složky vektoru podle permutace π , například $P_\pi(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_2, v_3, v_1, v_4)$. Tato matice tedy obsahuje n jedniček na místech $1\pi(1), \dots, n\pi(n)$ a zbytek jsou nuly. Jinak řečeno, v každém řádku a v každém sloupci je právě jedna jednička.

Při důkazu Birkhoffovy věty by se mohlo hodit toto tvrzení (♠):

Nechť G je bipartitní graf (viz úvod ke kapitole 7) s partitami V_1 a V_2 stejné velikosti. Nechť má každá množina vrcholů $W \subseteq V_1$ alespoň $|W|$ sousedů (v partitě V_2), potom graf G obsahuje perfektní párování, tj. $|V_1|$ různých navzájem neincidentních hran.

Řešení: Předpokládejme, že existuje bistočastická matice, která není konvexní kombinací permutačních matic. Uvažujme nějakou matici A , která obsahuje mezi všemi těmito maticemi co nejméně nenulových složek. Zřejmě je počet nenulových složek matice A alespoň $n + 1$: každý řádek (a sloupec) musí obsahovat alespoň jednu nenulovou složku a bistočastická matice s n nenulovými složkami je matice permutační. Uvažujme nyní bipartitní graf, jehož jedna partita je tvořena indexy řádků matice a druhá indexy sloupců matice. Vrcholy grafu odpovídající nějakému řádkovému a sloupcovému indexu

jsou spojeny hranou právě tehdy, pokud jim odpovídající prvek matice je nenulový. Nyní ukážeme, že jsou splněny předpoklady tvrzení (♠), a tedy že tento graf obsahuje perfektní párování.

Uvažujme pro matici A libovolnou množinu řádkových indexů I a označme J množinu indexů všech sloupců, v nichž se na některé řádce z I vyskytuje nenulový prvek. Součet všech prvků v řádcích s indexy z množiny I je $|I|$ (uvažovaná matice je bistocharstická) a součet všech prvků ve sloupcích s indexy z množiny J je $|J|$. Součet prvků v těchto sloupcích na řádcích s indexy z množiny I je pak nejvýše $|J|$, neboť na těchto řádcích jsou již v ostatních sloupcích samé nuly. Došli jsme tím k $|I| \leq |J|$, což nás opravňuje použít tvrzení (♠).

Uvažovaný bipartitní graf tedy obsahuje perfektní párování a tomu přirozeným způsobem odpovídá nějaká permutační matice, označme ji P . Dále označme π nejmenší ze všech prvků matice A na místech nenulových prvků matice P . Matici A lze zapsat jako konvexní kombinaci

$$A = \pi P + (1 - \pi) \frac{A - \pi P}{1 - \pi} \quad (117)$$

matice P a matice $\frac{A - \pi P}{1 - \pi}$. První z těchto matic je permutační, druhá je bistocharstická (ověřte; proč jsou prvky $A - \pi P$ nezáporné?) a má o alespoň jeden nenulový prvek méně než matice A : o ten (ty), které jsou nejmenší na místech odpovídajících nenulovým prvkům matice P . Podle předpokladu na úplném začátku řešení lze tedy matici $\frac{A - \pi P}{1 - \pi}$ vyjádřit jako konvexní kombinaci permutačních matic. Potom musí ale i matice A , vyjádřená pomocí (117), být konvexní kombinací permutačních matic (lze také říci, že konvexní kombinace konvexních kombinací je opět konvexní kombinace), čímž je důkaz hotov. *DK

15.2 Stochastické matice

Úkol: *Nechť A je stochastická matice, neboli matice s nezápornými elementy, jejíž sloupcové součty jsou jedna. Dokažte, že pokud je A nerozložitelná (viz příklad 14.6), pak existuje právě jeden vektor v , jehož součet složek je jedna, takový, že $Av = v$. Dále ukažte, že má tento vektor pouze nezáporné složky.*

Řešení: Nejprve dokažme existenci. Jednička je vlastním číslem matice A , neboť matice $A - I$ je singulární: její sloupcové součty jsou nula, a tedy jsou její řádky lineárně závislé. Necht' v je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu 1. Pro spor nyní předpokládejme, že některé jeho složky jsou kladné a jiné záporné: označme I_+ indexy jeho kladných složek a I_- indexy jeho záporných složek. Jelikož $A_{ij} \geq 0$, platí

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_+} v_i &= \sum_{i \in I_+} \sum_j A_{ij} v_j = \\ &= \sum_{i \in I_+} \sum_{j \in I_+} A_{ij} v_j + \sum_{i \in I_+} \sum_{j \in I_-} A_{ij} v_j \leq \sum_{j \in I_+} v_j + \sum_{i \in I_+} \sum_{j \in I_-} A_{ij} v_j. \end{aligned}$$

Odtud je vidět, že $\sum_{i \in I_+} \sum_{j \in I_-} A_{ij} v_j = 0$, a tedy pro všechny $i \in I_+$ a $j \in I_-$ platí $A_{ij} = 0$. Přerovnáme-li nyní řádky a sloupce matice tak, aby řádky (a stejně i sloupce) s indexy z množiny I_+ byly nyní na prvních řádcích (sloupcích), dostaneme matici v blokovém tvaru

$$\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix},$$

neboli jsme získali rozklad matice A (viz opět příklad 14.6). Tedy musí vektor v obsahovat pouze nezáporné složky, a dělíme-li jej součtem jeho složek (který je nyní automaticky nenulový), dostaneme vektor se součtem složek jedna.

Nyní dokážeme jednoznačnost vektoru v . Necht' v a w jsou dva různé vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu jedna takové, že součet jejich složek je jedna. Vektor $v - w$ je pak také vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu jedna; jeho součet složek je nula, a tedy obsahuje jak kladné tak i záporné složky, což ovšem není možné. Dokázali jsme tím, že existuje právě jeden vektor v splňující podmínky zadání příkladu. *DK

15.3 Nilpotentní matice

Úkol: Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že je tato matice nilpotentní, a určete nejmenší $n \in \mathbb{N}$, pro které platí $A^n = 0$. Nalezněte její Jordanův kanonický tvar J_A a zapište jí jako QJ_AQ^{-1} .

Řešení: Víme, že lineární zobrazení na konečnědimenzionálním prostoru je právě tehdy nilpotentní, když má jediné vlastní číslo, a to nulu. Začneme tedy s určením charakteristického polynomu. Můžeme jej buďto přímo spočítat jako $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ (je výhodné determinant rozvinout podle prvního sloupce), nebo můžeme použít třeba vzorce

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 \operatorname{Tr} A + \lambda^2 \sum_{i < j} A_{i,j} - \lambda \sum_i A_i + \det A,$$

viz příklad 9.5, vztah 59 (odvození podobného vzorce pro matice 3×3 je v příkladu 9.10). V tomto vzorci rozumíme symboly $A_{i,j}$, resp. A_i determinanty matice A , s dvěma, resp. jedním vynechaným řádkem a sloupcem⁷⁴. Pro srovnání uvádíme $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$, $A_{1,2} = A_{2,4} = 0$, $A_{1,3} = -1$, $A_{1,4} = 2$, $A_{2,3} = -2$, $A_{3,4} = 1$ a dále pak $\operatorname{Tr} A = 0$ a $\det A = 0$.

Ať už tak či onak, charakteristický polynom vyjde $\chi(\lambda) = \lambda^4$, a tedy je nula skutečně jediným vlastním číslem matice A . Vzhledem ke kanonické bázi bude tedy A odpovídat nějakému nilpotentnímu zobrazení $\phi_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Podle věty o struktuře nilpotentního zobrazení budou existovat maximální řetězce, jejichž vektory budou tvořit bázi \mathbb{R}^4 .

Připomeňme, že u nilpotentního zobrazení $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou

⁷⁴Například $A_{2,3}$ je determinant matice 2×2 , která vznikne z A vynecháním druhého sloupce a řádku a třetího sloupce a řádku.

řetězce

$$\begin{array}{c} v_1^{(1)} \xrightarrow{\phi_N} \dots \xrightarrow{\phi_N} v_{k_1}^{(1)} \xrightarrow{\phi_N} 0, \\ \vdots \\ v_1^{(m)} \xrightarrow{\phi_N} \dots \xrightarrow{\phi_N} v_{k_m}^{(m)} \xrightarrow{\phi_N} 0, \end{array} \quad (118)$$

šipka říká například, že $\phi_N(v_1^{(1)}) = v_2^{(1)}$ nebo $\phi_N(v_{k_1}^{(1)}) = 0$, neboli poslední vektor v řetězci je vždy vlastním vektorem ϕ_N . Aby mohly tvořit tyto vektory bázi \mathbb{R}^n , musí být součet jejich délek k_1, \dots, k_m roven n . Navíc platí věta pro libovolné řetězce, které vyhovují tomuto schématu: Pokud jsou koncové vektory řetězců (v našem schématu $v_{k_1}^{(1)}, \dots, v_{k_m}^{(m)}$) lineárně nezávislé, pak jsou lineárně nezávislé všechny vektory ve schématu.

Vzhledem k bázi (118) má pak ϕ_N blokově diagonální matici, neboť pokud označíme lineární obal vektorů i -tého řetězce V_i , pak pro $x \in V_i$ je opět $\phi_N x \in V_i$. Pokud bázi V_i napíšeme v pořadí $\{v_{k_1}^{(1)}, \dots, v_1^{(1)}\} = \{a_1, \dots, a_{k_1}\}$, mají tyto *Jordanovy bloky* (velikosti $k_i \times k_i$) tvar

$$J_{k_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

neboť $\phi_N(a_j) = 1a_{j-1}$, a tedy v j -tém sloupci je jednička na $(j-1)$ -ním řádku a jinak jsou všude nuly. V prvním sloupci jsou nuly všude, neboť $\phi_N a_1 = 0$.

Nyní se vrátíme k zobrazení $\phi_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Abychom určili Jordanův tvar ϕ_A , potřebujeme znát pouze *strukturu* Jordanovy báze, tedy délky (a počet) řetězců (118), nikoliv konkrétní vektory v tomto schématu; to bude první krok. Teprve abychom mohli zapsat A jako QJ_AQ^{-1} , musíme tyto vektory najít, a to učiníme v kroku druhém.

Určení struktury Jordanovy báze zobrazení ϕ_A

Pro zobrazení ϕ_A existuje určité schéma typu (118). Všimněme si, které jeho vektory leží v $\text{Ker } \phi_A$: jsou to právě poslední (vpravo ležící)

vektory všech řetězců. Jelikož všechny vektory v tomto schématu tvoří bázi \mathbb{R}^4 (každý vektor z \mathbb{R}^4 lze zapsat jako lineární kombinaci těchto vektorů), tvoří poslední vektory všech řetězců v (118) bázi v $\text{Ker } \phi_A$. Tedy pokud naopak zjistíme dimenzi $\text{Ker } \phi_A$, budeme vědět, kolik je těchto posledních vektorů. Jinak řečeno, $\dim \text{Ker } \phi_A$ udává počet všech řetězců.

Podobně bázi $\text{Ker } (\phi_A)^2$ tvoří poslední a předposlední vektory všech řetězců. Tudíž $\dim \text{Ker } (\phi_A)^2 - \dim \text{Ker } \phi_A$ udává počet řetězců délky alespoň dva. Všimněte si také, že dimenze kernelů mocnin ϕ_A tvoří ostře rostoucí posloupnost až do ϕ_A^m , kde m je délka nejdelšího řetězce. Dimenze všech dalších kernelů jsou již stejné a jsou rovny počtu vektorů v celém schématu (dimenzi celého prostoru n).

Dimenze kernelů $\phi_A, (\phi_A)^2, \dots$ můžeme určit v libovolné bázi. Zvolíme-li si kanonickou bázi, musíme spočítat A, A^2, \dots a najít například hodnoty těchto matic ($\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{Ker } A^n + \dim \text{Im } A^n$). Pokud nebude hodnota matice (počet lineárně nezávislých řádků) vidět okamžitě, převedeme ji gaussovskou eliminací na horní trojúhelníkový tvar.

$$\begin{array}{l}
 (1)+(2) \rightarrow (1') \\
 (2)+(1') \rightarrow (2') \\
 -(2')+(3) \rightarrow (3') \\
 (2')+(4) \rightarrow (4') \\
 A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h(A) = 2 \Rightarrow \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \dim \text{Ker } \phi_A = 4 - 2 = 2, \\
 A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad h(A^2) = 1 \Rightarrow \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \dim \text{Ker } (\phi_A)^2 = 4 - 1 = 3, \\
 A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h(A^3) = 0 \Rightarrow \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \dim \text{Ker } (\phi_A)^3 = 4 - 0 = 4.
 \end{array}$$

Výpočet A^3 jsme si již mohli jistě ušetřit, neboť z $\dim \text{Ker } (\phi_A)^2 < 4$ plyne $\dim \text{Ker } (\phi_A)^3 > \dim \text{Ker } (\phi_A)^2$, a tedy zbývá pouze možnost

$\dim \text{Ker}(\phi_A)^3 = 4$. Schéma (118) má tedy pro ϕ_A tvar

$$\begin{aligned} (v_1^{(1)} \equiv a_4) \rightarrow (v_2^{(1)} \equiv a_3) \rightarrow (v_3^{(1)} \equiv a_1) \rightarrow 0 \\ (v_1^{(2)} \equiv a_2) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (119)$$

máme dva řetězce, jeden délky $k_1 = 3$ a jeden délky $k_2 = 1$ a stupeň nilpotence ϕ_A je tři ($\phi_A^3 = 0$). Všimněme si, že zatímco Hamilton–Cayleyova věta nám zaručuje, že $\chi(A) = A^4 = 0$, mohou existovat i polynomy p nižšího stupně než χ , pro který $p(A) = 0$. *Minimální polynom* je ten z nich⁷⁵, který má nejmenší stupeň. V našem případě je to $p(x) = x^3$.

V bázi a_1, a_3, a_4, a_2 má zobrazení ϕ_A matici

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nalezení Jordanovy báze pro ϕ_A

Abychom mohli zapsat A jako QJ_AQ^{-1} , musíme určit vektory v schématu (119) vzhledem ke kanonické bázi. Místo zobrazení ϕ_A tedy budeme dále pracovat s maticí A .

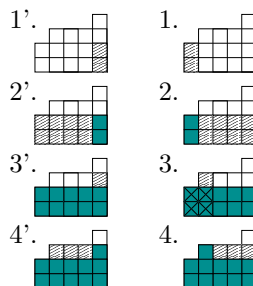
Zaručený způsob pro obecnou nilpotentní matici N typu $n \times n$ je následující:

- 1'. Určíme nějakou bázi $\text{Im } N^{m-1}$, kde m je stupeň nilpotence N . To jsou koncové vektory všech nejdelších řetězců (tedy řetězců délky $m - 1$) — představte si $N^{m-1}x$, kde x je obecný vektor zapsaný v bázi (118).
- 2'. Tyto koncové vektory doplníme na celé řetězce, tedy řešíme soustavy typu $Nv_{k_1-1}^{(1)} = v_{k_1}^{(1)}$. Přitom máme na paměti, že z lineární nezávislosti koncových vektorů, které jsme určili v bodě 1', plyne nezávislost celých řetězců.
- 3'. Bázi $\text{Im } N^{m-1}$ doplníme na bázi $\text{Im } N^{m-2} \cap \text{Ker } N$. Tyto nové vektory jsou koncové vektory všech řetězců délky $m - 2$ (představa je podobná jako v bodu 1').

⁷⁵Minimální polynom je určen jednoznačně až na násobek číslem.

- 4'. Nové koncové vektory doplníme na celé řetězce.
- 5'. Doplnujeme vždy bázi $\text{Im } N^l \cap \text{Ker } N$ na bázi $\text{Im } N^{l-1} \cap \text{Ker } N$ a tyto nové vektory rozšíříme na celé řetězce. Skončíme u $l = 1$.

Uvedený způsob je značně zdoluhavý, neboť hledání vzorů je nepoměrně náročnější než hledání obrazů. Jeho význam spočívá v tom, že představuje zaručenou cestu jak hledané vektory najít a slouží při důkazu věty o struktuře nilpotentního zobrazení. Pro praktický výpočet použijeme jiný postup: řetězce budeme tvořit od levého konce⁷⁶. Pro větší názornost jsou oba postupy naznačeny na obrázku



vpravo: Jordanova báze se v tomto příkladě skládá ze dvou řetězců délky pět, jednoho řetězce délky čtyři a jednoho délky jedna. Vektory, které jsme v daném kroku našli, jsou značeny vyšrafovaným políčkem, vektory, které jsou známy z předchozích kroků, jsou značeny šedými políčky.

1. Najdeme $\dim \text{Ker } N^m - \dim \text{Ker } N^{m-1}$ nezávislých vektorů v $\text{Ker } N^m \setminus \text{Ker } N^{m-1}$. To budou levé koncové vektory všech nejdelších řetězců (délky m).
2. Dopotítáme celé řetězce (opakovaně násobíme koncový vektor maticí N). Pokud jsou tyto řetězce závislé (to poznáme na pravých koncových vektorech), musíme zvolit v bodu 1 vektory jinak a zkusit to znovu.
3. Z řetězců, které jsme spočítali, vybereme vektory, které *nejsou* v $\text{Ker } N^{m-2}$ (na obrázku výše jsou to zakřížkovaná políčka). Pokud je těchto vektorů méně než $\dim \text{Ker } N^m - \dim \text{Ker } N^{m-2}$, doplníme je vektory z $\text{Ker } N^m \setminus \text{Ker } N^{m-2}$ na tento počet a dbáme, aby celá množina byla lineárně nezávislá. Nové vektory jsou počáteční vektory řetězců délky $m - 1$.

⁷⁶Tento postup má v obecném případě určitou nevýhodu. Když vytvoříme nový řetězec, musíme se přesvědčit, že je lineárně nezávislý s předchozími řetězci, neboli, že koncové vektory (vpravo) všech již vytvořených řetězců jsou nezávislé. Pokud tomu tak není, musíme poslední řetězec vyřadit a zkusit jiný.

4. K novým vektorům (počátečním vektorům řetězců délky $m-1$) dopočítáme řetězce. Pokud budou vektory na pravých koncích všech doposud spočítaných řetězců závislé, musíme bod 3 opakovat (doplnit vektory jinak).
5. Pokračujeme (opakujeme body 3 a 4), až získáme n lineárně nezávislých vektorů, tedy bázi celého $\text{Ker } N^m = \mathbb{R}^n$.

Jak dopadne tento postup z našim případě? Nejdelsí řetězec má délku $m = 3$, hledáme tedy nejprve⁷⁷ $4 - 3 = 1$ vektor z $\text{Ker } A^3 \setminus \text{Ker } A^2$. Zvolíme například náhodně $\mathbf{a}_4 = (1, 0, 0, 0)^T \in \text{Ker } A^3 = \mathbb{R}^4$ a jelikož $A^2 \mathbf{a}_4 = (1, -1, -1, 1)^T \neq 0$, je tato volba možná (bod 1). Tento vektor doplníme na celý řetězec: $\mathbf{a}_3 = A \mathbf{a}_4 = (2, -1, 0, 0)^T$ a $\mathbf{a}_1 = A \mathbf{a}_3 = (1, -1, -1, 1)^T$. Jelikož je řetězec jen jeden, problémy s ověřováním lineární nezávislosti nejsou (bod 2). V schématu žádné řetězce délky dva nejsou, tedy body 3 a 4 odpadají; podrobněji: ze spočítaného řetězce vybereme vektory $\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_1$ (\mathbf{a}_1 leží v $\text{Ker } A^1$) a zjistíme, že je jich skutečně $\dim \text{Ker } A^3 - \dim \text{Ker } A^1 = 2$ (bod 3).

Konečně (bod 5, nebo taky opakovaný bod 3) potřebujeme doplnit řetězec $\mathbf{a}_4 \rightarrow \mathbf{a}_3 \rightarrow \mathbf{a}_1 \rightarrow 0$ počátečními vektory všech řetězců délky jedna, a to tak, aby byly všechny vektory nezávislé (opakovaný bod 4). Stačí tedy nalézt libovolný vektor z $\text{Ker } A$ lineárně nezávislý na \mathbf{a}_1 . Buď můžeme vyřešit soustavu $A \mathbf{a}_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_2)_1 \\ (\mathbf{a}_2)_2 \\ (\mathbf{a}_2)_3 \\ (\mathbf{a}_2)_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a vybrat vhodné řešení (tedy řešení nezávislé na \mathbf{a}_1), nebo můžeme vektor elegantně uhadnout. V našem případě se nabízí vektor $\mathbf{a}_2 = (-1, -1, 0, 1)^T$.

Vektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_2$ zapíšeme do sloupců matice Q (viz příklad 4.9 či 15.4), a tedy pro

$$Q = \left((\mathbf{a}_1), (\mathbf{a}_3), (\mathbf{a}_4), (\mathbf{a}_2) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⁷⁷ $\dim \text{Ker } A^2 = 3, \dim \text{Ker } A^3 = 4$

bude platit $A = QJ_AQ^{-1}$.

*PK,KV

15.4 Jordanův tvar poprvé

Úkol: Najděte Jordanův tvar matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a matici C , která převádí A na Jordanův tvar J_A .

Řešení: Abychom zjistili, jaký je Jordanův tvar matice A , potřebujeme nejdříve najít vlastní čísla A . Vlastní čísla jsou kořeny charakteristické rovnice:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4 - \lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+3} (2 - \lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (2 - \lambda) ((\lambda - 4)\lambda + 4) = -(\lambda - 2)^3. \end{aligned}$$

Našli jsme trojnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2,3} = 2$. Na diagonále J_A bude proto všude číslo 2.

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 \diamond 0 \\ 0 2 \diamond \\ 0 0 2 \end{pmatrix},$$

kde místo každého ze symbolů \diamond může být buď jednička nebo nula. Všimněme si, že oba prvky \diamond nemohou být nula, protože pak by byla J_A násobkem I , a tedy $QJ_AQ^{-1} = J_A$, což není totéž co A . Abychom rozhodli otázku, co napsat za \diamond , prozkoumáme strukturu kořenového podprostoru.

Matice $A - 2I$ má jediné vlastní číslo a to nulu, a tudíž je *nilpotentní*. Můžeme na ní tedy použít celý aparát popsaný v příkladu 15.3. Budeme tedy zkoumat prostory $\text{Ker}(A - \lambda I)^j \stackrel{\text{df}}{=} \text{Ker}_\lambda^j$, přičemž $\lambda = 2$. Připomínáme, že platí

$$0 < \dim \text{Ker}_\lambda^1 < \dots < \dim \text{Ker}_\lambda^m = \dim \text{Ker}_\lambda^{m+1} = \dots, \quad (120)$$

kde m je délka nejdelšího řetězce Jordanovy báze. Prostor $\text{Ker } \lambda^m = \text{Ker } \lambda^{m+1} = \dots$ nazýváme *kořenovým prostorem* vlastního čísla λ (značíme $\text{Ker } \lambda$) a jeho dimenze je obecně⁷⁸ rovna násobnosti tohoto vlastního čísla (toto tvrzení z příkladu 15.3 přímo neplyne; zmíníme se o něm v příkladu 15.8). V případě jediného vlastního čísla je tedy dimenze kořenového prostoru rovna dimenzi celého prostoru (toto již z 15.3 plyne).

Víme, že $\dim \text{Ker } \lambda^i = n - h[(A - \lambda)^i]$, kde n je rozměr matice A . Spočtěme tedy

$$(A - 2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \text{Ker } \frac{1}{2} = 3 - 1 = 2$$

$$(A - 2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \text{Ker } \frac{2}{2} = 3 - 0 = 3$$

Výpočet $\dim \text{Ker } (A - 2)^2$ jsme si mohli klidně ušetřit, protože pokud jsme zjistili, že $\dim \text{Ker } \frac{1}{2} = 2 < 3$, pak musí být v souladu s (120) $\dim \text{Ker } \frac{1}{2} < \dim \text{Ker } \frac{2}{2}$, a tedy nutně $\dim \text{Ker } \frac{2}{2} = 3$.

Nyní již známe dimenze $\text{Ker } \lambda^i$ a můžeme určit schéma Jordanovy báze, tedy schéma typu (118). Z $\dim \text{Ker } \frac{1}{2} = 2$ plyne, že existují dva řetězce. Jeden tedy musí mít délku jedna a jeden délku dva (aby byl součet délek tři). Lze to také vydedukovat z toho, že $\dim \text{Ker } \frac{2}{2} - \dim \text{Ker } \frac{1}{2} = 1$, neboli existuje jeden řetězec délky aspoň dva.

$$\begin{array}{l} v \xrightarrow{A-2} (A-2)v \xrightarrow{A-2} 0 \\ u \xrightarrow{A-2} 0 \end{array} \quad (121)$$

a Jordanův tvar matice A (tedy matice zobrazení⁷⁹ ϕ_A v bázi $\{(A-2)v, v, u\}$) je následující

$$J_A = J_{A-2} + J_2 = J_{A-2} + 2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Při úpravách na začátku jsme využili $J_A = CAC^{-1}$, $C(X+Y)C^{-1} = CXC^{-1} + CYC^{-1}$ a $C \cdot C^{-1} = I$.

⁷⁸I u matic s více vlastními čísly, kde $A - \lambda$ není nilpotentní.

⁷⁹Zobrazení, jenž má v kanonické bázi matici A .

Zbývá najít matici C , která převádí matici A na Jordanův tvar J_A , neboli matici splňující $J_A = C^{-1}AC$. Matice C tedy musí vektor ve složkách vůči Jordanově bázi převést na vektor ve složkách vůči kanonické bázi. Ve sloupcích matice C tedy budou postupně vektory $(A - 2I)v$, v a u v tomto pořadí (viz příklad 4.9).

Najděme konkrétní vektory v a u pro schéma (121). Jinak: hledáme vektor u , který je po prvním násobení maticí $(A - 2I)$ roven nulovému vektoru a vektor v , který je po prvním násobení touto maticí různý od nulového vektoru. Přitom musí být vektory u a $(A - 2I)v$ lineárně nezávislé.

Za vektor v vybereme třeba $(0, 0, 1)^T$ a ověříme, zda $(A - 2I)v \neq 0$. Bohužel jsme vybrali špatný vektor, protože tato podmínka není splněna. Nevadí, zkusme zvolit $v = (0, 1, 0)^T$. Nyní je $(A - 2I)v = (1, 2, 1)^T$, což nám již vyhovuje. Vektor u vybereme jako řešení rovnice $(A - 2I)u = 0$ a dáváme jen pozor, abychom nevybrali nějaký násobek $(A - 2I)v$; můžeme vzít například $u = (1, 2, 0)^T$. Můžeme tedy napsat celou matici C a s ohledem na milovníky násobení matic, kteří si budou chtít ověřit $CJ_AC^{-1} = A$, ji uvádíme i s její inverzí

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*VP

15.5 Jordanův tvar podruhé

Úkol: Najděte Jordanův tvar matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

a matici C , která převádí A na Jordanův tvar J_A .

Řešení: Spočítáme vlastní čísla matice A . Charakteristická rovnice je

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6 - \lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8 - \lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 1)^3.$$

Máme trojnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2,3} = 1$, což znamená, že Jordanův tvar matice A bude

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 \diamond 0 \\ 0 \ 1 \diamond \\ 0 \ 0 \ 1 \end{pmatrix},$$

kde každý symbol \diamond může být jednička nebo nula. Co máme napsat nad diagonálu, budeme vědět, až zjistíme, jaká je struktura kořenového podprostoru.

$$h(A - \cdot) = \dim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \dim \text{Ker}_1^1 = 3 - 2 = 1.$$

Hodnost matice $A - \cdot$ jsme zkušeně odhadli: nemůže být tři, neboť $\det(A - \cdot) = 0$, ale nemůže být také jedna, neboť to by musely být všechny řádky násobkem jednoho, což nejsou. Jinak můžeme samozřejmě matici také gaussovsky eliminovat. Dále prozkoumáme $(A - \cdot)^2$.

$$\dim (A - \cdot)^2 = \dim \begin{pmatrix} 3 & 9 & -18 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \dim \text{Ker}_1^2 = 3 - 1 = 2$$

I zde jsme mohli postupovat rychleji, bez počítání celé matice $(A - \cdot)^2$. Podle (120) musí být $\dim \text{Ker}_1^2 > \dim \text{Ker}_1^1$, tedy $h((A - \cdot)^2) < h(A - \cdot)$, čili $h((A - \cdot)^2)$ je buď jedna nebo nula. Začneme-li počítat matici $(A - \cdot)^2$ a zjistíme-li, že už prvek v jejím levém horním rohu je nenulový, musí být nutně $h((A - \cdot)^2) = 1$.

Vzhledem k (120) je nyní jisté, že bude $\dim \text{Ker}_1^3 = 3$. Jordanovu bázi proto můžeme schématicky zapsat

$$v \xrightarrow{A-\cdot} (A - \cdot)v \xrightarrow{A-\cdot} (A - \cdot)^2v \xrightarrow{A-\cdot} 0.$$

Připomínáme, že i v tomto (jednořádkovém) schématu je v prvním sloupci vpravo $\dim \text{Ker}_1^1 = 1$ vektor, ve druhém sloupci zprava je $\dim \text{Ker}_1^2 - \dim \text{Ker}_1^1 = 1$ vektor a konečně ve sloupci nejvíce vlevo je také $\dim \text{Ker}_1^3 - \dim \text{Ker}_1^2 = 1$ vektor.

V tabulce je jeden řetězec délky tři, a proto je Jordanův tvar matice A

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice C bude mít ve sloupcích vektory $(A - \cdot)^2 v$, $(A - \cdot)^1 v$ a v , přičemž vektor v musí být z $\text{Ker}_1^3 \setminus \text{Ker}_1^2$. Zvolíme jej proto libovolně z $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}_1^3$ a zkontrolujeme, zda $(A - \cdot)^2 v \neq 0$. Zkusme to třeba s $v = (1, 0, 0)^T$: snadno dopočítáme $(A - \cdot)v = (0, -2, -1)^T$ a $(A - \cdot)^2 v = (A - \cdot)(0, -2, -1)^T = (3, 1, 1)^T$ a vidíme, že jsme zvolili správně. Pro matici C a C^{-1} (inverzi uvádíme pouze pro kontrolu) pak máme

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

*VP

15.6 Jordanův tvar potřetí

Úkol: Najděte Jordanův tvar matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

a matici C , která převádí A na Jordanův tvar J_A .

Řešení: Charakteristická rovnice matice A je

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 - \lambda & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 - \lambda & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{3+3} (1 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6 - \lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^4. \end{aligned}$$

Matice A má čtyřnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2,3,4} = 1$. Dimenze Ker_λ^j jsou

$$h(A - \cdot) = h \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \dim \text{Ker}_1^1 = 4 - 2 = 2$$

$$h((A - \cdot)^2) = h \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \dim \text{Ker}_1^2 = 4 - 1 = 3$$

Podobně jako v příkladu 15.5 nám stačilo při počítání $(A - \cdot)^2$ najít jediný nenulový element, abychom mohli s jistotou říci, že je hodnota této matice jedna.

Dimenze posledního podprostoru Ker_1^3 je automaticky rovna čtyřem a Jordanova báze má strukturu

$$\begin{array}{c} \mathbf{v} \xrightarrow{A-\cdot} (A - \cdot)^1 \mathbf{v} \xrightarrow{A-\cdot} (A - \cdot)^2 \mathbf{v} \xrightarrow{A-\cdot} \mathbf{0} \\ \mathbf{u} \xrightarrow{A-\cdot} \mathbf{0} \end{array} \quad (122)$$

Vidíme tedy jeden řetězec délky tři a jeden řetězec délky jedna. Jordanův tvar matice A je proto

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a zbývá naplnit strukturní tabulku (122) odpovídajícími vektory, abychom mohli sestavit matici C .

Matice C bude mít ve sloupcích po řadě vektory $(A - \cdot)^2 \mathbf{v}$, $(A - \cdot)^1 \mathbf{v}$, \mathbf{v} a \mathbf{u} . Vektor \mathbf{v} zvolíme libovolně z Ker_1^3 , musí ale splňovat podmínku $(A - \cdot)^2 \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Vektor \mathbf{u} je třeba vybrat tak, aby $(A - \cdot) \mathbf{u} = \mathbf{0}$ a aby byl nezávislý na $(A - \cdot)^2 \mathbf{v}$.

Zvolíme-li například $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 0)^T$, zjistíme, že $(A - \cdot) \mathbf{v} = (0, -2, 0, -1)^T$ a $(A - \cdot)^2 \mathbf{v} = (3, 1, 3, 1)^T \neq \mathbf{0}$, jak má být. Pak už jen najdeme druhý vlastní vektor matice A , který není násobkem

$(3, 1, 3, 1)^T$, například $u = (3, 1, 0, 1)^T$, a jsme hotovi. Matice C a matice C^{-1} k ní inverzní jsou

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

*VP

15.7 Jordanův tvar počtvrté

Úkol: Najděte Jordanův tvar matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a matici C , která ji převádí na Jordanův tvar J_A .

Řešení: Při určování charakteristického polynomu matice A využijeme toho, že je v blokově dolním trojúhelníkovém tvaru (viz příklad 9.5c).

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda) &= \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 - \lambda & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ 3 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)^4. \end{aligned}$$

Máme tedy čtyřnásobné vlastní číslo $\lambda_{1,2,3,4} = 2$ a musíme zkoumat strukturu kořenového podprostoru $\text{Ker } 2$. Dimenze jednotlivých podprostorů $\text{Ker } 2^i$ jsou po řadě

$$h(A - 2) = h \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \dim \text{Ker } 2^1 = 4 - 2 = 2$$

$$h((A - 2I)^2) = h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \dim \text{Ker } \frac{A}{2} = 4 - 0 = 4$$

a struktura Jordanovy báze je tedy

$$\begin{array}{l} v \xrightarrow{A-2I} (A-2I)v \xrightarrow{A-2I} 0 \\ u \xrightarrow{A-2I} (A-2I)u \xrightarrow{A-2I} 0. \end{array} \quad (123)$$

V této tabulce jsou dva řetězce délky dva, neboli Jordanův tvar matice A je

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zbývá osadit tabulku (123) konkrétními vektory, abychom zjistili, jak bude vypadat transformační matice C . Za vektory v, u můžeme zvolit dva libovolné prvky z $\text{Ker } \frac{A}{2} \setminus \text{Ker } \frac{A}{4}$, opět zvolíme dva jakékoliv vektory z \mathbb{R}^4 a ověříme, že se maticí $(A - 2I)$ nezobrazí na nulu. V tomto případě ale ještě nemáme vyhráno: musíme také hlídat, aby nebyly vektory $(A - 2I)v, (A - 2I)u$ závislé (viz bod 2 v postupu pro hledání vektorů Jordanovy báze, příklad 15.3). To se přesně stane například pro $v = (0, 0, 0, 1)^T$ a $u = (0, 0, 1, 0)^T$. Zvolíme proto jiné dva vektory, například $v = (0, 1, 0, 0)^T$ a $u = (0, 0, 1, 0)^T$, napíšeme $(A - 2I)v, v, (A - 2I)u, u$ do sloupců matice C a pustíme se do dalšího příkladu.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

*VP

15.8 Jordanův tvar naposledy

Úkol: Najděte Jordanův tvar matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

a matici C , která ji převádí na Jordanův tvar J_A .

Řešení: Nejdříve najdeme vlastní čísla matice A . Charakteristická rovnice je

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7 - \lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7 - \lambda \end{pmatrix} = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 3).$$

Máme jedno jednonásobné vlastní číslo $\lambda_1 = 3$ a jedno dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{2,3} = -1$. Toto je o trochu složitější situace, než s jakou jsme se setkali v příkladech (15.3–15.7). Použijeme nyní větu, která říká:

Je-li ϕ lineární zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, pak pro každé vlastní číslo λ je

$$\dim \text{Ker}(\phi - \lambda \text{Id}) < \dim \text{Ker}(\phi - \lambda \text{Id})^2 < \dots$$

$$\dots < \dim \text{Ker}(\phi - \lambda \text{Id})^m = \dim \text{Ker}(\phi - \lambda \text{Id})^{m+1} = \dots,$$

přičemž $\dim \text{Ker}(\phi - \lambda \text{Id})^m$ je rovno n_λ , násobnosti čísla λ . Pro libovolné $\lambda \neq \lambda'$ tvoří průnik prostorů $\text{Ker}(\phi - \lambda \text{Id})^j$ a $\text{Ker}(\phi - \lambda' \text{Id})^{j'}$ pouze nulový vektor.

Prostory $\text{Ker}(\phi - \lambda \text{Id})^j$ budeme opět značit Ker_λ^j , prostor $V_\lambda = \text{Ker}_\lambda^m$ se nazývá kořenovým prostorem vlastního čísla λ . Nezávislost kořenových prostorů pro různá vlastní čísla znamená, že

$$\dim \mathcal{L} \left(\bigcup_{\lambda} V_{\lambda} \right) = \sum_{\lambda} \dim V_{\lambda} = \sum_{\lambda} n_{\lambda} = n,$$

neboli že bázi celého prostoru lze poskládat z bází kořenových podprostorů. Restrikce $\phi - \lambda \text{Id} \big|_{V_{\lambda}}$ (tedy $\phi - \lambda \text{Id}$ jako zobrazení $V_{\lambda} \rightarrow V_{\lambda}$)

má ale jediné vlastní číslo, a to nulu, a proto lze bázi kořenového podprostoru najít tak, jak jsme to dělali u nilpotentních zobrazení.

Co to bude znamenat v praxi: Nejprve se budeme zabývat vlastním číslem $\lambda_1 = 3$. U jednonásobných vlastních čísel nemáme žádné problémy, kořenový prostor $V_3 = \text{Ker}(A - 3 \cdot)$ je jedno-rozměrný. Najdeme vlastní vektor k číslu λ_1 , například $u = (1, 2, 2)^T$, a jsme hotovi.

U dvojnásobného vlastního čísla $\lambda_{2,3} = -1$ to bude obtížnější. Musíme určit $\dim \text{Ker}_{-1}^1$ a $\dim \text{Ker}_{-1}^2$.

$$h(A + \cdot) = h \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \dim \text{Ker}_{-1}^1 = 3 - 2 = 1$$

$$h((A + \cdot)^2) = h \begin{pmatrix} 16 & -16 & 16 \\ 32 & -32 & 32 \\ 32 & -32 & 32 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \dim \text{Ker}_{-1}^2 = 3 - 1 = 2$$

Výpočet hodnoty $(A + \cdot)^2$ jsme si podobně jako v příkladě 15.4 ušetřili, neboť z $\dim \text{Ker}_{-1}^1 = 1 < 2$ plyne $\dim \text{Ker}_{-1}^2 > \dim \text{Ker}_{-1}^1$ a přitom je dimenze všech $\dim \text{Ker}_{-1}^j$ nejvýše dva.

Jordanova báze pro dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_{2,3} = -1$ se tedy skládá z jediného řetězce

$$v \xrightarrow{A+} (A + \cdot)v \xrightarrow{A+} 0.$$

Jordanův tvar matice A , neboli matice příslušného zobrazení v bázi $(A + \cdot)v, v, u$, je proto

$$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Abychom získali matici přechodu do Jordanovy báze, potřebujeme najít ještě vektor v . Ten má být z kořenového prostoru čísla $\lambda = -1$, tedy z Ker_{-1}^2 a navíc musí být $(A + \cdot)v = w \neq 0$. Řetězec budeme nyní doplňovat zprava: najdeme nejprve řešení rovnice $(A + \cdot)w = 0$, například $w = (1, 2, 1)^T$, a potom nalezneme v pomocí $(A + \cdot)v = w$; dostaneme $v = \frac{1}{3}(-1, 1, 2)^T$. Chceme-li se vyhnout zlomkům, můžeme samozřejmě (oba) tyto vektory násobit třemi.

Jiná možnost je najít nějaké řešení $(A + \cdot)^2 v = 0$ a dopočítat $(A + \cdot)v = w$. Vektory w, v, u pak zapíšeme do sloupců matice C

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a zájemci mohou ověřit, že skutečně platí $CJ_A C^{-1} = A$. *VP

15.9 Jsou si ty matice opravdu podobné?

Úkol: Jsou dány matice A a B

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 24 & -11 & -22 \\ 20 & -8 & -20 \\ 12 & -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že jsou si tyto matice podobné a nalezněte matici C tak, aby $B = CAC^{-1}$.

Řešení: Napřed připomeňme, že podobné matice mají stejné charakteristické polynomy (tedy stejná spektra σ včetně násobností). To nám dává několik rychlých způsobů, jak zkontrolovat, zda dvě zadané matice *mohou* být podobné; stejně jako rovnost charakteristických polynomů to ale jsou pouze nutné podmínky podobnosti.

$$A \sim B \Rightarrow \operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B \wedge \det A = \det B \wedge \sigma(A) = \sigma(B).$$

Každá matice X je podobná nějaké matici J_X blokově diagonálního tvaru s Jordanovými bloky na diagonále. Protože je tento Jordanův kanonický tvar J_X určen až na pořadí jednotlivých bloků jednoznačně, je zřejmé, že

$$A \sim B \Leftrightarrow J_A = J_B,$$

pokud konstruujeme Jordanův tvar například tak, že bloky řadíme sestupně podle vlastních čísel a v rámci jednotlivých vlastních čísel sestupně podle délky řetězců.

Úkol tedy vyřešíme tak, že najdeme Jordanovy tvary matic A a B a ověříme, že jsou stejné ($J_A = J_B$). Potom najdeme převodní

matice C_A, C_B ,

$$A = C_A J_A C_A^{-1}, \quad B = C_B J_B C_B^{-1},$$

z nichž vypočítáme $C_B \cdot (C_A^{-1} \cdot A \cdot C_A) \cdot C_B^{-1} = B$. Protože pro dvě regulární matice X a Y platí $(X \cdot Y^{-1})^{-1} = Y \cdot X^{-1}$, bude matice $C = C_B \cdot C_A^{-1}$ splňovat žádaný předpis $B = C \cdot A \cdot C^{-1}$.

Označme α a β zobrazení $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, která mají v kanonické bázi matice A, B . Charakteristické polynomy těchto zobrazení jsou nezávislé na volbě báze, a lze je tudíž počítat v kanonické bázi jako $\det(A - \lambda \cdot \text{Id})$ a $\det(B - \lambda \cdot \text{Id})$. Podle očekávání vyjdou polynomy stejně, a to

$$\chi_\alpha(\lambda) = \chi_\beta(\lambda) = \lambda^3 - 6 \cdot \lambda^2 + 12 \cdot \lambda - 8 = (\lambda - 2)^3.$$

Dále vyšetříme strukturu nilpotentních zobrazení $\alpha_2 = \alpha - 2 \cdot \text{Id}$ resp. $\beta_2 = \beta - 2 \cdot \text{Id}$. V kanonické bázi mají tato zobrazení tvar

$$A_2 = A - 2 \cdot \text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = B - 2 \cdot \text{Id} = \begin{pmatrix} 22 & -11 & -22 \\ 20 & -10 & -20 \\ 12 & -6 & -12 \end{pmatrix},$$

zobrazení Id odpovídá v libovolné bázi vždy jednotková matice. Ihned vidíme, že $h(A_2) = h(B_2) = 1$, tedy $\dim \text{Ker}(\alpha - 2 \text{Id}) = \dim \text{Ker}(\beta - 2 \text{Id}) = 2$. Jelikož jsou tyto dimenze menší než dimenze celého prostoru, musí být $\dim \text{Ker}(\alpha - 2 \text{Id})^2 > \dim \text{Ker}(\alpha - 2 \text{Id})$, a tedy $\dim \text{Ker}(\alpha - 2 \text{Id})^2 = 3$. Stejně to platí i pro β .

Struktura obou zobrazení bude tedy stejná

$$\alpha : \begin{array}{l} v_3 \rightarrow v_1 \rightarrow 0 \\ v_2 \rightarrow 0 \end{array}, \quad \beta : \begin{array}{l} v_6 \rightarrow v_4 \rightarrow 0 \\ v_5 \rightarrow 0 \end{array},$$

kde šipka \rightarrow znamená působení zobrazení $\alpha - 2 \text{Id}$ (v levé tabulce), resp. $\beta - 2 \text{Id}$ (v pravé tabulce). Matice zobrazení α v bázi v_1, v_3, v_2 a matice zobrazení β v bázi v_4, v_6, v_5 budou stejné

$$J = J_A = J_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Toto je pěkná ukáзка skutečnosti, že dvě podobné matice popisují totéž zobrazení, pouze vzhledem k různým bázím.

Vypočtíme konečně matici C , která zprostředkuje podobnostní transformaci (srovnejte s příkladem 15.4). Volíme-li například $v_3 = v_6 = (1, 0, 0)^T$ jako počáteční vektory řetězců délky dva, pak $v_1 = (A - 2) v_3 = (1, 2, 3)^T$ a $v_4 = (B - 2) v_6 = (22, 20, 12)^T$. Dále se přímo nabízí $v_2 = (2, 1, 0)^T$ a $v_5 = (1, 2, 0)^T$, hlídali jsme přitom, aby byly vektory v_2, v_1 a v_5, v_4 nezávislé. Nyní už jen poskládáme tyto vektory do matic

$$C_A = \left((v_1) (v_3) (v_2) \right), \quad C_B = \left((v_4) (v_6) (v_5) \right)$$

a dopočítáme $C = C_B C_A^{-1}$, což je matice, která splňuje $B = C A C^{-1}$. Číselně vyjde

$$C_A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{23}{3} \\ 0 & 2 & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

*PK,KV

16 Ortogonální funkce a trochu kvantové mechaniky

16.1 Ortogonální polynomy

Ve skriptech [PLA] najdeme několik zajímavých příkladů ortogonálních systémů polynomů. Víceméně se vždy jedná o ortogonalizaci báze $1, x, x^2, \dots$ vůči vhodnému *skalárnímu součinu*

$$(f \cdot g) = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x) dx \quad (124)$$

s váhou $\rho(x)$. Podíváme se teď trochu podrobněji na některé obecné vlastnosti ortogonálních polynomů. Místo skalárního součinu (124) je vhodnější uvažovat *momentový funkcionál*

$$\mathcal{L}[f] = \int_a^b f(x)\rho(x) dx$$

jakožto lineární zobrazení na našem prostoru polynomů. Potom je ovšem $(f \cdot g) = \mathcal{L}[f(x)g(x)]$. Výhoda momentového funkcionálu je v tom, že je již jednoznačně určen posloupností čísel $\mu_n = \mathcal{L}[x^n]$. Pro libovolný polynom $P(x) = \sum a_k x^k$ je potom díky linearitě

$$\mathcal{L}[P(x)] = \sum a_k \mu_k. \quad (125)$$

Zapomeňme teď na naše původní odvození funkcionálu \mathcal{L} pomocí skalárního součinu s váhou $\rho(x)$ a zaveďme jej abstraktně tak, že zadáme (komplexní) čísla μ_n a působení na komplexní polynom reálné proměnné $P(x)$ definujeme pomocí (125).

O *systému polynomů* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ řekneme, že je *ortogonální* (krátce OPS) vůči \mathcal{L} , jestliže P_n je polynom stupně n , pro $m \neq n$ platí $\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0$ a navíc $\mathcal{L}[P_n^2(x)] \neq 0$.

Úkol:

- a) Na \mathcal{L} se ovšem nepřenášejí všechny vlastnosti skalárního součinu. Může se stát, že k danému funkcionálu \mathcal{L} neexistuje OPS. Naopak k danému systému polynomů $\{P_n(x)\}$ (P_n je polynom stupně n) nemusí existovat takové \mathcal{L} , ve kterém je systém ortogonální. Najděte příklady!

- b) Dokažte následující jednoduchou vlastnost OPS, kterou budeme ještě potřebovat: systém $\{P_n(x)\}$ je OPS vůči \mathcal{L} , právě když

$$\forall n, \forall m \leq n : \mathcal{L}[x^m P_n(x)] = K_n \delta_{mn}, \quad K_n \neq 0. \quad (126)$$

Řešení:

- a) Za prvé vezměme třeba polynomy stupně max. 1, kde položíme $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$. Nechť existuje OPS sestávající z polynomů

$$P_0(x) = a, \quad P_1(x) = bx + c, \quad a, b \neq 0.$$

Potom mají být nenulová čísla $\mathcal{L}[P_0^2] = a^2$ a $\mathcal{L}[P_1^2] = (b+c)^2$ a zároveň má být $0 = \mathcal{L}[P_0 P_1] = a(b+c)$, což zřejmě nemůže nastat současně.

Ve druhém případě vezměme ten nejjednodušší příklad, co existuje: systém $1, x, x^2, \dots$. Jistě nemůže zároveň platit $\mathcal{L}[1 \cdot x^2] = 0$ a $\mathcal{L}[x \cdot x] \neq 0$.

- b) Pro $m < n$ plyne tvrzení z toho, že systém $\{P_m(x)\}_{m=0}^{n-1}$ tvoří bázi na prostoru polynomů stupně nejvýše $n-1$, a tedy lze $x^m, m < n$ napsat jako lineární kombinaci $P_0(x), \dots, P_{n-1}(x)$, což jsou všechno polynomy ortogonální na $P_n(x)$. Dále podle předchozí úvahy platí $\mathcal{L}[P_n^2(x)] = \mathcal{L}[P_n(x)a_n x^n]$, kde a_n je koeficient u x^n v $P_n(x)$, a tedy musí být $\mathcal{L}[P_n(x)x^n] \neq 0$.

□

Díky ortogonalitě vůči \mathcal{L} naštěstí zůstávají zachovány jiné příjemné vlastnosti OPS, jako třeba ta, že pro libovolný polynom $\pi(x)$ stupně n existují koeficienty c_k , že $\pi(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x)$, přičemž zřejmě

$$c_k = \frac{\mathcal{L}[\pi(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_k^2(x)]}.$$

Úkol: Ukažte, že pro dané \mathcal{L} je OPS $\{P_n(x)\}$ už jednoznačně určen konstantami $K_n = \mathcal{L}[x^n P_n(x)]$.

Řešení: Nechť $\{P_n(x)\}$ a $\{Q_n(x)\}$ jsou dva různé OPS vůči \mathcal{L} . Pak díky (126) platí $\mathcal{L}[Q_k(x)P_n(x)] = 0$ pro $k < n$. Zároveň ale podle

předchozího můžeme rozvinout

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k Q_k(x), \quad c_k = \frac{\mathcal{L}[P_n(x)Q_k(x)]}{\mathcal{L}[Q_k^2(x)]}.$$

Pro $k < n$ jsou tedy všechna c_k nulová, neboli $P_n(x) = c_n Q_n(x)$. Pokud ale má platit $K_n = \mathcal{L}[P_n(x)x^n] = \mathcal{L}[c_n Q_n(x)x^n]$ a $K_n = \mathcal{L}[Q_n(x)x^n]$, nezbyvá než $c_n = 1$. \square

Z předchozího ovšem ještě neplyne, za jakých podmínek existuje k danému \mathcal{L} aspoň jeden OPS. V tomto směru teď dokážeme jedno zásadní tvrzení.

Úkol: Necht' funkcionál \mathcal{L} je daný čísly μ_n . Položme

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}. \quad (127)$$

Potom existuje OPS vůči \mathcal{L} , právě když $\Delta_n \neq 0$ pro každé $n = 0, 1, 2, \dots$

Řešení: Necht' mají hledané polynomy tvar $P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{nk} x^k$. Podmínku (126), aby tvořily OPS, napíšeme do matic

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n0} \\ c_{n1} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}.$$

Jsou-li determinanty Δ_n nenulové, pak má tato soustava rovnic jisté řešení. Naopak, víme-li, že existuje řešení, pak je toto řešení podle předchozího úkolu už jednoznačně dáno sadou čísel K_n , a tedy musí mít soustava (pro každé n) právě jedno řešení, což nastane pouze pro $\Delta_n \neq 0$. Z Cramerova pravidla dostaneme navíc jednoduchý důsledek (determinant v čitateli rozvíjíme podle posledního sloupce)

$$c_{nn} = K_n \cdot \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}. \quad (128)$$

Úkol: Dokažte, že pokud $\forall n$ je $\Delta_n \neq 0$ (rovnice 127), pak můžeme následující konstrukcí explicitně sestrojít (jeden z možných) OPS

$$P_n(x) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}. \quad (129)$$

Řešení: Je to jednoduché: ukážeme, že polynomy (129) splňují podmínku (126).

Determinant (129) rozvineme podle posledního řádku, čímž dostaneme přímo koeficienty u jednotlivých mocnin x . Tento polynom vynásobíme x^m a zapůsobíme na to \mathcal{L} . Tam, kde bylo v původním polynomu x^j ($0 \leq j \leq n$), bude teď $\mathcal{L}[x^{j+m}] = \mu_{j+m}$. Nyní vše zpátky poskládáme do determinantu a dostaneme

$$\mathcal{L}[x^m P_n(x)] = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n} \end{vmatrix},$$

což evidentně vyhovuje (126): pro $m < n$ je determinant nula (opakují se v něm dva řádky), pro $m = n$ je to $\mathcal{L}[x^m P_n(x)] = \Delta_n \neq 0$.

□

Úkol: To nejzajímavější nakonec. Necht' $\{P_n(x)\}$ je takový OPS vůči \mathcal{L} , že koeficient u nejvyšší mocniny x je vždy 1. Ukažte, že potom existují konstanty c_n a $\lambda_n \neq 0$, že

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (130)$$

když klademe $P_{-1}(x) = 0$.

Řešení: Polynom $xP_{n-1}(x)$ lze jako každý polynom stupně n rozvinout

$$xP_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x),$$

přičemž $a_k = \mathcal{L}[xP_{n-1}(x)P_k(x)]/\mathcal{L}[P_k^2(x)]$. Z (126) ovšem plyne, že $a_k = 0$ pro $k + 1 < n - 1$, tedy když je stupeň $xP_k(x)$ menší než stupeň $P_{n-1}(x)$. Rozvoj má tudíž jenom tři členy

$$xP_{n-1}(x) = P_n(x) + a_{n-1}P_{n-1}(x) + a_{n-2}P_{n-2}(x),$$

koeficient u $P_n(x)$ je jedna díky tomu, že koeficienty u nejvyšších mocnin v $P_n(x)$ i $xP_{n-1}(x)$ jsou jedna. Menší úpravou a přeznačením konstant dostaneme výsledek

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x). \quad (131)$$

□

Když poslední rovnost přenásobíme x^{n-2} a zapůsobíme \mathcal{L} , dostaneme pomocí (128) a (126) hezký vzoreček (stále pro OPS s koeficientem jedna u nejvyšší mocniny)

$$0 = \mathcal{L}[x^{n-1}P_{n-1}(x)] - \lambda_n \mathcal{L}[x^{n-2}P_{n-2}(x)] \Rightarrow \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}} = \lambda_n \cdot \frac{\Delta_{n-3}}{\Delta_{n-2}},$$

který umožňuje snadno počítat koeficienty λ_n .

Navíc lze ukázat⁸⁰, že je $c_n = 0$, pokud je funkcionál \mathcal{L} symetrický, tj. pro každou funkci $f(x)$ je $\mathcal{L}[f(x)] = \mathcal{L}[f(-x)]$ (konkrétně třeba když v (124) integrujeme přes interval $\langle -a, a \rangle$ a váha $\rho(x)$ je sudá). Tak je tomu třeba u polynomů Legendreových, Hermiteových, či Čebyševových.

Pokud si budete chtít vyzkoušet, jak funguje vzorec 131 v konkrétních případech, dejte si pozor na to, že ve standardním zápisu některé (co si budeme namlouvat, skoro všechny) polynomy nemají u nejvyšší mocniny x jedničku. Vzorec (130) lze samozřejmě modifikovat i na tento obecnější případ, vedoucí koeficient polynomu $P_n(x)$ označme třeba A_n . Zkuste napřed výše zmíněný jednodušší případ s $c_n = 0$. Snad vám nakonec vyjde

$$\frac{A_n}{A_{n+1}}P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \frac{A_{n-1}}{A_n} \frac{\mathcal{L}[P_n^2(x)]}{\mathcal{L}[P_{n-1}^2(x)]}P_{n-1}(x).$$

⁸⁰Není to složité, pokud dokážete, že každý polynom takového OPS obsahuje buď pouze sudé, nebo pouze liché mocniny.

Abychom mohli odvodit rekurzivní vztah pro zadaný OPS, stačí tedy znát například jenom koeficienty u nejvyšší mocniny a normu jednotlivých polynomů.

Formulky, které jsme odvodili, si můžete ověřit na následujících OPS.

- *Legendreovy polynomy* $P_n(x)$:

$$A_n = \binom{2n}{n} 2^{-n} = (2n-1)! / (2^{n-1} n! (n-1)!), \quad \mathcal{L}[(P_n(x))^2] = 1 / (n + \frac{1}{2}),$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \\ P_0(x) = 1, \quad P_{-1}(x) = 0.$$

Momentový funkcionál: $\mathcal{L}[P(x)] = \int_{-1}^1 P(x) dx$.

- *Hermiteovy polynomy* $H_n(x)$:

$$A_n = 2^n, \quad \mathcal{L}[(H_n(x))^2] = 2^n n! \sqrt{\pi},$$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \\ H_0(x) = 1, \quad H_{-1}(x) = 0.$$

Momentový funkcionál: $\mathcal{L}[P(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{-x^2} dx$.

- *Čebyševovy polynomy* $T_n(x)$:

$$A_n = 2^{n-1}, \quad \mathcal{L}[(T_n(x))^2] = \frac{1}{2} \pi \quad (\text{obojí pro } n \geq 1)$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad T_1(x) = x, \quad T_0(x) = 1.$$

Momentový funkcionál: $\mathcal{L}[P(x)] = \int_{-1}^1 P(x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$.

Již jen ve formě závěrečných poznámek si řekneme další zajímavé vlastnosti funkcionálu \mathcal{L} . Jestliže pro každý polynom $\pi(x) \not\equiv 0$ takový, že $\pi(x) \geq 0$ na zadaném intervalu, platí $\mathcal{L}[\pi(x)] > 0$, řekneme, že \mathcal{L} je *pozitivně definitní*. Pro takový funkcionál můžeme OPS zkonstruovat např. z báze $1, x, x^2, \dots$ pomocí Grammova-Schmidtova ortogonalizačního procesu. Všechny kořeny polynomů $P_n(x)$ z OPS jsou pak reálné a jednoduché a dokonce mezi každými dvěma kořeny $P_n(x)$ leží kořen polynomu následujícího, tj. $P_{n+1}(x)$. *TB

16.2 Variace na kreační operátory

Úkol: Na prostoru všech analytických funkcí $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uvažujte operátory závislé na jednom parametru $n = 0, 1, 2, \dots$ (hamiltoniány částice na přímce s různě hlubokou hladkou jamkou⁸¹)

$$\widehat{H}_n = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{n(n+1)}{2 \cosh^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (132)$$

- Nalezněte nejmenší vlastní číslo \widehat{H}_n a odpovídající vlastní funkci (nazývané „základní stav“). Vlastní funkci nemusíte normalizovat.
- Ukažte, že \widehat{H}_n má přesně n normalizovatelných vlastních funkcí (v řeči fyziků „vázaných stavů“) a vypočtěte jejich energie (vlastní čísla \widehat{H}_n). Můžete použít tvrzení, že vlastní stav tohoto hamiltoniánu je normalizovatelný, resp. nenormalizovatelný, pokud je jeho energie záporná, resp. kladná.
- Dokažte, že \widehat{H}_n má (nenormalizovatelné) vlastní funkce, které se chovají jako $c \exp(ipx)$ jak pro $x \rightarrow \infty$, tak pro $x \rightarrow -\infty$ pro libovolné $p \in \mathbb{R}$. Ve fyzikální řeči tím dokážete, že koeficient odrazu je nulový.

Rada: Definujte tzv. anihilační operátor

$$\widehat{A}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{d}{dx} + n \tanh(x) \right] \quad (133)$$

a nalezněte vztah mezi $\widehat{A}_n \widehat{A}_n^\dagger$, $\widehat{A}_n^\dagger \widehat{A}_n$ a \widehat{H}_n , kde \dagger znamená hermitovské sdružení (viz níže). Ukažte, že působením operátoru \widehat{A}_p^\dagger na vlastní stav operátoru \widehat{H}_q lze dostat vlastní stav \widehat{H}_r , kde p, q, r jsou vhodná čísla.

V příkladu budeme používat pro vektory Diracovu notaci.

⁸¹Operátor tvaru (132) popisuje částici s potenciální energií vyjádřenou funkcí v druhém členu; zde je tedy $E_{pot}(x) = -\frac{1}{2}n(n+1)/\cosh^2 x$.

Řešení: a) Uvědomme si nejdříve, že *sdužený operátor*⁸² \widehat{A}_n^\dagger (tzv. *kreační operátor*) má tvar

$$\widehat{A}_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{d}{dx} + n \tanh x \right] \quad (134)$$

a spočtíme nejprve součin $\widehat{A}_n \widehat{A}_n^\dagger$. Roznásobením dostaneme (s pomocí $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$)

$$\widehat{A}_n \widehat{A}_n^\dagger = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{n^2 \sinh^2 x}{2 \cosh^2 x} + \frac{n}{2} \frac{1}{\cosh^2 x} = \widehat{H}_{n-1} + \frac{n^2}{2},$$

kde člen úměrný $1/\cosh^2 x$ vznikl z komutátoru d/dx a $\tanh x$, obecněji také platí $[d/dx, f(x)] \equiv (d/dx)f(x) - f(x)d/dx = f'(x)$. Zcela analogicky

$$\widehat{A}_n^\dagger \widehat{A}_n = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{n^2 \sinh^2 x}{2 \cosh^2 x} - \frac{n}{2} \frac{1}{\cosh^2 x} = \widehat{H}_n + \frac{n^2}{2}. \quad (135)$$

Základní stav \widehat{H}_n je tedy i základním stavem $\widehat{A}_n^\dagger \widehat{A}_n$. Vlastní čísla $\widehat{A}_n^\dagger \widehat{A}_n$ jsou nezáporná, to plyne z $\langle \psi | \widehat{A}_n^\dagger \widehat{A}_n | \psi \rangle = |\widehat{A}_n | \psi \rangle|^2 \geq 0$, a ukážeme, že je mezi nimi nula: příslušný vlastní stav musí splňovat $\widehat{A}_n | \psi_{n0} \rangle = 0$ (musí být *anihilován* \widehat{A}_n — odtud název operátoru). Tato rovnost dává diferenciální rovnici, z níž lehce spočteme $\psi_{n0}(x)$

$$\frac{d}{dx} \psi_{n0}(x) = -n \frac{\sinh x}{\cosh x} \psi_{n0}(x), \quad \frac{d\psi_{n0}(x)}{\psi_{n0}(x)} = -n \frac{dx \sinh x}{\cosh x}$$

a výsledné řešení, neboli základní stav \widehat{H}_n je tedy

$$\ln \psi_{n0}(x) = -n \ln \cosh(x) + c, \quad \psi_{n0}(x) = K (\cosh x)^{-n},$$

všimněte si rychlé konvergence pro $x \rightarrow \pm\infty$. Příslušná vlastní hodnota \widehat{H}_n je rovna $-n^2/2$ podle (135).

⁸²Sdužený operátor k \widehat{A}_n je ten, který splňuje $\langle \psi | \widehat{A}_n \varphi \rangle = \langle \widehat{A}_n^\dagger \psi | \varphi \rangle$, pro každé dvě (kvadraticky integrabilní) funkce ψ, φ . Přitom $\langle \psi | \varphi \rangle = \int \overline{\psi} \varphi dx$. Že (134) je skutečně sdužený k (132), si ověříme pomocí integrace per partes: $\int ([-d/dx + V] \overline{\psi}) \varphi dx = \int \overline{\psi} [d/dx + V] \varphi dx$, okrajový člen vypadne díky kvadratické integrabilitě ψ, φ (funkce musí v nekonečnu dostatečně rychle klesat, aby integrál kvadrátu vyšel konečný). Označili jsme $V = n \tanh x$.

b) Řídíme-li se radou v zadání a použijeme-li rovnice (135) a (135), dostáváme díky asociativitě

$$\widehat{H}_n \widehat{A}_n^\dagger = (\widehat{A}_n^\dagger \widehat{A}_n - \frac{n^2}{2}) \widehat{A}_n^\dagger = \widehat{A}_n^\dagger (\widehat{H}_{n-1} + \frac{n^2}{2}) - \frac{n^2}{2} \widehat{A}_n^\dagger = \widehat{A}_n^\dagger \widehat{H}_{n-1}. \quad (136)$$

Jinak řečeno,

$$\widehat{A}_n^\dagger \widehat{H}_{n-1} |\psi\rangle = \widehat{H}_n \widehat{A}_n^\dagger |\psi\rangle, \quad (137)$$

působením \widehat{A}_n^\dagger na vlastní stav \widehat{H}_{n-1} získáme vlastní stav \widehat{H}_n se stejným vlastním číslem: pokud je $\widehat{H}_{n-1} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$, pak z (137) plyne $\widehat{H}_n (\widehat{A}_n^\dagger |\psi\rangle) = E (\widehat{A}_n^\dagger |\psi\rangle)$. Hermiteovským sdružením rovnice (136) získáme také identitu

$$\widehat{A}_n \widehat{H}_n = \widehat{H}_{n-1} \widehat{A}_n, \quad (138)$$

kteřá analogicky říká, že působením \widehat{A}_n na vlastní stav \widehat{H}_n získáme vlastní stav \widehat{H}_{n-1} .

Nyní už můžeme sklízet plody. Operátor \widehat{H}_0 popisuje volnou částici, nemá tedy žádné vázané stavy⁸³. Dále víme, že operátor \widehat{H}_n má základní stav, který \widehat{A}_n zobrazí na nulu. Všechny ostatní vázané stavy \widehat{H}_n nám po vynásobení \widehat{A}_n dají (netriviální) vázané stavy \widehat{H}_{n-1} podle (138). To znamená, že \widehat{H}_n má jeden vázaný stav navíc proti \widehat{H}_{n-1} a indukce ihned dává, že \widehat{H}_n má n vázaných stavů.

Základní stav \widehat{H}_n má energii $E = -\frac{1}{2}n^2$, ostatní vlastní stavy \widehat{H}_n mají podle (137) stejné energie jako vlastní stavy \widehat{H}_{n-1} . Tedy (opět třeba indukcí): energie (vlastní čísla) vázaných stavů \widehat{H}_n jsou čísla $-k^2/2$, kde $k = 1, 2, \dots, n$. Tyto vlastní funkce \widehat{H}_n lze explicitně psát jako

$$|\psi_{n,0}\rangle \text{ a } |\psi_{n,n-k}\rangle = \widehat{A}_n^\dagger \widehat{A}_{n-1}^\dagger \dots \widehat{A}_{k+1}^\dagger |\psi_{k0}\rangle, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (139)$$

kde $|\psi_{k0}\rangle$ je základní stav \widehat{H}_k nalezený v rovnici (136). Opakovaně jsme užili rovnice (137).

c) Hamiltonián \widehat{H}_0 má zjevně pouze (nenormalizovatelné) vlastní funkce $\exp(ipx)$ s vlastní hodnotou $p^2/2$ (pro $p > 0$ popisují částici

⁸³Vlastní funkce jistě najdete sami: pokud ne, podívejte se na začátek bodu c.

letící doprava). Zcela analogicky jako v (139) lze získat vlastní funkce \widehat{H}_n :

$$\widetilde{\psi}_{n,p}(x) = \widehat{A}_n^\dagger \widehat{A}_{n-1}^\dagger \dots \widehat{A}_1^\dagger \exp(ipx). \quad (140)$$

Všimněte si, že působením operátoru \widehat{A}_l^\dagger nezměníme asymptotické chování vlnové funkce $\exp(ipx)$ pro $|x| \rightarrow \infty$: jinak řečeno $|\widetilde{\psi}_{n,p}(x)/\exp(ipx)|$, vychází stejně pro $x \rightarrow \infty$ i $x \rightarrow -\infty$. Toto chování znamená, že amplituda vlny letící zleva se po průchodu z $x = -\infty$ do $x = \infty$ nezmenší: koeficient odrazu je tedy zábrakem roven nule pro libovolnou hodnotu hybnosti p . Tuto vlastnost samozřejmě má pouze naše třída hamiltoniánů, nikoliv typické hamiltoniány; nejpodstatnějším předpokladem je $\widehat{A}_1 \widehat{A}_1^\dagger = \widehat{H}_0 + 1/2$, který určuje tvar \widehat{A}_n a \widehat{H}_n jednoznačně. *LM

16.3 (4) symetrie atomu vodíku

Úkol: Nalezněte všechna vlastní čísla hamiltoniánu atomu vodíku ve třech rozměrech

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{\widehat{r}} \quad (141)$$

a degenerace příslušných hladin (tj. dimenze podprostorů odpovídajících danému vlastnímu číslu) pouhým výpočtem komutátorů a součinů různých operátorů, jako například \widehat{H} , momentu hybnosti $\vec{\widehat{L}}$ a tzv. Runge–Lenzova vektoru $\vec{\widehat{A}}$, kde

$$\vec{\widehat{A}} = \frac{1}{m\alpha} \vec{\widehat{L}} \times \vec{\widehat{p}} + \frac{\widehat{x}}{\widehat{r}}, \quad \widehat{L}_i = \varepsilon_{ijk} \widehat{x}_j \widehat{p}_k, \quad (142)$$

tedy nikoliv řešením diferenciální rovnice $\widehat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$.

Návod: Ukažte, že operátory $\widehat{A}_i, \widehat{L}_j, j = 1, 2, 3$ generují Lieovu algebru a přesvědčte se, že jí odpovídá grupa $\mathbb{SO}(4)$. Dále se přesvědčte, že všechny operátory $\widehat{A}_i, \widehat{L}_j$ komutují s \widehat{H} , tedy že působením libovolného z těchto operátorů na vlastní stav \widehat{H} s vlastním číslem (energií) E dostaneme opět vlastní stav \widehat{H} s energií E . Působení operátorů $\widehat{A}_i, \widehat{L}_j$ na prostoru těchto vlastních stavů (budiž jeho dimenze N ; toto je degenerace hladiny E) tedy definuje N –rozměrnou reprezentaci $\mathbb{SO}(4)$. Nalezněte proto nejprve všechny

reprezentace této grupy a pro každou reprezentaci pak spočítejte, jaké vlastní hodnotě \hat{H} odpovídá.

V rámci rozehrábí se s výše uvedenými pojmy seznamte u jednoduššího problému, n -rozměrného izotropního harmonického oscilátoru.

Poznámka: V tomto příkladu budeme značit imaginární jednotku i stojatě, skloněné i ponecháme pro indexy.

Řešení: Již v klasické Keplerově úloze s hamiltoniánem (141) lze ukázat, že Runge–Lenzův vektor \hat{A}_i z rovnice (142) má nulovou Poissonovu závorku s hamiltoniánem, a tedy se zachovává. Tento vektor ukazuje směrem k „odsluní“ dané elipsy a jeho zachování souvisí s tím, že právě pro potenciál $-\alpha/r$ zůstává elipsa na místě. Podobnou symetrii má také izotropní n -rozměrný harmonický oscilátor, v němž jsou trajektoriemi také elipsy, které ovšem mají v počátku střed (a nikoliv ohnisko jako u Keplerovy úlohy). V případě izotropního oscilátoru se zachovává celý tenzor (tj. každá složka zvlášť)

$$T_{lj} = \frac{p_l p_j}{2m} + \frac{\alpha}{2} x_l x_j + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{m}} (x_l p_j - x_j p_l), \quad (143)$$

jehož stopa je mimochodem hamiltoniánem a antisymetrická⁸⁴ část (až na normalizaci) momentem hybnosti. Podle teorému Noetherové odpovídají tyto zákony zachování invarianci vůči transformacím generovaným Poissonovými závorkami s těmito zachovávajícími se veličinami:

$$l \rightarrow l + \{l, \varepsilon_i A_i\}, \quad H \rightarrow H.$$

Ale vrhněme se již zpět k našemu algebraickému úkolu, řešícímu problém v kvantové mechanice. I v kvantové mechanice, kde platí

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (144)$$

zůstanou oba potenciály významné.

⁸⁴ $T_{ij} = T_{ij}^{(s)} + T_{ij}^{(a)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$.

Harmonický oscilátor

U n -rozměrného izotropního oscilátoru definujeme nejprve kreační a anihilační operátory (viz příklad 16.4, $\hat{c}_i = \hat{a}_i$), které splňují

$$[\hat{c}_i, \hat{c}_j^\dagger] = \delta_{ij}. \quad (145)$$

U hamiltoniánu zapsaného v řeči těchto operátorů

$$\hat{H}_{osc} = \hbar\omega \sum_{i=1}^n \left(\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i + \frac{1}{2} \right) \quad (146)$$

pak najdeme operátory $\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j$, které s \hat{H}_{osc} komutují (ověřte); odpovídají zachovávajícím se klasickým veličinám (143).

Tyto operátory ($\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j$, $i, j = 1, \dots, n$) tvoří bázi *Lieovy algebry*, neboť při komutování zůstáváme v tomto prostoru. Pomocí komutační relace (145) dopočítejte, že

$$[\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j, \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_l] = \delta_{jk} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_l - \delta_{il} \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_j. \quad (147)$$

Hermiteovské kombinace operátorů $\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j$ (tedy reálné lineární kombinace výrazů $e^{i\alpha} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j + e^{-i\alpha} \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_i$, $\alpha \in \mathbb{R}$) generují grupu $\mathbb{U}(n)$. To plyne z toho, že komutační relace (147) jsou stejné jako u matic G_{ij} , které mají samé nuly kromě prvku ij , který je jednička (obě algebry jsou tedy izomorfní). V případě $n = 2$ lze hermitovskou kombinaci M matic G_{ij} zapsat jako reálnou kombinaci⁸⁵ *Pauliho matic* σ_k a . . . Exponenciálu obecné matice $\exp(iM)$ jsme spočítali v příkladě 11.8 a zjistili jsme, že takto vygenerujeme $\mathbb{U}(2)$. Pokud bychom vynechali mezi generátory algebry jednotkovou matici (lze také říct, že žádáme $\text{Tr } M = 0$), dostali bychom $\mathbb{SU}(2)$. V případě $n > 2$ postupujeme podobně (matice $G_{ij} + G_{ji}$ odpovídá matici σ_1 , atd.), potřebujeme ale více „sad“ matic σ_k , . . , například u $n = 3$ tři pro $(ij) = (12), (23), (13)$.

Pro jakýkoliv operátor \hat{S} , který komutuje s \hat{H} , platí

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \Rightarrow \hat{H}(\hat{S}|\psi\rangle) = E(\hat{S}|\psi\rangle), \quad (148)$$

⁸⁵Neboť $G_{12} + G_{21} = \sigma_1$, $iG_{12} + (-i)G_{21} = \sigma_2$, $G_{11} - G_{22} = \sigma_3$, $G_{11} + G_{22} = \dots$

srovnajte se vztahem (137) a následujícím odstavcem. To znamená, že i $\exp(t\hat{S})$ má tuto vlastnost. Prostor $V(E)$ vlastních stavů \hat{H} s energií E je tedy *invariantní* vůči působení libovolného operátoru $\exp(i\hat{C})$, kde \hat{C} je hermitovská kombinace $\hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j$; operátory $\exp(i\hat{C})$ tvoří ale grupu izomorfní $\mathbb{U}(n)$ a budeme tedy o nich dále mluvit jako o prvcích $\mathbb{U}(n)$. Každému prvku z $\mathbb{U}(n)$ tedy můžeme přiřadit automorfismus $V(E) \rightarrow V(E)$, $\dim V(E) = N$, a takové zobrazení z grupy do množiny automorfizmů vektorového prostoru je N -dimenzionální *reprezentace* grupy $\mathbb{U}(n)$.

Zapomeňme teď na chvíli na původní problém a ptejme se, jaké reprezentace má $\mathbb{U}(n)$. V takzvané *fundamentální reprezentaci* $\mathbb{U}(n)$ přiřadíme prvku $A \in \mathbb{U}(n)$ zobrazení

$$\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n : v \mapsto Av;$$

tato reprezentace je *ireducibilní* — matice $\mathbb{U}(n)$ představují všechna možná „otočení“⁸⁶ (případně otočení plus zrcadlení) v \mathbb{C}^n , určitě tedy nenajdeme žádný podprostor \mathbb{C}^n , který se by působením libovolné matice z $\mathbb{U}(n)$ zobrazil sám na sebe (*invariantní podprostor*).

Dále můžeme definovat reprezentaci

$$A \in \mathbb{U}(n) \mapsto \{ \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n : v \otimes w \mapsto Av \otimes Aw \},$$

působení na vektor z $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, které nejsou tvaru $v \otimes w$, definujeme tak, že vektor zapíšeme jako lineární kombinaci vektorů typu $v \otimes w$ a A bereme jako lineární zobrazení. Toto je reprezentace na prostoru všech tenzorů typu $(0, 2)$ na \mathbb{C}^n a podobně můžeme vytvořit reprezentace pomocí tenzorů typu $(0, K)$. Tyto reprezentace jsou reducibilní a jejich dimenze jsou samozřejmě n^K .

Nyní se vrátíme k původní úloze o izotropním harmonickém oscilátoru a podíváme se na ni z opačného směru. Víme (příklad 16.4), že libovolný vlastní stav \hat{H}_{osc} s energií $\hbar\omega(K + \frac{1}{2}n)$ lze získat působením K operátorů $\hat{c}_{i_k}^\dagger$, kde indexy $i_1, \dots, i_K \in \{1, \dots, n\}$, na základní stav $|0\rangle$, případně jako lineární kombinaci takových stavů (se stejným K samozřejmě)

$$T_{i_1 \dots i_K} \hat{c}_{i_1}^\dagger \dots \hat{c}_{i_K}^\dagger |0\rangle. \quad (149)$$

⁸⁶Odvoláváme se zde na podobnost s prostorem \mathbb{R}^n a ortogonálními maticemi $\mathbb{O}(n)$.

Na vlastní oči tedy vidíme, že stavy K -krát vzbuzené hladiny lze popsat pomocí tenzorů s K indexy. Jelikož spolu ale všechny operátory \hat{c}_i^\dagger komutují, jsou stavy typu (149), jejichž tenzory T mají stejnou *symetrickou část*⁸⁷, stejné.

Stavy K -té hladiny lze tedy jednoznačně popsat *symetrickými* tenzory s K indexy (je to jedna z ireducibilních reprezentací v rozkladu výše zmíněné reducibilní n^K -rozměrné tenzorové reprezentace).

Jaká je dimenze této reprezentace, nebo jinak, jaká je dimenze prostoru stavů typu (149), stupeň degenerace hladiny $E_K = \hbar\omega(K + \frac{1}{2}n)$? Bázi v prostoru *symetrických tenzorů* s K indexy tvoří například tenzory

$$T_M : (T_M)_{i_1 \dots i_K} = \begin{cases} 1 & \text{pokud je } (i_1, \dots, i_K) \\ & \text{permutací (s opakováním) množiny } M, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

kde M , označující jednotlivé prvky báze, probíhá všechny skupiny (a_1, \dots, a_K) , $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_K \leq n$. Prvků báze je potom tolik, kolik existuje těchto množin, neboli počet *kombinací* K prvků z n prvků *s opakováním* (jinak řečeno počet výběrů K operátorů \hat{c}_i^\dagger , $i \in \{1, \dots, n\}$ bez ohledu na pořadí). Degenerace K -té hladiny je tedy

$$\dim V(E_K) = \binom{K+n-1}{n-1}.$$

Počet kombinací s opakováním se obvykle odvozuje jako počet způsobů, jak vymezip $n-1$ přepážkami n skupin v K předmětech: přičemž počet prvků v j -té skupině odpovídá počtu \hat{c}_j^\dagger . Celkem tedy vkládáme $n-1$ přepážek do $K+n-1$ buněk — buňka může být obydlena buď přepážkou, nebo operátorem \hat{c}_j^\dagger .

Atom vodíku

Nyní přistupme ke složitější úloze, atomu vodíku. Mohli bychom se obávat, že definice součinu operátorů jako \hat{x} a \hat{p} užitá v (142) ze znalosti klasických veličin nebude jednoznačná, jelikož operátory nekomutují. Ovšem vedle triviálně zobecnitelného členu \tilde{x}/\hat{r} lze zobecnit

⁸⁷ $T_{ijk}^{sym} = (1/3!)(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} + T_{jik} + T_{ikj} + T_{kji})$ a podobně pro tenzory vyšších řádů.

jednoznačně i členy typu $\hat{x}_i \hat{p}_j \hat{p}_k$, požadujeme-li hermiticitu, jelikož hermitovské části⁸⁸ výrazu $\hat{x}_i \hat{p}_j \hat{p}_k$, $\hat{p}_j \hat{x}_i \hat{p}_k$, jakož i ostatních permutací, jsou stejné, jak čtenář jistě ověří. Definujme tedy Runge–Lenzův operátor jako

$$\vec{\hat{A}}_i = \frac{1}{m\alpha} \left(\frac{1}{2} \hat{x}_n \hat{p}_i \hat{p}_n + \frac{1}{2} \hat{p}_n \hat{p}_i \hat{x}_n - \hat{p}_n \hat{x}_i \hat{p}_n \right) + \frac{\hat{x}_i}{\hat{r}}$$

a užívejme $\vec{\hat{L}}$ definované v (142). Operátory $\vec{\hat{L}}$ i $\vec{\hat{A}}$ komutují s \hat{H}

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{\hat{r}}, \quad [\hat{H}, \hat{L}_i] = [\hat{H}, \hat{A}_i] = 0,$$

jak lehce zjistíte užitím (144) a jednoduchých formulí jako

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}.$$

Nyní budeme chtít sestavit z operací symetrie \hat{A}_i , \hat{L}_j Lieovu algebru operátorů na zatím blíže neurčeném prostoru stavů. Zkoumejme tedy komutátory \hat{L}_i a \hat{A}_j :

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k, \quad [\hat{L}_i, \hat{A}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{A}_k. \quad (150)$$

Všimněte si, že tyto vzorce vyjadřují, že se $\vec{\hat{L}}$ a $\vec{\hat{A}}$ transformují jako vektory při rotacích generovaných \hat{L}_i . Nejobtížnější komutátor je

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k \frac{-2\hat{H}}{m\alpha^2}, \quad (151)$$

při jehož kontrole doporučujeme ignorovat členy symetrické v ij , které se musí nakonec stejně kompenzovat. Díky této kompenzaci se (151) shoduje s *Poissonovou závorkou* klasické veličiny $\{A_i, A_j\}$ (násobenou $i\hbar$). Připomeňme, že nezáleží na pořadí, v jakém píšeme pravou stranu, jelikož \hat{H} a \hat{L}_i komutují.

Dále studujme konkrétní hladinu s vlastní hodnotou hamiltoniánu (energií) E , a to jen v případě $E < 0$, tedy prostor $V(E)$. Operátor \hat{H} je na tomto prostoru pouze $E \cdot \text{Id}$, a tudíž podle formulí

⁸⁸Hermiteovská část \hat{C} je definována podobně jako symetrická část pomocí $\frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{C}^\dagger)$, což je zjevně hermitovský operátor.

(150) a (151) dostaneme komutováním operátorů $\widehat{A}_i, \widehat{L}_j$ působících na těchto prostorech⁸⁹ lineární kombinaci $\widehat{A}_i, \widehat{L}_j$. Tyto operátory tedy generují algebru a ta je izomorfní algebře $\mathfrak{so}(4)$: operátor \widehat{A}_i je úměrný generátoru \widehat{J}_{i4} , rotujícímu i -tou a čtvrtou souřadnici. Někteří čtenáři možná vědí, že algebra $\mathfrak{so}(4)$ je izomorfní algebře $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$; v následujícím odstavci to předvedeme.

Hledejme místo operátorů \widehat{L}_i a \widehat{A}_i takové jejich lineární kombinace \widehat{M}_i a \widehat{N}_i , které splňují komutační relace $\mathfrak{su}(2)$ (viz příklad 11.8)

$$[\widehat{M}_i, \widehat{M}_j] = i\varepsilon_{ijk}\widehat{M}_k, \quad [\widehat{N}_i, \widehat{N}_j] = i\varepsilon_{ijk}\widehat{N}_k, \quad [\widehat{M}_i, \widehat{N}_j] = 0. \quad (152)$$

Chceme tedy ukázat, že $\mathfrak{so}(4)$ se skládá ze dvou podprostorů, které jsou s ohledem na operaci komutování uzavřené a izomorfní $\mathfrak{su}(2)$.

Zkusíme hledat $\widehat{M}_i, \widehat{N}_i$ ve tvaru

$$\widehat{M}_i = \gamma\widehat{L}_i + \beta\widehat{A}_i, \quad \widehat{N}_i = \gamma\widehat{L}_i - \beta\widehat{A}_i.$$

Z požadavku $[\widehat{M}_i, \widehat{N}_j] = 0$ dostáváme pomocí předpočítaných komutátorů (150,151)

$$0 = [\widehat{M}_i, \widehat{N}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} \left(\gamma^2 - \beta^2 \frac{-2E}{m\alpha^2} \right) \widehat{L}_k,$$

tedy podmínku $\beta = \gamma\sqrt{-m\alpha^2/2E}$ (volba opačného znaménka odmocniny odpovídá pouhé záměně $\widehat{M}_i \leftrightarrow \widehat{N}_i$). Z další podmínky pro $[\widehat{M}_i, \widehat{M}_j]$ (nebo ekvivalentně $[\widehat{N}_i, \widehat{N}_j]$) získáme

$$i\varepsilon_{ijk}\widehat{M}_k = [\widehat{M}_i, \widehat{M}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hbar \left[\left(\gamma^2 + \beta^2 \frac{-2E}{m\alpha^2} \right) \widehat{L}_k + 2\gamma\beta\widehat{A}_k \right]$$

tj. má-li být poslední výraz roven $i\varepsilon_{ijk}[\gamma\widehat{L}_k + \beta\widehat{A}_k]$, pak $2\gamma\beta\hbar = \beta$, čili

$$\gamma = \frac{1}{2\hbar}, \quad \beta = \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\frac{m\alpha^2}{-2E}}. \quad (153)$$

Pro reprezentace operátorů \widehat{M}_i a \widehat{N}_i platí obvyklé závěry o grupách izomorfních $\mathbb{SO}(3)$ nebo $\mathbb{SU}(2)$, konkrétně vlastní hodnoty \widehat{M}^2 resp. \widehat{N}^2 jsou rovny $j_M(j_M + 1)$ resp. $j_N(j_N + 1)$ s $j =$

⁸⁹Matematik by mluvil o „restrikcích“ $\widehat{A}_i|_{V(E)}, \widehat{L}_j|_{V(E)}$.

$0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$; myslete na \widehat{M}_i jako na složku momentu hybnosti, viz příklad 16.5. V našem případě ale můžeme ukázat, že $\widehat{M}^2 = \widehat{N}^2$; rozdíl těchto operátorů je úměrný $\widehat{L}_i \widehat{A}_i$ a tento skalární součin byl nulový již v klasické teorii: \vec{A} leží v rovině oběhu, na kterou je \vec{L} kolmé. Vymizení tohoto skalárního součinu v teorii kvantové lze spatřit třeba přepsáním všech členů do $\widehat{x}\widehat{x}\dots\widehat{p}\widehat{p}\dots$ tvaru, kde se na určitých místech vyskytují indexy i, j, k : buď u $\widehat{x}\widehat{x}\dots$ nebo u $\widehat{p}\widehat{p}\dots$ musí být alespoň dva z nich, dávají tedy výraz v těchto indexech symetrický a ten se anuluje zúžením s ε_{ijk} .

Tedy $j_M = j_N$, neboli pokud reprezentaci grupy symetrie hamiltoniánu (vygenerované z algebry operátorů $\widehat{A}_i, \widehat{L}_j$) na $V(E)$ zapíšeme jako součin dvou reprezentací grup $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$, musí mít obě reprezentace stejnou dimenzi. Každá z projekcí $j_{M,3}$ a $j_{N,3}$ (myslete na průmět momentu hybnosti do třetí souřadné osy) může nabývat jedné z $2j_M + 1$ hodnot od $-j_M$ do $+j_M$. Zavedeme-li číslo $n = 2j_M + 1$, které se pro $j_M = 0, \frac{1}{2}, \dots$ rovná $1, 2, \dots$, lze celkovou degeneraci psát jako $D = (2j_M + 1)^2 = n^2$ v soulase s interpretací n jako hlavního kvantového čísla. Hladina s hlavním kvantovým číslem n se tedy transformuje jako (n, n) reprezentace grupy $\mathbb{S}\mathbb{U}(2) \times \mathbb{S}\mathbb{U}(2)$.

Na závěr nás ještě zajímá, jakou energii má tato hladina s hlavním kvantovým číslem n . Nejprve je třeba roznásobit a dokázat identitu

$$\widehat{H} \left(\widehat{M}^2 + \frac{1}{4} \right) = -\frac{m\alpha^2}{8\hbar^2}, \quad (154)$$

která nám v podstatě dovoluje definovat hamiltonián jako

$$\widehat{H} = -\frac{m\alpha^2/\hbar^2}{8\widehat{M}^2 + 2}. \quad (155)$$

Při důkazu je třeba dosadit za $\widehat{M}^2 = \gamma^2 \widehat{L}^2 + \beta^2 \widehat{A}^2$, dále \widehat{A}_i rozepsat dle definice a místo \widehat{H} psát E : vše provádíme v podprostoru vlastních vektorů \widehat{H} s energií E . Rovnici (154) vynásobíme $4\hbar^2$ a po převedení \widehat{A}^2 na pravou stranu zbývá dokázat rovnost

$$\widehat{H}(\widehat{L}^2 + \hbar^2) = \frac{m\alpha^2}{2}(\widehat{A}^2 - 1),$$

což vyžaduje asi pětinašobné úsilí proti analogické rovnosti pro klasické veličiny, u které schází $+\hbar^2$ na levé straně. Uvědomíme-li si,

že vlastní čísla \widehat{M}^2 jsou $j_M(j_M + 1) = \frac{1}{4}(n^2 - 1)$ [n jsme definovali pomocí $j_M = \frac{1}{2}(n - 1)$], a dosadíme-li za α fyzikální hodnotu $e^2/4\pi\epsilon_0$, rovnice (155) nám již bez odporu vyjeví vlastní hodnoty energie atomu vodíku, aniž bychom řešili jedinou diferenciální rovnici:

$$E = -\frac{m}{2n^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (156)$$

*LM

16.4 Vícerozměrný anizotropní harmonický oscilátor

Úkol: Zopakujte si, jak je ve skriptech [PLA] nalezeno spektrum lineárního harmonického oscilátoru, a podobnou metodou najděte spektrum N -rozměrného anizotropního harmonického oscilátoru, jehož hamiltonián je

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \widehat{\mathbf{x}}^T A \widehat{\mathbf{x}},$$

kde A je reálná symetrická pozitivně definitní matice.

Poznámka: Podmínka, aby byla matice pozitivně definitní, vyplývá z fyzikálního náhledu. Druhý člen v \widehat{H} popisuje potenciální energii částice lokalizované v bodě \mathbf{x} . Zajímáme se o vázané stavy částice (chceme, aby bylo spektrum diskrétní), částice tedy musí být lokalizovaná „v konečném objemu“ a potenciální energie musí tedy *růst* nade všechny meze, pokud $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ (v libovolném směru).

Z pohledu matematika je tato podmínka potřeba proto, abychom mohli definovat hermitovsky sdružené operátory \widehat{a} , \widehat{a}^\dagger (viz vztah 157); pro hamiltonián typu $p^2 - x^2$ bychom měli potíže.

Řešení: Pro jistotu připomeneme, jak se postupuje v dimenzi jedna. Myšlenka je použít rozklad $p^2 + x^2 = (p + ix)(p - ix)$, musíme ale mít na paměti, že tato formulka platí pouze, pokud $xp = px$, zatímco v kvantové mechanice platí $[x, p] = i\hbar$. Zavedeme *anihilační a kreační operátor* \widehat{a} , \widehat{a}^\dagger vztahy

$$\widehat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\widehat{x} + \frac{i\widehat{p}}{m\omega} \right), \quad \widehat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\widehat{x} - \frac{i\widehat{p}}{m\omega} \right), \quad (157)$$

načež hamiltonián přejde na tvar

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right).$$

Polovina na konci posledního výrazu je právě důsledek $[x, p] \neq 0$. Spektrum výše uvedeného hamiltoniánu je

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, \dots$$

Vraťme se k vícerozměrnému anizotropnímu případu: klíčový prvek řešení je diagonalizovat potenciál. Matice A je symetrická, a tedy existuje matice P , která je ortogonální ($P^{-1} = P^T$) a pro niž je $D = P^T A P$ diagonální; vlastní čísla D označme $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a víme, že jsou všechna reálná (A je hermitovská) a kladná (A je pozitivně definitní). Vztahem $\hat{\xi} = P^T \hat{x}$ definujeme nové souřadnice, ve kterých je tedy kvadratická forma popisující potenciální energii diagonální

$$\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^T A \hat{x} = \frac{1}{2}m\omega^2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \hat{\xi}_i^2.$$

Současně zavedeme nové hybnosti relací $\hat{\pi} = P^T \hat{p}$ a díky ortogonalitě matice P je $\sum \hat{p}_i^2 = \sum \hat{\pi}_i^2$ (ověřte). Hamiltonián tedy nabude tvar

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \hat{\pi}_i^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \hat{\xi}_i^2. \quad (158)$$

Nové souřadnice a hybnosti $\hat{\xi}_i$ a $\hat{\pi}_i$ splňují správné komutační relace (říkáme, že tyto souřadnice jsou *kanonické*)

$$[\hat{\xi}_j, \hat{\pi}_k] = [P_{lj}\hat{x}_l, P_{mk}\hat{p}_m] = i\hbar P_{lj}P_{mk}\delta_{lm} = i\hbar P_{jm}^T P_{mk} = i\hbar\delta_{jk}.$$

Používáme Einsteinovu sumační konvenci, linearitu komutátoru a konečně kanoničnost původních souřadnic⁹⁰ $[\hat{x}_l, \hat{p}_m] = i\hbar\delta_{lm}$. Ha-

⁹⁰Ověřte dosazením $\hat{p}_m = -i\hbar(d/dx_m)$. Všimněte si, že pro celý výpočet (zde i v [PLA]) potřebujeme znát právě jen hodnotu komutátoru $[\hat{x}_l, \hat{p}_m]$ a vůbec ne konkrétní tvar \hat{x}_l a \hat{p}_m .

miltonián (158) tedy představuje soustavu N nezávislých jednorozměrných oscilátorů s různými vlastními frekvencemi $\omega_i^2 = \lambda_i \omega^2$

$$\hat{H} = \sum_i \hat{H}_i, \quad \hat{H}_i = \frac{1}{2m} \hat{\pi}_i^2 + \frac{1}{2} m \omega_i^2 \hat{\xi}_i^2. \quad (159)$$

To znamená, že vlastní vektory \hat{H} můžeme (i když nemusíme) hledat ve tvaru *tenzorového součinu* $|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_N\rangle$, kde na i -tém místě v součinu stojí nějaký vlastní vektor operátoru⁹¹ \hat{H}_i . Tento algebraický zápis vám bude možná srozumitelnější, pokud řekneme, že stavy $|n\rangle$ jednorozměrného oscilátoru lze popsat funkcemi jedné proměnné⁹² $\psi_n(\xi)$, stavy N -rozměrného oscilátoru jako funkce N proměnných a že tenzorovému součinu odpovídá u těchto stavů funkce

$$\begin{aligned} |n_1 \dots n_N\rangle &\stackrel{\text{df}}{=} |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \dots \otimes |n_N\rangle \iff \\ &\iff \psi_{n_1, \dots, n_N}(\xi_1, \dots, \xi_N) = \psi_{n_1}(\xi_1) \psi_{n_2}(\xi_2) \dots \psi_{n_N}(\xi_N). \end{aligned} \quad (160)$$

Například operátor \hat{H}_1 obsahuje pouze násobení ξ_1 a derivování podle ξ_1 (neobsahuje operace s jinými proměnnými ξ_j), a tedy působí na $|n_1 \dots n_N\rangle$ samozřejmě

$$\hat{H}_1 [\psi_{n_1}(\xi_1) \psi_{n_2}(\xi_2) \dots \psi_{n_N}(\xi_N)] = \hat{H}_1 [\psi_{n_1}(\xi_1)] \psi_{n_2}(\xi_2) \dots \psi_{n_N}(\xi_N),$$

což jsme měli na mysli obratem „působit na první dimenzi a ostatní nechat na pokoji“.

Ztotožnění prostoru stavů \mathcal{S} s funkcemi N proměnných (vztah 160) se nazývá ξ -reprezentace a lze jej chápat jako vyjádření prvku \mathcal{S} v bázi⁹³ $|\delta(\xi'_1 - \xi_1)\rangle \otimes \dots \otimes |\delta(\xi'_N - \xi_N)\rangle$, která je indexována spojitými indexy ξ'_1, \dots, ξ'_N probíhajícími (nezávisle) celé \mathbb{R} .

⁹¹Rovnost (159) není napsána zcela precizně: na levé straně je operátor působící na stavech v \mathbb{R}^N , napravo jsou operátory působící jednorozměrné stavy (tj. v \mathbb{R}). Např. operátorem \hat{H}_1 na pravé straně máme na mysli $\hat{H}_1 \otimes \text{Id}_2 \otimes \dots \otimes \text{Id}_n$, tj. operátor působící na N -dimenzionální stavy tak, že „zapůsobí na první dimenzi a ostatní nechá na pokoji“.

⁹²Funkce splňující $\hat{H}\psi_n(\xi) = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\psi_n(\xi)$ má tvar „exponenciála klesající pro $|x| \rightarrow \infty$ krát n -tý Hermiteův polynom“.

⁹³Prvek této báze popsaný indexy ξ'_1, \dots, ξ'_N je vektor stavu částice lokalizované v bodě ξ'_1, \dots, ξ'_N . S nadhledem pomíjíme skutečnost, že již báze $|\delta(\xi' - \xi)\rangle$ v jednorozměrném případě je nespočetná, a že tyto báze vektory vlastně už ve zmíněném prostoru stavů neleží, neboť je nelze definovat jako funkce a musíme použít distribuce [Či].

Pokud lze hamiltonián rozložit podle vzoru (159), hovoříme o separovatelném problému. Je nasnadě, že se takové problémy těší oblibě, neboť při jejich řešení je potřeba se zabývat pouze jednoduššími (v tomto případě jednorozměrnými) úlohami. Lze ukázat, že obecný vlastní stav \hat{H} příslušný k vlastnímu číslu E je vždy lineární kombinací tenzorových součinů (160), které odpovídají tomuto vlastnímu číslu.

Na základě naší znalosti řešení jednorozměrné úlohy teď můžeme okamžitě napsat, jak vypadá spektrum \hat{H} : působením operátoru ve tvaru (159) na stav (160) zjistíme, že jeho energie je

$$E(n_1, \dots, n_N) = \hbar\omega \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_i} \left(n_i + \frac{1}{2} \right),$$

a celé spektrum \hat{H} dostaneme tak, že n_1, \dots, n_N necháme probíhat všechna nezáporná celá čísla.

Pro *izotropní harmonický oscilátor* ($\lambda_1 = \dots = \lambda_N = \lambda$ a položíme $\lambda = 1$) dostáváme tedy spektrum $\hbar\omega(n + \frac{1}{2}N)$, $n = 0, 1, \dots$, jehož hladiny jsou ovšem vysoce degenerované: tolikrát, kolika způsoby lze nezáporné celé číslo n napsat jako součet N nezáporných celých čísel (viz úvod příkladu 16.3). Anizotropie tuto degeneraci snímá, ale podle konkrétní volby $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ mohou některé hladiny zůstat degenerované. *TB

16.5 Kvantování momentu hybnosti

Úkol: Uvažujme algebru operátorů L_i , $i = 1, 2, 3$, splňujících komutační relace⁹⁴

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k. \quad (161)$$

Najděte všechny konečnědimenzionální ireducibilní reprezentace této algebry a charakterizujte je pomocí vlastních čísel L_3 . Jinými slovy: zajímáme se, pro která n existují lineární zobrazení $L_1^{(n)}, L_2^{(n)}, L_3^{(n)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, která splňují komutační relace (161) a která nemají žádné společné invariantní podprostory.

⁹⁴ ε_{ijk} je Levi-Civittův symbol, viz příklad 6.1 či 19.5.

Návod: Definujte operátor $L^2 = \sum_{i=1}^3 L_i^2$, ukažte, že komutuje s L_1, L_2, L_3 , a uvědomte si, že tedy v každé ireducibilní reprezentaci musí být tento operátor reprezentován λ -násobkem operátoru identity. Ireducibilní reprezentace lze tímto číslem λ klasifikovat.

Definujte *ladder operátory*

$$L_{\pm} = L_1 \pm iL_2, \quad (162)$$

a použijte techniku anihilačních a kreačních operátorů.

Úmluva: V příkladu značíme index i a imaginární jednotku i .

Řešení: Hned v úvodu upozorníme na to, že uvedené operátory mají fyzikální interpretaci: jsou to složky (orbitálního) momentu hybnosti částice, tedy $\widehat{L}_i = \varepsilon_{ijk} \widehat{x}_j \widehat{p}_k$. Operátor \widehat{L}^2 pak samozřejmě odpovídá velikosti tohoto vektoru. V tomto příkladu nakonec zjistíme, jakých hodnot mohou nabývat vlastní čísla \widehat{L}_3 , pokud je vlastní hodnota \widehat{L}^2 rovna λ .

Doplňme také, že komutační relace (161) jsou přesně komutační relace $\mathfrak{su}(2)$ (příklad 11.8). V tomto příkladu proto vlastně hledáme konečnědimenzionální ireducibilní reprezentace grupy $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$.

Nyní ale již k řešení. Necht' operátory L_1, L_2, L_3, L^2 jsou *libovolné* lineární operátory, které působí na prostoru \mathbb{R}^n a splňují relace (161) — takové operátory automaticky tvoří *reprezentaci* výšeuvedené algebry. Budeme se zabývat otázkou, za jakých podmínek může být tato reprezentace ireducibilní.

Snadno ověříme, že všechny složky L_i skutečně komutují s operátorem L^2 (vypište si všechny zadané komutační relace a proveďte). Lze tedy vždy najít bázi \mathbb{R}^n složenou z vektorů⁹⁵ $|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle$, které jsou vlastními vektory jak L_3 , tak L^2 (nemůžeme žádat, aby to byly vlastní vektory i L_1, L_2 , neboť ty již s L_3 nekomutují); tvrzení

Necht' hermitovské operátory A, B na \mathbb{R}^n spolu komutují. Pak existuje báze \mathbb{R}^n , jejíž každý vektor je vlastním vektorem A i vlastním vektorem B .

můžete považovat za známé, důkaz viz například v [Tan].

⁹⁵Na \mathbb{R}^n definujeme skalární součin tak, aby byly operátory L_1, L_2, L_3 hermitovské (pak je i L^2 hermitovský).

Je-li ovšem $|a\rangle$ vlastním vektorem L^2 , pak i $L_1|a\rangle$ je vlastním vektorem tohoto operátoru, neboť $[L_1, L^2] = 0$ (ověřte sami, nebo se podívejte na vztah 148); totéž platí samozřejmě pro L_2, L_3 . Právě jsme ukázali, že vlastní podprostor operátoru L^2 pro zadané (jeho) vlastní číslo λ je invariantním prostorem operátorů L_1, L_2, L_3 ; jediná možnost, jak tedy zachránit *ireducibilitu* reprezentace (nemá existovat žádný netriviální invariantní podprostor), je zaručit, že L^2 má na \mathbb{R}^n jediné vlastní číslo (tedy $L^2 = \lambda \text{Id}$), neboť pak je tento invariantní podprostor celé \mathbb{R}^n . Toto tvrzení se nazývá *Schurovo lemma*.

Navíc v bázi $|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle$ neexistují dva vektory, které by odpovídaly stejnému vlastnímu číslu L_3 (kvůli ireducibilitě; viz poznámku za rovnicí 167). Vektory báze $|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle$ tedy můžeme jednoznačně identifikovat vlastními čísly vzhledem k L_3 a L^2 ; dále proto budeme používat pro vektory báze označení $|\lambda, \mu\rangle$, kde

$$\begin{aligned} L^2|\lambda, \mu\rangle &= \lambda|\lambda, \mu\rangle, \\ L_3|\lambda, \mu\rangle &= \mu|\lambda, \mu\rangle. \end{aligned}$$

Nyní budeme chtít zjistit, jakých hodnot může nabývat λ a jakých (kolika) hodnot může pro zadané λ nabývat μ (to bude pak n , neboli *dimenze* odpovídající *reprezentace*).

Spočteme si proto komutátory (opět proved'te)

$$[L^2, L_{\pm}] = 0, \quad [L_3, L_+] = L_+, \quad [L_3, L_-] = -L_-. \quad (163)$$

Z těchto vztahů již snadno vypočítáme $L_3 L_+ |\lambda, \mu\rangle = (L_+ L_3 + L_+) |\lambda, \mu\rangle = (\mu + 1) L_+ |\lambda, \mu\rangle$, neboli vektor

$$L_+ |\lambda, \mu\rangle \quad (164)$$

je buď nulový, nebo je to společný vlastní vektor operátorů L^2 a L_3 s vlastními čísly λ a $\mu + 1$. Analogicky lze postupovat pro vektor

$$L_- |\lambda, \mu\rangle, \quad (165)$$

jenom s tou změnou, že nyní je to vlastní vektor L_3 s vlastním číslem $\mu - 1$. V tomto snad shledáváte onu podobnost L_+, L_- s kreačním a anihilačním operátorem u harmonického oscilátoru; pro operátory L_{\pm} se proto také používá název *ladder-operátory* (žebříkové operátory).

Abychom mohli najít normu vektorů (164,165) a zjistit tak, kdy jsou nenulové, vypočítáme z (163)

$$L_+L_- = L^2 - L_3^2 + L_3,$$

$$L_-L_+ = L^2 - L_3^2 - L_3.$$

Díky $L_+^\dagger = L_-$ (ověřte) jsou potom kvadráty norem těchto vektorů (používáme *Diracovu notaci*: $\langle a | = (|a \rangle)^\dagger$)

$$\begin{aligned} |L_+|\lambda, \mu\rangle|^2 &= \langle \lambda, \mu | L_- L_+ |\lambda, \mu\rangle = \lambda - \mu(\mu + 1), \\ |L_-|\lambda, \mu\rangle|^2 &= \langle \lambda, \mu | L_+ L_- |\lambda, \mu\rangle = \lambda - \mu(\mu - 1). \end{aligned} \quad (166)$$

Protože kvadrát normy nemůže být záporný, dostáváme takto soustavu dvou kvadratických nerovnic pro μ (λ je teď pevné), kterou je třeba vyřešit. Lze si například uvědomit, že musí být $\mu_{min} \leq \mu \leq \mu_{max}$, kde

$$\lambda = \mu_{max}(\mu_{max} + 1),$$

$$\lambda = \mu_{min}(\mu_{min} - 1),$$

z čehož můžeme μ_{max} , μ_{min} vypočítat; můžeme si ještě ušetřit polovinu práce, pokud tyto rovnosti odečteme a výsledek mírně upravíme:

$$(\mu_{max} - \mu_{min} + 1)(\mu_{max} + \mu_{min}) = 0.$$

Odtud s využitím $\mu_{max} > \mu_{min}$ plyne, že musí být $\mu_{max} = -\mu_{min}$. Zdůrazněme ještě jeden důsledek (166): vektor $|\lambda, \mu_{max}\rangle$ je jediný vektor báze $\{|\lambda, \mu\rangle\}$, který splňuje $L_+|\lambda, \mu\rangle = 0$ (podobně pak $L_-|\lambda, \mu_{min}\rangle = 0$).

To ale není vše: jelikož L_+ i L_- mění vlastní číslo μ o jedničku, musí se μ_{max} a μ_{min} lišit o celé číslo a zároveň vlastní číslo μ může nabývat pouze hodnot $\mu_{min}, \mu_{min} + 1, \dots, \mu_{max}$. Pokud by existovalo obecné vlastní číslo μ , které by se například od μ_{max} lišilo o necelé číslo, mohli bychom pomocí L_+ doskákat až těsně pod μ_{max} (tedy získali bychom z $|\lambda, \mu\rangle$ vlastní vektor $|\lambda, \mu'\rangle$, $\mu_{max} > \mu' > \mu_{max} - 1$) a dalším krokem jej přeskočit, čímž bychom vytvořili vlastní vektor s vlastním číslem $\mu' + 1 > \mu_{max}$. Stejnou úvahu zopakujeme pro μ_{min} a závěr tedy je, že pro každé vlastní číslo μ musí být $\mu_{max} - \mu$ i $\mu - \mu_{min}$ nezáporné celé číslo, a proto je i $\mu_{max} - \mu_{min}$ celé číslo. Díky $\mu_{max} = -\mu_{min}$ pak může být jedině $\mu_{max} = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

Můžeme tedy uzavřít (už ve standardním značení): ireducibilní reprezentace naší algebry (která je izomorfní k $\mathfrak{su}(2)$) lze očíslovat vlastními čísly operátoru L^2 a ty mohou nabývat pouze hodnot $\lambda = j(j+1)$, kde $j = \mu_{max}$ je nezáporné celé, nebo polocelé číslo (λ jsou tedy možná vlastní čísla L^2). Tyto reprezentace mají dimenzi $n = 2j+1$ (to je počet povolených hodnot μ , čili dimenze vlastního prostoru L^2 k vlastnímu číslu λ) a L_3 na něm má vlastní hodnoty $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$.

Dodejme, že pokud jsou všechny $|j, m\rangle$ normovány na jedničku, pak (166) říká, že

$$L_{\pm}|j, m\rangle = \alpha_{jm}^{(\pm)}|j, m \pm 1\rangle, \quad (167)$$

kde $\alpha_{jm}^{(\pm)} = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}$. Použili jsme přitom konvenci, ve které jsme koeficienty před $|j, m\rangle$ na pravé straně (167) zvolili reálné kladné. Ze vztahu (167) také plyne, že pokud by pro zadané j, m existovalo n nezávislých vektorů $|j, m, 1\rangle, \dots, |j, m, n\rangle$, pak by jich muselo být pro všechna $m = -j, \dots, j$ stejně. Vektory $|j, -j, i\rangle, \dots, |j, j, i\rangle$ potom tvoří invariantní prostory L_+ a L_- , a tedy i L_1, L_2 . Tato situace tedy u ireducibilních reprezentací nemůže nastat.

V reprezentaci dimenze $n = 2j+1$ lze tedy operátoru L_3 přiřadit diagonální matici (s vlastními čísly $-j, -j+1, \dots, j$) a operátorům L_-, L_+ nilpotentní matice stupně n (přímo ve tvaru Jordanovy buňky). Například pro $j = \frac{1}{2}$ dostáváme

$$L_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

tedy $\{L_1, L_2, L_3\}$ jsou Pauliho matice $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ (násobené $\frac{1}{2}$, viz příklad 6.1).

Zdůrazněme, že k tomuto výsledku jsme potřebovali znát pouze komutační relace mezi L_1, L_2, L_3 a nikoliv jejich tvar například v x -reprezentaci. *TB,KV

17 Lepé tvary kvadratické

17.1 Klasifikace kvadrik aneb Vzorečky, vzorečky

Úkol: Mějme kvadriku v \mathbb{R}^3 zadanou rovnicí

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^3 2a_{i4}x_i + a_{44} = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}. \quad (168)$$

Označme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad B = A_{44} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Dokažte, že výrazy

$$\Delta = \det A, \quad \delta = \det B, \quad s = \operatorname{Tr} B,$$

$$t = \det B_{11} + \det B_{22} + \det B_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}$$

jsou invarianty vzhledem k posunutí a otočení v \mathbb{R}^3 a nalezněte vztah mezi těmito invarianty a typem kvadriky.

Řešení: Přejdeme do *projektivního prostoru*, kde bod $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ popíšeme vektorem $\tilde{x} = (x_1, x_2, x_3, 1)$. Pokud přijmeme tuto konvenci, můžeme zapsat kvadriku (168) ve tvaru $\tilde{x}^T A \tilde{x} = 0$, kde A je matice 4×4 definovaná v zadání.

Výhodou projektivního prostoru je, že operace posunutí a otočení v \mathbb{R}^3 v něm lze vyjádřit lineárními zobrazeními. Matice posunutí o (dx, dy, dz) je

$$P_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & 0 & -dy \\ 0 & 0 & 1 & -dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ověřte, že $P_p(x, y, z, 1)^T = (x + dx, y + dy, z + dz, 1)$. Podobně je

matice otočení (případně otočení se zrcadlením)

$$P_o = \begin{pmatrix} & & 0 \\ H & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_o^{-1} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ H^{-1} & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde H je nějaká ortogonální matice ($HH^T = .$); můžete opět ověřit, že $P_o(x, y, z, 1)^T$ je vektor, jehož první tři složky jsou $H(x, y, z)^T$ a poslední složka je 1. Obecná transformace (otočení a posunutí) je pak

$$P_p P_o = P = \begin{pmatrix} & dx \\ H & dy \\ & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H \text{ ortogonální.}$$

Po transformaci $\tilde{x} = P\tilde{x}$ má rovnice transformované kvadriky tvar

$$0 = \tilde{x}^T A \tilde{x} = (\tilde{x}')^T (P^{-1})^T A P^{-1} \tilde{x}' = (\tilde{x}')^T A' \tilde{x}'$$

a na nás nyní je, abychom ukázali, že výrazy Δ' , δ' , s' a t' pro matici A' vyjdou stejně jako výrazy Δ , δ , s a t pro matici A , nezávisle na transformaci P .

Nejprve si uvědomíme, že matice B se při transformaci P mění podle pravidla $A'_{44} = B' = (H^T)^{-1} B H^{-1}$, přičemž $H^T H = .$ a $|\det P| = |\det H| \cdot 1 = 1$. Z toho

$$\begin{aligned} \Delta &= \det P^T A' P = (\det P)^2 \det A' = \Delta', \\ \delta &= \det H^T B' H = \det B' \det H^T H = \delta', \\ s &= \text{Tr } H^T B' H = \text{Tr } B' H H^T = s'. \end{aligned}$$

Zbývá ukázat invarianci t . To je ale snadno vidět z libovolného ze vztahů (druhá rovnost platí pouze pokud B^{-1} existuje)

$$t = \frac{1}{2} [(\text{Tr } B)^2 - \text{Tr } B^2] = \det B \text{Tr } B^{-1},$$

kde jsme t vyjádřili pomocí invariantních výrazů (invariance $\text{Tr } B^{-1}$ se ověří podobně jako pro $\text{Tr } B$). Při odvozování těchto vztahů je klíčové si uvědomit, že t je koeficient u lineárního členu v $\det(B - \lambda .)$, tedy $t = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3$, kde $\lambda_{1,2,3}$ jsou vlastní čísla matice B .

Nyní se věnujme otázce, jak souvisí invarianty Δ, δ, s, t s typem kvadriky. Povolenými úpravami (tzn. transformacemi P ; konkrétní provedení viz v příkladech 17.2, 17.3 a dalších) převedeme matici B na diagonální tvar (vhodným otočením) a podle možností vynulujeme koeficienty a_{j4} (vhodným posunutím). Tím dosáhneme nakonec jednoho z následujících *středových tvarů* (tyto tvary budeme charakterizovat pomocí znamének Δ, δ, s, t)

- $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0$, $\operatorname{sgn} a_{11} = \operatorname{sgn} a_{22} = \operatorname{sgn} a_{33} \neq 0$.
To je pro $\operatorname{sgn} a_{11}a_{44} < 0$ rovnice *elipsoidu*, pro $a_{44} = 0$ je to rovnice, již splňuje jediný bod a v posledním případě $\operatorname{sgn} a_{11}a_{44} > 0$ tato rovnice nemá řešení.
Z toho, co víme o $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$, můžeme již určit, jaká budou v jednotlivých případech znaménka invariantů:

$$\begin{aligned} \delta &= a_{11}a_{22}a_{33} \neq 0, \\ s\delta &= (a_{11} + a_{22} + a_{33})a_{11}a_{22}a_{33} > 0, \\ t &= a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} > 0, \\ \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \begin{cases} < 0 & \text{elipsoid} \\ = 0 & \text{bod} \\ > 0 & \text{imaginární elipsoid} \end{cases} \end{aligned}$$

- $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0$, $\operatorname{sgn} a_{11} = -\operatorname{sgn} a_{22} = -\operatorname{sgn} a_{33} \neq 0$. Toto je rovnice *hyperboloidu*. Obecně platí $\delta \neq 0$ a alespoň jedna z možností

$$\begin{aligned} |a_{11}| \leq |a_{22} + a_{33}| & \quad s\delta \leq 0 \\ |a_{11}| > |a_{22} + a_{33}| & \quad t = a_{11}(a_{22} + a_{33}) + a_{22}a_{33} < \\ & \quad -(a_{22} + a_{33})^2 + a_{22}a_{33} < 0. \end{aligned}$$

Podle znaménka a_{44} je pak nutné rozhodnout, zda je to jednodílný či dvoudílný hyperboloid anebo kužel. Jednoduše to lze zjistit tak, že určíme řez kvadriky rovinami $x = 0$, $y = 0$ či $z = 0$: například $x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0$ je rovnice *dvoudílného* hyperboloidu, neboť rovina $x = 0$ má s touto kvadrikou prázdný průnik ($-y^2 - z^2 = 1$) a odděluje jeho dva díly. Naopak $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ popisuje jednodílný (rotační) hyperboloid, neboť žádná z rovin $x = 0$, $y = 0$ ani $z = 0$ s ním nemá prázdný průnik.

$$\Delta \begin{cases} < 0 & \text{dvoudílný hyperboloid} \\ = 0 & \text{kužel} \\ > 0 & \text{jednodílný hyperboloid} \end{cases}$$

- $a_{14}x + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0$, $a_{14} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$. V tomto případě máme co do činění s *paraboloidem*; obecně platí $\delta = 0$, $\Delta t < 0$ a podle znaménka $a_{22}a_{33}$ rozhodneme, zda je to paraboloid hyperbolický či eliptický. Pro $a_{22} = |a_{22}|$, $a_{33} = -|a_{33}|$ je průnik kvadriky s rovinou $x = -1$ hyperbola $|a_{22}|y^2 - |a_{33}|z^2 = a_{14}$. V případě $a_{22} = |a_{22}|$, $a_{33} = |a_{33}|$ je průnik s touto rovinou $x = -1$ (budiž $a_{14} > 0$) elipsa $|a_{22}|y^2 + |a_{33}|z^2 = a_{14}$, takže závěr je

$$\Delta = -a_{14}^2 a_{22} a_{33} \begin{cases} < 0 & \text{eliptický paraboloid} \\ > 0 & \text{hyperbolický paraboloid} \end{cases}$$

- $a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$. V rovnici se vůbec nevyskytuje proměnná x , průnik kvadriky se všemi rovinami $x = c$, $c \in \mathbb{R}$, je stejný, a plocha je tedy ve směru x translačně invariantní (je to „válec“). Zda je jeho průřez elipsa či hyperbola, rozhodneme podle znamének a_{22} , a_{33} . Obecně v tomto případě platí $\delta = \Delta = 0$ a dále

$$t \begin{cases} > 0 & \text{eliptická válcová plocha} \\ & \text{(pouze pro } a_{44} < 0) \\ < 0 & \text{hyperbolická válcová plocha} \end{cases}$$

- $a_{24}y + a_{33}z^2 = 0$, $a_{24} \neq 0$, $a_{33} \neq 0$. Tento případ je podobný předchozímu bodu, jedná se o parabolickou válcovou plochu. Není potřeba rozlišovat žádné případy: $\delta = \Delta = t = 0$, $s \neq 0$.
- $a_{33}z^2 + a_{44} = 0$, $a_{33} \neq 0$. Tato rovnice popisuje pro $a_{44}a_{33} < 0$ dvojici rovin $z = \pm\sqrt{-a_{44}/a_{33}}$, pro $a_{44} = 0$ je to rovina jediná a pro $a_{44} > 0$ je to prázdná množina. Invarianty jsou $\delta = \Delta = t = 0$ a $s \neq 0$.
- $a_{34}z = 0$, $a_{34} \neq 0$. Kvadrika s invarianty $\delta = \Delta = t = s = 0$ může být tedy například rovina.

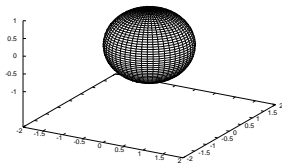
Kvadriky v \mathbb{R}^3

$$a, b, c, d > 0$$

Elipsoid
(koule, rotační, trojosý)

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

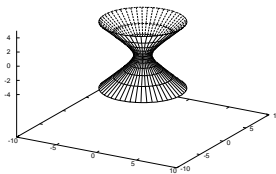
ax^2+by^2+cz^2=1



Hyperboloid jednodílný
(rotační či eliptický)

$$ax^2 + by^2 - cz^2 = d$$

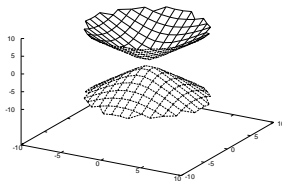
ax^2+by^2-cz^2=d



Hyperboloid dvojdílný
(rotační či eliptický)

$$ax^2 + by^2 - cz^2 = -d$$

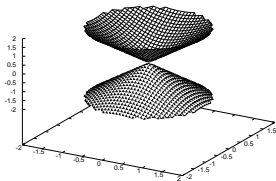
ax^2+by^2-cz^2=-d



Kužel

$$ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$$

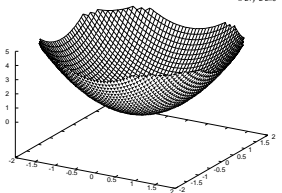
ax^2+by^2-cz^2=0



Paraboloid
(rotační či eliptický)

$$ax^2 + by^2 - cz = 0$$

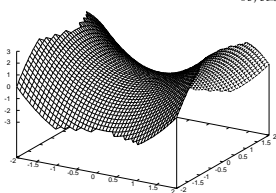
ax^2+by^2-cz=0



Paraboloid
(hyperbolický)

$$ax^2 - by^2 - cz^2 = 0$$

ax^2-by^2-cz^2=0



Shrnutí:

$$\delta \neq 0 \begin{cases} t > 0, \delta s > 0 & \begin{cases} \Delta < 0 & \text{elipsoid} \\ \Delta = 0 & \text{bod} \\ \Delta > 0 & \text{imaginární elipsoid} \end{cases} \\ t \leq 0 \text{ nebo } \delta s \leq 0 & \begin{cases} \Delta < 0 & \text{dvoudílný hyperboloid} \\ \Delta = 0 & \text{kužel} \\ \Delta > 0 & \text{jednodílný hyperboloid} \end{cases} \end{cases}$$

$$\delta = 0 \begin{cases} \Delta < 0 & \text{eliptický paraboloid} \\ \Delta > 0 & \text{hyperbolický paraboloid} \\ \Delta = 0 & \begin{cases} t > 0 & \text{eliptická válcová plocha} \\ t < 0 & \text{hyperbolická válcová plocha} \\ t = 0 & \text{parabolická válcová plocha} \\ & \text{a další degenerované případy} \end{cases} \end{cases}$$

*ZD

17.2 Klasifikace kvadrik aneb Jak to vymyslet sám

Úkol: V prostoru \mathbb{R}^3 je zadána kvadrika rovnicí $7x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z + 42 = 0$. Určete typ kvadriky, velikosti a směry jejích os.

Řešení: Nejdříve zavedeme označení

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}, \quad L = (-12, 12, 60), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

které nám umožní zapsat rovnici kvadriky ve tvaru $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} + L \mathbf{x} + 42 = 0$. Typ kvadriky a její parametry umíme snadno zjistit, pokud známe její rovnici v tzv. *středovém tvaru*. Například středový tvar rovnice elipsoidu je (viz také příklad 17.1)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

kde a, b, c jsou velikosti poloos. Zkusme tedy najít takovou souřadnou soustavu (resp. vhodnou bázi), ve které bude rovnice naší kvadriky ve středovém tvaru.

Nejdříve se zbavíme smíšených členů v rovnici kvadriky (členy xy , xz , yz). Toho dosáhneme pomocí pootočení souřadného systému tak, aby A měla v novém souřadném systému nenulové prvky pouze na diagonále. Jinak: hledáme takovou ortogonální matici U , aby platilo

$$D = U^T A U,$$

kde $U^T = U^{-1}$ a D je diagonální matice. Díky $A = A^T$ víme, že taková ortogonální matice U bude existovat a dokonce máme i recept jak ji najít. Matice U bude mít ve sloupcích vlastní vektory matice A a matice D bude mít na diagonále vlastní čísla matice A . Otočení souřadného systému lze pak vyjádřit jako $x_R = U^T x$ neboli $x = U x_R$. Provedením této substituce dostaneme $(U x_R)^T A (U x_R) + L U x_R + 42 = 0$, což je

$$x_R^T D x_R + L U x_R + 42 = 0.$$

V této rovnici již nejsou smíšené členy. Budou se zde vyskytovat pouze členy typu x a x^2 . Lineárních členů se pak snadno zbavíme doplňováním na čtverec.

Realizujeme nyní výše uvedený postup. Nejprve najdeme vlastní čísla matice A .

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda) &= \det \begin{pmatrix} 7 - \lambda & -1 & -2 \\ -1 & 7 - \lambda & 2 \\ -2 & 2 & 10 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= -\lambda^3 + 24\lambda^2 - 180\lambda + 432 = -(\lambda - 6)^2(\lambda - 12). \end{aligned}$$

Dále je třeba najít vlastní vektory matice A . Víme, že budou existovat dva lineárně nezávislé vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 6, a jeden vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu 12. Soustavu $(A - 6) v = 0$ řeší všechny vektory ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 2t + s \\ s \\ t \end{pmatrix},$$

kde t a s jsou libovolná. Zvolme $(1, 1, 0)^T$ a $(-1, 1, -1)^T$ jako navzájem kolmé vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 6. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 12 je řešením rovnice $(A - 12) v =$

0. Řešením této rovnice je libovolný vektor tvaru

$$\begin{pmatrix} -u \\ u \\ 2u \end{pmatrix},$$

kde u je libovolné. Zvolme vektor $(-1, 1, 2)^T$.

Máme tedy tři nezávislé vlastní vektory matice A a můžeme proto sestavit matici U . Než je ale zapíšeme do sloupců matice U , musíme je nejdříve nanormovat tak, aby měly jednotkovou velikost. Jinak by totiž matice U měnila při transformaci délku vektorů (UU^T by nebylo I , ale pouze diagonální matice). Matice U a k ní inverzní matice $U^{-1} = U^T$ má tvar

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Po provedení substituce $x = Ux_R$ má rovnice kvadriky tvar

$$6x_R^2 + 6y_R^2 + 12z_R^2 - \frac{36}{\sqrt{3}}y_R + \frac{144}{\sqrt{6}}z_R + 42 = 0.$$

V této rovnici provedeme „doplnění na čtverec“ a dostaneme

$$6x_R^2 + 6(y_R - \sqrt{3})^2 + 12(z_R + \sqrt{6})^2 = 48.$$

Nyní ještě posuneme počátek souřadnic

$$\begin{aligned} x_T &= x_R \\ y_T &= y_R - \sqrt{3} \\ z_T &= z_R + \sqrt{6} \end{aligned}$$

a rovnice kvadriky je v tomto posunutém systému souřadnic

$$\frac{x_T^2}{8} + \frac{y_T^2}{8} + \frac{z_T^2}{4} = 1,$$

což je již středový tvar rovnice kvadriky, a sice *rotačního elipsoidu*. Odtud snadno odečteme velikosti poloos $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = 2$;

transformace (změna báze), kterou jsme provedli pomocí matice U , byla ortogonální, neměnily se tedy vzdálenosti, a tudíž platí tyto délky poloos i pro kvadriku před transformací.

Další informací, kterou je možno získat, je poloha středu elipsoidu v původní souřadné soustavě. Pokud je rovnice kvadriky ve středovém tvaru, jsou souřadnice jejího středu $(0, 0, 0)$. Popišme polohu středu pomocí polohového vektoru z počátku do středu kvadriky, a sledujme jak se tento vektor bude měnit, když se budeme posloupností transformací, které vedly na středový tvar vracet zpět:

$$c_T = (0, 0, 0)^T \rightarrow c_R = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{6})^T \rightarrow c = U c_R = (0, 0, -3)^T.$$

Osy elipsoidu leží na přímkách určených *vlastními vektory* matice A a středem elipsoidu. Poloosy, které mají délku $a = b = 2\sqrt{2}$ leží v rovině určené vlastními vektory $(1, 1, 0)^T$, $(-1, 1, -1)^T$ a poloosa $c = 2$ na přímce určené $(-1, 1, 2)^T$ (to je také rotační osa). Lze se o tom samozřejmě přesvědčit i tak, že například osu příslušnou poloose $c = 2$, která je v otočených souřadnicích $c_R = (0, 0, 1)^T$, otočíme zpět: $c = U c_R = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)^T$. *VP

17.3 Diagonalizace kvadratické formy: řádkové a sloupcové úpravy

Úkol: *Převeďte následující kvadratickou formu na kanonický tvar a uveďte příslušnou lineární transformaci*

$$Q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

Uveďte název kvadriky $Q(x) = 1$.

Řešení: Matice A , která reprezentuje uvedenou kvadratickou formu, má tvar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Pomocí řádkových a ekvivalentních sloupcových úprav ji umíme

převést na diagonální tvar

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{řádky:}]{\substack{2(2)+(1)\rightarrow(2) \\ (3)-(1)\rightarrow(3)}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{stejně úpravy}]{\text{se sloupci}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{řádky:}]{\substack{10(3)+(2) \\ \rightarrow(3)}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{sloupce:}]{\dots} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 190 \end{pmatrix} = D$$

Kvadratická forma má tedy v určitých souřadnicích tvar

$$Q'(y) = 2y_1^2 + 10y_2^2 + 190y_3^2. \quad (169)$$

Tím chceme říct: existuje báze B , že platí

$$x^T Ax = Q(x) = Q'(y) = y^T Dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

kde y je vektor složek x vůči této bázi B . Aníž bychom dále pátrali po této bázi, poznáváme v kvadrice $Q(x) = Q'(y) = 1$ již teď *elipsoid*.

Souvislost mezi x a y (lineární transformaci) ale nyní přece jenom najdeme. *Řádkové úpravy*, které jsme podnikli s maticí A , přepíšeme do matice M , tedy takové matice, že MA je matice A po těchto řádkových úpravách. Uvědomte si, že například první řádek MA je lineární kombinace řádků A , a koeficienty této kombinace jsou prvky v prvním řádku M .

Tato matice M se bude rovnat součinu matic, které reprezentují jednotlivé kroky. Například: první krok, který říká, že druhý řádek bude rovný dvojnásobku druhého plus první, třetí řádek bude rovný součtu třetího a prvního a s prvním řádkem se nic neděje, vypadá v matici M_1 následovně (podobně druhý krok $\rightarrow M_2$):

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Vyzkoušejte si, že M_1A je skutečně matice A po prvním kroku úprav.

Podobně lze matici A , v níž jsme provedli nějaké sloupcové úpravy, zapsat jako AN (opět: první sloupec AN je lineární kombinací sloupců A , koeficienty najdete v prvním sloupci N). Skutečnost, že jsme prováděli „stejně“ řádkové a sloupcové úpravy, znamená $N = M^T$.

Celkem jsme vykonali na matici A sérii úprav

$$A \rightarrow MAM^T = M_2M_1AM_1^TM_2^T = D, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -9 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

a tudíž dostáváme

$$x^T Ax = x^T M^{-1} D (M^{-1})^T x,$$

neboli hledaná lineární transformace je $y = (M^{-1})^T x$. Po dopočtení dostáváme

$$(M^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3, \quad y_2 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_3, \quad y_3 = \frac{1}{10}x_3.$$

Nevýhoda tohoto postupu je, že transformace $y = (M^{-1})^T x$ není ortogonální, a tedy nezachovává délku vektorů. Proto nelze z tvaru (169) přímo odečíst například délky poloos elipsoidu $Q(x) = 1$.

*MB,ZV

17.4 Diagonalizace kvadratické formy: vlastní čísla

Úkol: *Převeďte následující kvadratickou formu na kanonický tvar pomocí ortogonální transformace*

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Určete typ kvadriky $Q(x) = 1$.

Řešení: Matice A z vyjádření $Q(x) = x^T Ax$ je například

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

K matici bychom mohli přičíst libovolnou antisymetrickou matici, i tak by díky $x_i x_j = x_j x_i$ stále platilo $Q(x) = x^T A x$, ale pak bychom neměli zaručeno, že bude možno A diagonalizovat. Proto je pohodlnější zvolit A symetrickou (v komplexním případě hermitovskou).

Matici A budeme, jak už jsme prozradili, diagonalizovat. Najdeme charakteristický polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36$$

a vyčíslíme jeho kořeny. Nechceme-li se blýsknout znalostí Cardanových vzorců, můžeme je zkusit uhodnout. Když předpokládáme, že jsou všechny celočíselné, může nám pomoci věta z příkladu 9.5: vyzkoušíme čísla $\lambda = \pm 1, \pm 2$, neboť jsou to dělitelé absolutního členu. Zjistíme, že vyhovuje $\lambda = -2$, vydělíme polynom $p(\lambda)$ výrazem $(\lambda + 2)$ a zjistit zbývající kořeny je potom již snadné:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6.$$

Můžeme tedy napsat Jordanův tvar matice A

$$J_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

a z úvahy $Q(x) = x^T A x = x^T C J_A C^{-1} x$ okamžitě plyne, že

$$Q(x) = Q'(y) = -2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2, \quad (170)$$

kde $y = C^{-1}x$, pokud volíme C tak, aby byla ortogonální, neboli $C^{-1} = C^T$; to můžeme splnit vždy, neboť ve sloupcích C jsou vlastní vektory (symetrické) matice A a ty jsou⁹⁶ na sebe vždy kolmé, stačí je jen normovat na jedničku (viz příklad 17.2). Vidíme tedy, že $Q(x) = Q'(y) = 1$ je rovnice jednodílného hyperboloidu (srovnejte s příkladem 17.1).

Chceme-li najít vztah pro transformaci mezi x a y , musíme tedy ještě zjistit vlastní vektory. Pro λ_1 najdeme $v_1 = (1, 1, 0)$, v normovaném tvaru $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Podobně pro λ_2 a λ_3 máme

⁹⁶Vlastní vektory k případným vícenásobným vlastním číslům nemusí být automaticky kolmé, ale vždy je lze zvolit kolmé.

$v_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ a $v_3 = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$. Pak tedy platí $A = CJ_A C^{-1}$ a zároveň $CC^T = I$, tedy $C^{-1} = C^T$; pokud bychom vlastní vektory zapomněli normovat na jedničku, bylo by $CC^T = \text{diag}(|v_1|^2, |v_2|^2, |v_3|^2)$.

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = C^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Dosazením do $y = C^{-1}x$ dostáváme nakonec

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3, \\ y_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3.$$

Díky ortogonalitě transformace se zachovávají délky vektorů, lze také říci, že ortogonální transformace odpovídá pouze otočení. Ať tedy už kvadriku píšeme v bázi kanonické, $Q(x) = 1$, nebo v bázi vlastních vektorů, $Q'(y) = 1$, budou délky poloos stejné. Srovnáním (170) s

$$-\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{y_3^2}{c^2} = 1$$

vidíme, že hyperboloid má poloosy $a = 1/\sqrt{2}$, $b = 1/\sqrt{3}$, $c = 1/\sqrt{6}$. Osa y_1 , tedy vlastní vektor v_1 , ukazuje směr „chladičí věže“ (pokud by bylo $b = c$, byla by to rotační osa hyperboloidu). *MB,ZV

17.5 Signatura kvadratické formy

Úkol: Kvadratickou formu

$$Q(x) = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$$

převeďte na diagonální tvar pomocí současných řádkových a sloupcových úprav a ukažte, že je pozitivně definitní. Ověřte, že je splněno Sylvestrovu kritérium.

Řešení: Pro kvadratickou formu platí

$$Q(x) = \sum A_{ij}\alpha^i\alpha^j, \quad x = \sum e_i\alpha^i,$$

kde e_i je libovolná báze prostoru V . Víme, že existuje báze, pro kterou je matice formy diagonální. Hledáme tedy diagonální matici D a transformační matici E , pro které platí

$$D_{ij} = \sum A_{kl} E_i^k E_j^l$$

Nejprve převedeme analytický zápis formy na maticový. Zvolme za e_i kanonickou bázi a vyjádřeme matici A kvadratické formy Q vzhledem k této bázi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -5 \\ -2 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

Diagonalizaci provádíme po vzoru gaussovské eliminace, ale řádkové úpravy doplňujeme o stejné sloupcové úpravy. Proces můžeme rozdělit na několik kroků, z nichž každý je popsán dílčí transformační maticí E_i :

$$E_n \dots E_1 A E_1^T \dots E_n^T = D$$

První krok je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -5 \\ -2 & -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix},$$

druhý krok

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

a dohromady tedy

$$E = E_2 E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice kvadratické formy v diagonálním tvaru tedy je

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -5 \\ -2 & -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a jelikož jsou všechny prvky na diagonále matice D kladné, je matice A *pozitivně definitní*, a tedy i forma Q je pozitivně definitní.

Výpočet si můžeme ještě ověřit pomocí *Sylvestrova kritéria*. Všechny hlavní minory matice A musí být kladné:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 2 & 4 & -2 \\ \hline 4 & 9 & -5 \\ \hline -2 & -5 & 8 \end{array} \right), \quad \begin{array}{l} \det(A_{1,1}) = 2 > 0, \\ \det(A_{2,2}) = 2 \cdot 9 - 4 \cdot 4 = 2 > 0, \\ \det A = 10 > 0. \end{array}$$

Pozitivní definitnost $Q(x)$ je potvrzena.

*JZ

17.6 Signatura stručně

Úkol: *Dokažte, že je následující matice pozitivně definitní.*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Řešení: Příklad budeme řešit pomocí *Sylvestrova kritéria*. Spočteme subdeterminanty matice A (viz příklad 17.5): $\det(a_{ij})_{i,j=1}^1 = 9$, $\det(a_{ij})_{i,j=1}^2 = 26$, $\det(a_{ij})_{i,j=1}^3 = \det A = 36$. Všechny subdeterminanty jsou kladné, a A je tedy *pozitivně definitní*.

Úloha se dá řešit i jinak. Nalezneme vlastní čísla A : označme je $\lambda_{1,2,3}$. Zapišeme obecný vektor $x \in \mathbb{R}^3$ v bázi vlastních vektorů A a Ax zapišeme pomocí *spektrálního rozkladu* A

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \quad \Rightarrow \quad Ax = \lambda_1 \alpha_1 v_1 + \lambda_2 \alpha_2 v_2 + \lambda_3 \alpha_3 v_3$$

$$x^T Ax = |\alpha_1|^2 \lambda_1 + |\alpha_2|^2 \lambda_2 + |\alpha_3|^2 \lambda_3.$$

Vidíme tedy, že *diagonalizovatelná* matice A je pozitivně definitní ($x^T Ax > 0$, $\forall x \neq 0$), právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná. To je i případ matice A : vlastní čísla jsou přibližně 3.49411, 0.88673, 11.6192.

Úkol: *Určete signaturu formy $Q(x) = 8x^2 - y^2 + 6z^2 + 12xy + 8xz$.*

Řešení: Ze Sylvestrova kritéria plyne, že forma není pozitivně definitní, neboť $\det(a_{ij})_{i,j=1}^2 = -44 < 0$, ani negativně definitní, jelikož ani $-Q(x)$ není pozitivně definitní, $\det(-a_{ij})_{i,j=1}^1 = -8 < 0$.

Signaturu určíme tím, že nalezneme vlastní čísla matice Q . Ježto to jsou 1, -2 a 4, je signatura $(+ - +)$, neboli $(2)_+$, $(1)_-$, $(0)_0$. Abychom získali tento výsledek, bývalo by stačilo také spočítat pouze determinant (-8) , jinak též součin vlastních čísel): víme, že alespoň jedno vlastní číslo je nekladné, alespoň jedno nezáporné a z hodnoty determinantu už pak plyne, že musí být dvě kladná a jedno záporné. Všimněte si také, že posloupnost minorů $(8, -44, -9)$ nemá signaturu $(+ - +)$. *PV

17.7 Průmět průniku paraboly a nadroviny

Úkol: Uvažujme v \mathbb{R}^{n+1} plochu α určenou rovnicí

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

(rotační paraboloid) a poloprostor P , jehož hraniční nadrovina není kolmá na nadrovinu o rovnici $x_{n+1} = 0$. Vytvořme nyní průnik α a P a promítněme jej do nadroviny určené rovnicí $x_{n+1} = 0$; pro promítání použijte předpis $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0)$. Ukažte, že je tento průmět n -dimenzionální koule nebo její doplněk.

Řešení: Doporučujeme nakreslit si situaci v \mathbb{R}^2 (jednorozměrná koule je úsečka) a v \mathbb{R}^3 .

Uvažujme libovolný poloprostor P a jeho hraniční nadrovinu π — ta je určena rovnicí $a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i = 0$, kde (a_1, \dots, a_{n+1}) je normála k π . Podmínka o (ne)kolmosti hraniční nadroviny zaručuje, že platí $a_{n+1} \neq 0$ a můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že platí $a_{n+1} = 1$. Dosazením rovnice parabolické plochy α do rovnice nadroviny π dostaneme

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i x_i + x_i^2) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \left(x_i + \frac{1}{2} a_i \right)^2 &= -a_0 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} a_i^2. \end{aligned} \quad (171)$$

Libovolná n -tice x_1, \dots, x_n , která vyhovuje rovnici (171) spolu s $x_{n+1} = \sum_{i=1}^n x_i^2$ udává souřadnice bodu x , který leží v průniku

α a π . Nás ale zajímá průmět této množiny do roviny $x_{n+1} = 0$, tedy můžeme poslední souřadnici x zapomenout, a hledaný průmět je plně popsán rovnicí 171.

Průmět průniku α s hraniční nadrovinou poloprostoru P je tedy hranice n -dimenzionální koule (rovnice 171), a tudíž průmět poloprostoru P je n -dimenzionální koule nebo její doplněk (případně prázdná množina nebo celý prostor). Z rovnice (171) je také vidět, že libovolnou n -dimenzionální kouli nebo její doplněk, které leží v nadrovině určené rovnicí $x_{n+1} = 0$, lze získat jako průmět průniku vhodného poloprostoru s plochou α ze zadání příkladu do nadroviny o rovnici $x_{n+1} = 0$. *DK

17.8 Poloha bodu vůči sféře

Úkol: Necht' $x^1, \dots, x^{n+1}, y \in \mathbb{R}^n$. S využitím příkladů 17.7 a 8.7 určete, jak souvisí znaménko determinantu následující matice s polohou bodu y vůči sféře určené body x^1, \dots, x^{n+1} ; $x^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$.

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_n^1 & \sum_{i=1}^n (x_i^1)^2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n+1} & \dots & x_n^{n+1} & \sum_{i=1}^n (x_i^{n+1})^2 & 1 \\ y_1 & \dots & y_n & \sum_{i=1}^n y_i^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (172)$$

Řešení: Představme si bod $(x^j)' \in \mathbb{R}^{n+1}$ ležící na ploše o rovnici $x_{n+1} = \sum_{i=1}^n x_i^2$, jehož průmět do $x_{n+1} = 0$ je bod x^j . Bod $(x^j)'$ má souřadnice $(x_1^j, \dots, x_n^j, \sum_{i=1}^n (x_i^j)^2)$; podobně určíme k y bod $y' \in \mathbb{R}^{n+1}$. Vraťme se k výsledkům příkladu 17.7: definujme pomocí bodů $(x^1)', \dots, (x^{n+1})'$ nadrovinu π v \mathbb{R}^{n+1} . Potom budou všechny body y' , které vznikly z bodů ležících y uvnitř koule definované x^1, \dots, x^{n+1} , ležet ve stejném poloprostoru (s hraniční nadrovinou π). Body y , které leží vně této koule, se zobrazí na body y' ležící v opačném poloprostoru.

Určit polohu bodu y' vzhledem k nadrovině definované body $(x^1)', \dots, (x^{n+1})'$ můžeme pomocí výsledků příkladu 8.7. Determinant (172) má stejné znaménko pro všechny body ležící uvnitř dané

koule, opačné znaménko pro všechny body vně koule, a je nulový právě pro body ležící na její hranici. *DK

17.9 Chladící věže poprvé: ³

Úkol: Najděte rovnice tečen k jednodílnému hyperboloidu v \mathbb{R}^3 v jeho libovolném bodě.

Řešení: Budeme se zabývat pouze problémem vést tečnu k hyperboloidu H bodem A , kde

$$H : x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0, \quad A = [a, 0, \sqrt{a^2 - 1}]. \quad (173)$$

Pokud by byly H a A zadány obecněji, provedeme následující kroky

- vhodnou rotací, posunutím a přeškálováním os převedeme rovnici hyperboloidu do kanonického tvaru (173) a nezapomeneme transformovat také souřadnice A ; postup můžeme opsat z příkladu 17.2 nebo 17.3;
- provedeme rotaci kolem osy z tak, aby transformovaný bod A měl souřadnice $A = [a, 0, \sqrt{a^2 - 1}]$, tedy aby ležel v rovině $y = 0$.

Nyní tedy k situaci popsané (173). Tečny budou ležet v tečné rovině. Určíme tedy její rovnici. Vezmeme-li funkci

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

je hyperboloid (173) popsán rovnicí $f(x, y, z) = 1$; říkáme, že H je *ekviskalární plocha* funkce $f(x, y, z)$ pro hodnotu 1. Pokud definujeme na \mathbb{R}^3 *vektorové pole gradientu* funkce f

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2x, 2y, -2z),$$

tedy každému bodu $A = [x_0, y_0, z_0]$ přiřazujeme vektor $n(A) = (2x_0, 2y_0, -2z_0)$, pak platí, že $n(A)$ je kolmý na tu ekviskalární plochu⁹⁷ funkce f , která prochází bodem A , neboli $f(x, y, z) = C$ s $C = f(x_0, y_0, z_0)$.

⁹⁷Přesněji řečeno na její tečnou rovinu v tomto bodě.

Shrnuto, normála k tečné rovině H v bodě $A = [a, 0, \sqrt{a^2 - 1}]$ je

$$n = (a, 0, -\sqrt{a^2 - 1}),$$

pro pohodlí jsme $n(A)$ dělili dvěma. Označme dále tečnou rovinu ϱ . Z podmínky $A \in \varrho$ dostaneme absolutní člen v rovnici roviny ϱ , která pak zní $n \cdot x - 1 = 0$.

Podívejme se blíže na přímky roviny ϱ , které procházejí bodem A ; každou takovou přímku lze zapsat ve tvaru $X = tu + A$, $t \in \mathbb{R}$, kde u je libovolný vektor kolmý na n . Jeden takový vektor u je zřejmě

$$r = (\sqrt{a^2 - 1}, 0, a).$$

Ostatní vektory kolmé na n vyjádříme parametricky pomocí parametru ϑ jakožto rotaci r kolem n o ϑ , tedy rotaci v rovině $r, n \times r$ (viz příklad 10.1).

$$u(r, n, \vartheta) = r \cos \vartheta + (n \times r) \sin \vartheta$$

Díky $n \times r = (0, 1, 0)$ dostaneme

$$u = (\sqrt{a^2 - 1} \cos \vartheta, \sin \vartheta, a \cos \vartheta),$$

a tedy kandidáty na tečny jsou přímky ($0 \leq \vartheta < 2\pi$)

$$\begin{aligned} x &= t\sqrt{a^2 - 1} \cos \vartheta + a \\ y &= t \sin \vartheta \\ z &= ta \cos \vartheta + \sqrt{a^2 - 1}. \end{aligned} \tag{174}$$

Tečny jsou ovšem jenom ty přímky, které mají s hyperboloidem H společný právě jeden bod. Hledáme tedy, kdy má následující soustava rovnic řešení pouze pro $t = 0$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 - 1 &= 0 \\ X &= tu + A. \end{aligned}$$

Dosazením rovnic přímky (174) do rovnice hyperboloidu dostaneme

$$\begin{aligned} (a^2 - 1)t^2 \cos^2 \vartheta + 2at\sqrt{a^2 - 1} \cos \vartheta + a^2 + t^2 \sin^2 \vartheta \\ - a^2 t^2 \cos^2 \vartheta - 2at\sqrt{a^2 - 1} \cos \vartheta - a^2 + 1 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$t^2(\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta) = 0.$$

Pro $\sin^2 \vartheta \neq \cos^2 \vartheta$ existuje jediné řešení (průnik přímky a hyperboloidu) pro $t = 0$, přímky jsou tedy skutečně tečny.

Pro $\sin^2 \vartheta = \cos^2 \vartheta$ je řešením libovolné $t \in \mathbb{R}$, tedy přímky leží celé v hyperboloidu (jsou to průsečnice hyperboloidu a tečné roviny). Všimněte si, že to jsou právě dvě přímky a že je lze chápat jako kužel v \mathbb{R}^2 (degenerovanou kuželosečku). *DKo,MZ

17.10 Chladící věže podruhé: n

Úkol: Najděte rovnice tečen k jednodílnému hyperboloidu v \mathbb{R}^n

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2 - 1 = 0 \quad (175)$$

1. v bodě $B = [a, 0, \dots, 0, \sqrt{a^2 - 1}]$,

2. v obecném bodě $B = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 - 1}]$. Pro jednoduchost předpokládejte $a_1 \neq 0$.

Řešení: 1. Nechtě $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ je kanonická báze V . Najdeme normálu k *tečnému prostoru* hyperboloidu v bodě B (značme jej T_B), což je nyní $(n-1)$ -dimenzionální plocha. Podobně jako v příkladu 17.9 definujeme funkci

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2$$

a hyperboloid je ekviskalární plocha této funkce pro hodnotu 1. Pole gradientu je

$$\nabla f(x) = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_{n-1}, -2x_n)$$

a normálový vektor k hyperboloidu je vektor tohoto pole v bodě B

$$n = \frac{1}{2} \nabla f(B) = (a, 0, \dots, 0, -\sqrt{a^2 - 1}).$$

Směrové vektory tečen leží v ortogonálním doplňku $\mathcal{L}(n)$. Najděme ortogonální bázi tohoto tečného podprostoru T_B (připomínáme $\dim T_B = n-1$). Bázové vektory snadno uhadneme (ověřte $v_i \cdot n = 0$)

$$v_1 = (\sqrt{a^2 - 1}, 0, \dots, 0, a), \quad v_i = e_i \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Obecná tečná přímka k hyperboloidu v bodě B má směrový vektor $u \in T_B$, který lze zapsat jako lineární kombinaci

$$u = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i.$$

Přímky mají pak tvar $X = su + B$, $s \in \mathbb{R}$, neboli

$$\begin{aligned} x_1 &= s \alpha_1 \sqrt{a^2 - 1} + a \\ x_2 &= s \alpha_2 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= s \alpha_{n-1} \\ x_n &= s \alpha_1 a + \sqrt{a^2 - 1}. \end{aligned}$$

Hledejme opět, které z těchto přímek mají s hyperboloidem jediný společný bod. Dosadíme tyto rovnice do rovnice hyperboloidu a zkusíme, pro jaká $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ existuje jediné řešení $s = 0$:

$$\begin{aligned} s^2 \alpha_1^2 (a^2 - 1) + 2sa\alpha_1 \sqrt{a^2 - 1} + a^2 + s^2 \alpha_2^2 + \dots \\ \dots + s^2 \alpha_{n-1}^2 - s^2 a \alpha_1^2 - 2sa\alpha_1 \sqrt{a^2 - 1} - a^2 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$s^2 \left(-\alpha_1^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i^2 \right) = 0.$$

Závěr je tedy následující:

$-\alpha_1^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i^2 \neq 0$ přímka má s hyperbolou společný právě jeden bod, a je tedy jeho tečnou;

$-\alpha_1^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i^2 = 0$ přímka leží celá v hyperboloidu.

Z podmínky $-\alpha_1^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i^2 = 0$ zároveň vidíme, že průnikem jednodílného hyperboloidu s tečným podprostorem T_B je kvadrika $Q(x) = 0$ *signature* $(n-2)_+, (1)_-, (0)_0$, tedy kužel v T_B (srovnejte s rovnicí kuželu v příkladu 17.1, resp. se signaturou příslušné kvadriky).

2. Začneme opět určením normálového vektoru k tečnému prostoru T_B :

$$n = \frac{1}{2} \nabla f(B) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n), \quad a_n = -\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 - 1}.$$

Bázové vektory T_B opět hledáme z podmínky $v_i \cdot n$. Označíme je v_2, \dots, v_n a z jedné vody načisto píšeme

$$\begin{aligned} v_2 &= (-a_2, a_1, 0, 0, 0, \dots, 0) \\ v_3 &= (-a_3, 0, a_1, 0, 0, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ v_n &= (-a_n, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, a_1). \end{aligned}$$

Obecná tečná přímka v bodě B je tedy popsána rovnicemi ($s \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 - s \sum_{i=2}^n \alpha_i a_i \\ x_2 &= a_2 + s \alpha_2 a_1 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= a_{n-1} + s \alpha_{n-1} a_1 \\ x_n &= -a_n + s \alpha_n a_1 \end{aligned}$$

a budeme dále mezi těmito přímkami hledat ty, které mají s hyperboloidem více společných bodů. Dosadíme právě napsané rovnice do

rovnice hyperboloidu a výrazy seřídíme podle mocnin parametru s .

$$s^2 \left[\left(\sum_{i=2}^n \alpha_i a_i \right)^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i^2 a_1^2 - \alpha_n^2 a_1^2 \right] + s \left(-2a_1 \sum_{i=2}^n \alpha_i a_i + 2a_1 \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i a_i + 2a_1 \alpha_n a_n \right) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 - a_n^2 - 1 = 0$$

Lineární členy se odečtou, absolutní členy se užitím $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = a_n^2 + 1$ odečtou taktéž a zbývají pouze kvadratické

$$s^2 \left(\left(\sum_{i=2}^n \alpha_i a_i \right)^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i^2 a_1^2 - \alpha_n^2 a_1^2 \right) = 0.$$

Vidíme opět, že přímky z T_B , které procházejí bodem B , mají z hyperboloidem buď jediný společný bod anebo leží v tomto hyperboloidu celé: podle toho, zda je pro daná $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ velká závorka nulová či nenulová. Výraz v této závorce je kvadratická forma na \mathbb{R}^{n-1} v proměnných $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ s maticí C typu $(n-1) \times (n-1)$

$$C = \begin{pmatrix} a_2^2 + a_1^2 & a_2 a_3 & a_2 a_4 & \dots & a_2 a_n \\ a_3 a_2 & a_3^2 + a_1^2 & a_3 a_4 & & a_3 a_n \\ a_4 a_2 & a_4 a_3 & a_4^2 + a_1^2 & & a_4 a_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_n a_2 & a_n a_3 & & \dots & a_n^2 - a_1^2 \end{pmatrix} \quad (176)$$

Potřebujeme tedy zjistit, zda je tato forma definitní či indefinitní, tedy zda $\vec{\alpha}^T C \vec{\alpha}$ může být někdy nula.

Diagonalizujme formu definovanou maticí C . K i -tému řádku (řádky indexujeme $i = 2, 3, \dots, n$) přičteme $-a_i a_2 / (a_2^2 + a_1^2)$ -násobek druhého řádku. Výsledek těchto $n-2$ operací lze shrnout takto:

- první sloupec, tedy prvky $(i, 2)$, $i = 3, 4, \dots, n$ jsme vynulovali,
- nediagonální prvky (i, j) , $i, j = 3, 4, \dots, n$, $i \neq j$

$$a_i a_j \rightarrow a_i a_j - a_2 a_j \frac{a_i a_2}{a_2^2 + a_1^2} = a_i a_j \frac{a_1^2}{a_2^2 + a_1^2}$$

- diagonální prvky (i, i) , $i = 3, 4, \dots, n-1$

$$a_i^2 + a_1^2 \rightarrow a_i^2 + a_1^2 - a_i a_2 \frac{a_i a_2}{a_2^2 + a_1^2} = (a_i^2 + a_2^2 + a_1^2) \frac{a_1^2}{a_2^2 + a_1^2}$$

- poslední prvek (n, n)

$$a_n^2 - a_1^2 \rightarrow a_n^2 - a_1^2 - a_n a_2 \frac{a_n a_2}{a_2^2 + a_1^2} = (a_n^2 - a_2^2 - a_1^2) \frac{a_1^2}{a_2^2 + a_1^2}$$

Když teď všechny řádky kromě prvního ($i = 2$) vynásobíme koeficientem $\frac{a_2^2 + a_1^2}{a_1^2}$, dostaneme matici, která se od (176) liší vynulovaným prvním sloupcem a dále tím, že na diagonále stojí všude (kromě prvního řádku) $a_1^2 + a_2^2$ místo a_1^2 . Zcela analogicky k vynulování prvního sloupce lze tedy vynulovat i sloupce další; pro větší přehlednost můžeme při nulování k -tého sloupce ($k = 3, \dots, n-1$) označit $b^2 = \sum_{i=1}^{k-1} a_i^2$ a pak platí všechny výše uvedené úpravy týkající se sloupce $k = 2$ i pro sloupce ostatní, pokud v nich zaměníme a_1^2 za b^2 .

Na konci řádkových úprav dostaneme tedy matici

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^2 a_i^2 & a_2 a_3 & a_2 a_4 & \dots & a_2 a_n \\ 0 & \sum_{i=1}^3 a_i^2 & a_3 a_4 & & a_3 a_n \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^4 a_i^2 & & a_4 a_n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \end{pmatrix},$$

kde $a_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = -1$ a všechny ostatní diagonální elementy jsou kladné. Rozmyslete si, že pokud se dále pustíme do sloupcových úprav, které odpovídají všem provedeným řádkovým úpravám, vynulují se všechny zbývající nediagonální prvky a diagonála zůstane nezměněna.

Můžeme tedy učinit závěr, že kvadratická forma reprezentovaná maticí (176) má signaturu $(n-2)_1, (1)_{-1}, (0)_0$, a tedy budou existovat vektory $\vec{\alpha} = (\alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$, pro které $\vec{\alpha}^T C \vec{\alpha} = 0$. Přímký

$$X = s\mathbf{v} + B, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=2}^n \alpha_i \mathbf{v}_i, \quad \text{kde } \vec{\alpha}^T C \vec{\alpha} = 0$$

potom leží celé v hyperboloidu, zatímco přímky s $\vec{\alpha}^T C \vec{\alpha} \neq 0$ jsou jeho tečny.

Zjistili jsme tedy, že i v tomto obecnějším případě je průnikem jednodílného hyperboloidu s tečným prostorem T_B kvadrika $Q(x) = 0$ signatury „samé plusy, jeden minus“, tedy $(n - 1)$ -dimenzionální kužel.

*DKo,MZ

18 Rozklady polárníka při teplotní pseudoinvertaci

18.1 Polární rozklad deformačního gradientu

Úkol: Deformační funkce⁹⁸ jednoduchého smyku $\chi(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ je dána vztahem

$$\chi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + kx_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- Spočítejte deformační gradient $F = \text{Grad } \chi(x)$.
- Najděte polární rozklad deformačního gradientu, tzn. najděte takové matice R a S , které splňují $F = RS$, přičemž R je ortogonální ($R^T = R^{-1}$), S je symetrická ($S = S^T$) a pozitivně definitní ($x \neq 0 \Rightarrow Sx \cdot x > 0$).

Řešení: Složky tenzoru deformačního gradientu⁹⁹ jsou definovány jako $F_j^i = \text{Grad}_j^i \chi(x) = \partial \chi^i / \partial x^j$, tudíž

$$F = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní se budeme věnovat hlavní části příkladu — hledání *polárního rozkladu* matice F . Z vlastností matic R a S plyne, že

$$F^T F = (RS)^T (RS) = S^T R^T RS = S^T S = S^2,$$

odkud $S = \sqrt{F^T F}$; odmocnina $F^T F$ není jednoznačná, ale vždy mezi nimi existuje jedna pozitivně definitní matice (při odmocňování vlastních čísel je třeba volit kladné odmocniny, viz příklad 9.7).

⁹⁸Vy, kdož toužíte pouze po matematickém problému, najděte si v řešení, jak vypadá matice F a proveďte její polární rozklad.

⁹⁹Je to tenzor typu $(1, 1)$ na \mathbb{R}^3 . Tyto tenzory lze chápat jako lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, a proto jej tomto příkladu budeme brát jako obyčejnou matici 3×3 .

Matici R dopočteme tak, aby to vyšlo, tzn. $R = FS^{-1}$. Ověřme, že pokud $F^T F = S^2$, pak je takto definovaná matice skutečně ortogonální.

$$R^T R = (FS^{-1})^T (FS) = S^{-1} F^T F S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = .$$

Je-li navíc determinant matice F kladný, pak je i determinant matice R kladný a zobrazení zadané maticí R je *vlastní rotace* (tedy nikoliv rotace spojená se zrcadlením). Ještě si uvědomíme, co znamená v tomto případě polární rozklad fyzikálně. Libovolnou deformaci F , lze rozložit na rotaci R a čistou deformaci S . Veškerá objemová změna, jejíž mírou je jak známo determinant transformace, je tak soustředěna v matici čisté deformace S . Skutečně $\det F = \det R \det S = \det S$.

Začneme počítat. Nejdříve se pokusíme úlohu vyřešit „fyzikálním“ postupem, který bude odlišný od výše popsaného „matematického“. Ze zápisu deformační funkce χ je zřejmé, že se ve směru osy x_3 nic neděje a veškerá deformace probíhá v rovině $x_1 x_2$. Je proto rozumné vyzkoušet, jestli bychom za matici R nemohli vzít

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (177)$$

což je matice popisující otočení kolem osy x_3 v záporném směru (po směru hodinových ručiček), viz příklad 10.1. Úhel φ , který je zatím libovolný, určíme tak, abychom splnili podmínky polárního rozkladu, tedy aby $S = R^{-1} F$ byla symetrická.

$$S = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & k \cos \varphi - \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & k \sin \varphi + \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Má-li být tato matice symetrická, je třeba volit φ tak, aby

$$k \cos \varphi - \sin \varphi = \sin \varphi,$$

odkud $k = 2 \tan \varphi$. Takové φ lze jistě nalézt, navíc $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pak je

$$S = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \frac{1+\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Maticе S má být ještě pozitivně definitní. Zde nezbyvá než doufat, že skutečně bude, protože s parametrem φ již nemůžeme hýbat. Pokud by S nebyla pozitivně definitní, museli bychom místo (177) zkusit použít nějakou nevlastní rotaci, například $R \cdot \text{diag}(-1, 1, 1)$. Determinanty hlavních minorů jsou

$$\begin{aligned} \det(\cos \varphi) &= \cos \varphi \\ \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \frac{1+\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \end{pmatrix} &= 1 \\ \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \frac{1+\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= 1. \end{aligned}$$

Všechny determinanty jsou kladné, a proto (*Jacobi–Sylvestrova věta*) je S skutečně pozitivně definitní.

Předvedme si ještě silové řešení problému, které bude podrobně sledovat postup navržený v úvodu. Maticе $F^T F$ je

$$F^T F = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & k^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tuto matici je třeba odmocnit. Zde použijeme techniku z příkladu 9.7, jejíž výhoda spočívá v tom, že jako vedlejší produkt vypočteme i vlastní vektory matice, kterou máme odmocnit. Nejprve najdeme vlastní čísla.

$$\det(F^T F - \lambda I) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - (2 + k^2)\lambda + 1),$$

odkud (označme si $k = 2 \tan \varphi$)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + \frac{k^2}{2} + k \sqrt{1 + \frac{k^2}{4}} = 1 + 2 \tan^2 \varphi + 2 \tan \varphi \frac{1}{\cos \varphi} = \\ &= 1 + 2 \tan \varphi \left(\frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \\ \lambda_2 &= 1 + \frac{k^2}{2} - k \sqrt{1 + \frac{k^2}{4}} = 1 + 2 \tan^2 \varphi - 2 \tan \varphi \frac{1}{\cos \varphi} = \\ &= 1 + 2 \tan \varphi \left(\frac{-1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \\ \lambda_3 &= 1. \end{aligned}$$

Vlastní vektor příslušející vlastnímu číslu $\lambda_3 = 1$ je evidentně $v_{\lambda_3} = (0, 0, 1)^T$, další vlastní vektory získáme jako řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= (F^T F - \lambda_{1,2}) v_{\lambda_{1,2}} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 \tan \varphi \left(\frac{\pm 1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) & 2 \tan \varphi & 0 \\ 2 \tan \varphi & 4 \tan^2 \varphi - 2 \tan \varphi \left(\frac{\pm 1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v_{\lambda_{1,2}} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 \tan \varphi \left(\frac{\pm 1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) & 2 \tan \varphi & 0 \\ 2 \tan \varphi & -2 \tan \varphi \left(\frac{\pm 1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v_{\lambda_{1,2}}. \end{aligned}$$

Je vhodné použít identitu

$$\left(\frac{\pm 1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \left(\frac{\pm 1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) = \frac{1 - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = 1, \quad (178)$$

tento vztah se nám ještě bude hodit, až budeme hledat odmocninu z vlastních čísel. Teď určíme vlastní vektory

$$v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jordanův tvar matice je

$$J_{F^T F} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \tan \varphi \left(\frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 2 \tan \varphi \left(\frac{-1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a transformační matice, která převádí $F^T F$ na Jordanův tvar je

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} & \frac{-1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \sin \varphi}{2} & \frac{\cos \varphi}{2} & 0 \\ \frac{1 + \sin \varphi}{2} & -\frac{\cos \varphi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud jsme našli Jordanův tvar $F^T F$, provedeme odmocnění snadno

$$\sqrt{F^T F} = C \sqrt{J_{F^T F}} C^{-1} = C \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix} C^{-1},$$

největším problémem bude inteligentním způsobem odmocnit vlastní čísla (tím samozřejmě nemyslíme odmocninu z jedničky). Vzpomeňme si na výše uvedený vztah pro rozepsání jedničky (178) a dostaneme

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} = 1 + 2 \tan \varphi \left(\frac{\pm 1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) &= \left(\frac{\pm 1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \left(\frac{\pm 1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) + \\ &+ 2 \tan \varphi \left(\frac{\pm 1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) = \left(\frac{\pm 1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right)^2, \end{aligned}$$

odkud (při odmocňování volíme vždy znaménko plus, chceme získat pozitivně definitní matici)

$$\sqrt{\lambda_1} = \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi}, \quad \sqrt{\lambda_2} = \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Konečně máme tedy $\sqrt{F^T F}$ ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} & \frac{-1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1 - \sin \varphi}{2} & \frac{\cos \varphi}{2} & 0 \\ \frac{1 + \sin \varphi}{2} & -\frac{\cos \varphi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

což dává

$$\sqrt{F^T F} = S = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podle receptu pak je $R = F S^{-1}$, aneb

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \tan \varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} & -\sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

matice R a S nám kupodivu vyšly stejně jako při „fyzikálním“ postupu. Zde aspoň nemusíme ověřovat jejich vlastnosti (jsou dány postupem). Navíc jsme ještě našli vlastní vektory a vlastní čísla matice S , čili směry, ve kterých dochází k maximálnímu resp. minimálnímu prodloužení (zkrácení). *VP

18.2 Polární rozklad singulární matice

Úkol: Ukažte, že i v případě, kdy matice A není regulární, existují unitární matice U a hermitovská pozitivně semidefinitní matice B takové, že

$$A = UB \quad (179)$$

Řešení: Protože matice $A^\dagger A$ je zajisté hermitovská a pozitivně semidefinitní, můžeme stejně jako v případě regulární A nalézt její odmocninu B . Unitární matici U i nyní dodefinujeme tak, aby platilo $A = UB$, jen s tím rozdílem, že už nemůžeme prostě položit $U = AB^{-1}$.

Pomůžeme si jinak. Zadáme-li nějakou bázi v \mathbb{C}^n , pak všechny zde uvedené matice definují jisté operátory na \mathbb{C}^n . Zvolme si tedy bázi vlastních vektorů b_k operátoru $\hat{A}^\dagger \hat{A}$ a definujme operátor \hat{U} tak, že řekneme, jak působí na jednotlivé vektory báze. Je-li vlastní číslo λ_k nenulové, definujeme prostě $\hat{U}b_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \hat{A}b_k$, tedy právě tak, aby bylo (179) splněno. Potom ovšem pro každé dva vektory b_k, b_l příslušné nenulovým vlastním číslům $\hat{A}^\dagger \hat{A}$ platí

$$\hat{U}b_k \cdot \hat{U}b_l = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \lambda_l}} b_k \cdot \hat{A}^\dagger \hat{A}b_l = \frac{\lambda_l}{\sqrt{\lambda_l \lambda_k}} b_k \cdot b_l = \delta_{kl},$$

což je potřeba, aby \hat{U} byl unitární.

Na vlastních vektorech odpovídajících vlastnému číslu nula bude (179) splněno automaticky, a proto tam \hat{U} už dodefinujeme jakkoli, ale tak, aby byl unitární. To provedeme tak, že vektory $\hat{U}b_k$ pro $\lambda_k > 0$ doplníme na ortonormální bázi \mathbb{C}^n , a tyto doplněné vektory vezmeme (v libovolném pořadí) za obrazy těch b_k , které přísluší vlastnému číslu nula. Tak budeme mít zaručeno, že \hat{U} zachovává skalární součin, a tedy je unitární.

Podobně lze dokázat, že existují i zbylé dva polární rozklady uvedené ve skriptech [PLA] na str. 289. *TB

18.3 Nejbližší řešení soustavy rovnic

Úkol: Označme $\mathcal{S}(A)$ podprostor generovaný sloupci matice A . Necht' b je libovolný vektor; potom pro každé řešení x rovnice $A^T Ax = A^T b$ platí, že Ax je ortogonální projekcí vektoru b do podprostoru $\mathcal{S}(A)$.

Poznámka: Mějme soustavu $Ax = b$ s n rovnicemi a $m < n$ neznámými (A je tedy matice typu $n \times m$). Pro libovolné x je vždy $Ax \in \mathcal{S}(A)$. Výše uvedená tvrzení říká, že pokud tato soustava nemá řešení (b nelze zapsat jako lineární kombinaci sloupců matice A , neboli $Ax \notin \mathcal{S}(A)$), můžeme zkusit řešit alespoň soustavu $A^T Ax = A^T b$. Její řešení x pak má tu vlastnost, že

$$\|Ax - b\| = \min_{x' \in \mathbb{R}^m} \|Ax' - b\|,$$

tedy chyba, které se dopouštíme, je minimální možná. Ortogonální projekce vektoru v na podprostor W je totiž ten vektor $z \in W$, který je „nejblíže“ k v (viz příklad 6.3).

Řešení: Vektor y je ortogonální projekcí vektoru b do podprostoru $\mathcal{S}(A)$ právě tehdy, když je vektor $b - y$ kolmý ke všem vektorům prostoru $\mathcal{S}(A)$, tj. platí $\langle y - b | Az \rangle = 0$ pro všechny vektory $z \in \mathbb{R}^m$. Necht' tedy $y = Ax$, kde x je vektor ze zadání příkladu. Potom $\langle Ax - b | Az \rangle = \langle A^T Ax - A^T b | z \rangle = \langle 0 | z \rangle = 0$, a tedy Ax je vskutku ortogonální projekcí vektoru b do podprostoru $\mathcal{S}(A)$. *DK

18.4 Lineární regrese potřetí jinak

Úkol: Nalezněte „co nejlepší“ řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix},$$

kde jsou x_0, \dots, x_n po dvojicích různá čísla (pro jednoduchost berme vše v reálných číslech) a $f(x_0), \dots, f(x_n)$ libovolná reálná čísla. Rozmyslete si, jak může být vhodné definovat „co nejlepší“ řešení soustavy; nechte se inspirovat příkladem 5.7, který se zabývá lineární regresí metodou nejmenších čtverců.

Řešení: Zavedeme označení, ve kterém má právě uvedená soustava tvar $Ac = f$. Pokud nemáme neobvyklé štěstí a rovnice nejsou až na dvě (resp. jednu) lineárně závislé, pak soustava nemá řešení. Jinak: pravá strana neleží v sloupcovém prostoru matice A . Místo neexistujícího řešení budeme hledat řešení rovnice $Ac = f^\perp$, kde f^\perp značí projekci pravé strany do sloupcového prostoru matice A . Protože se jedná o kolmou projekci, musí platit $f - f^\perp \perp \mathcal{S}(A)$, kde $\mathcal{S}(A)$ značí sloupcový prostor matice A . Uvedenou podmínku kolmosti zapíšeme v řeči matic jako $A^T(f - f^\perp) = 0$. Pak lze psát

$$\begin{aligned} Ac &= f^\perp \\ A^T Ac &= A^T f^\perp \\ A^T Ac &= A^T f. \end{aligned} \tag{180}$$

Místo původního problému $Ac = f$ budeme tedy řešit (180), viz také příklad 18.3. V našem případě je matice $A^T A$ invertibilní (viz vztah 181), a proto

$$c = (A^T A)^{-1} A^T f.$$

Matice na pravé straně, $A^- = (A^T A)^{-1} A^T$, se definuje jako *pseudoinverze* matice A , a lze ji tedy chápat jako určitou „náhradu“ inverzní matice tam, kde A^{-1} neexistuje, konkrétně pro obdélníkové matice $m \times n$, $m < n$, *plné hodnosti*, tedy m (to je tehdy, když je matice $A^T A$ regulární). V případě $m = n$ splývá pseudoinverze s obvyklou inverzí (ověřte).

Pseudoinverzi nebudeme v našem případě explicitně počítat, pouze vyčíslíme výrazy na obou stranách rovnice (180):

$$A^T A = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & n+1 \end{pmatrix} \tag{181}$$

$$A^T f = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n f(x_i)x_i \\ \sum_{i=0}^n f(x_i) \end{pmatrix}.$$

Rovnice (180) pro neznámé a, b je tedy

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^n f(x_i)x_i \\ \sum_{i=0}^n f(x_i) \end{pmatrix},$$

což je stejná soustava jako v úloze 5.7. Objevili jsme tedy alternativní formulaci problému aproximace metodou nejmenších čtverců.

*VP

19 Poklady ukryté v tenzorech

V této kapitole budeme oproti ostatním kapitolám dbát na rozdíl mezi dolními a horními indexy. Složky vektorů mají indexy nahoře, a pokud potřebujeme číslovat vektory (například vektory nějaké báze), píšeme indexy dole. U forem je to přesně naopak.

$$\begin{aligned} \text{vektory: } & \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, & \mathbf{v} &= (v^1, \dots, v^n)^T \\ \text{formy: } & \phi^1, \dots, \phi^n, & \phi &= (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \end{aligned}$$

Automaticky budeme používat Einsteinovu konvenci, tedy sčítání přes dva stejné indexy. Přitom ale musí být jeden index dole a druhý nahoře.

Pokud chápeme horní index jako číslo řádku a dolní index jako číslo sloupce, lze chápat například $A_j^i B_k^j = C_k^i$ jako obvyklé násobení matic AB (v tomto pořadí).

19.1 Jak může vypadat tenzor typu $(2, 1)$

Úkol: Mějme dva pevně zadané vektory $\mathbf{a} = (1, 2)^T$, $\mathbf{b} = (-1, 1)^T$. Uvažujme tenzor typu $(2, 1)$ na \mathbb{R}^2

$$T(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \varphi) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})\varphi(\mathbf{u}) + 2\varphi(\mathbf{v})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}).$$

- Určete složky tenzoru T vzhledem ke kanonické bázi.
- Nalezněte duální bázi k $N = \{(1, 1)^T, (2, -1)^T\}$ a určete složky tenzoru T vzhledem k těmto bázím.
- Je tenzor T symetrický?

Řešení: Označme kanonickou bázi $K = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$ a bázi k ní duální $K' = \{\mathbf{e}'^1, \mathbf{e}'^2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Pojem “složky tenzoru” vychází z následující úvahy: zapišme vektory \mathbf{v} , \mathbf{u} a formu φ pomocí složek jako $\sum v^i \mathbf{e}_i$, $\sum u^j \mathbf{e}_j$, $\sum \varphi_k \mathbf{e}'^k$ a nechme na ně působit tenzor T . Díky linearitě pak platí

$$T(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \varphi) = \sum_{i,j,k} T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}'^k) v^i u^j \varphi_k.$$

Pokud je tedy zadána konkrétní báze (například K), vektory (formy) popisujeme pomocí souřadnic v této bázi (v bázi k ní duální) a nás zajímá, jak působí tenzor T , stačí pro to znát čísla $T(e_i, e_j, e^k) \equiv T_{ij}^k$ (toto je *definice* T_{ij}^k). Těmto číslům se říká *složky tenzoru*.

Spočítat je pro kanonickou bázi jistě nebude problém (s výhodou užíváme $e^1(e_2) = e^2(e_1) = 0$, $e^1(e_1) = e^2(e_2) = 1$). Například

$$T_{12}^1 = T(e_1, e_2, e^1) = (a \cdot e_1)e^1(e_2) + 2e^1(e_1)(b \cdot e_2) = 0 + 2 \cdot 1 = 2,$$

$$T_{21}^2 = T(e_2, e_1, e^2) = (a \cdot e_2)e^2(e_1) + 2e^2(e_2)(b \cdot e_1) = 0 + 2 \cdot (-1) = -2.$$

Všech osm složek lze přehledně zapsat jako

$$T_{1j}^k = \begin{pmatrix} T_{11}^1 & T_{12}^1 \\ T_{11}^2 & T_{12}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{2j}^k = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ad b) Složky tenzoru T v bázi $N = \{f_1, f_2\}$ můžeme spočítat stejně jako pro kanonickou bázi s tím, že místo e_i a e^i dosazujeme f_i a f^i . Díky jednoduchému tvaru tenzoru T dokonce duální bázi není ani zapotřebí počítat (pro zájemce $N' = \{\frac{1}{3}(1, 2), \frac{1}{3}(1, -1)\}$), stačí jen používat $f^i(f_j) = \delta_j^i$. Tímto postupem nám vyjde

$$T'_{1j}^k = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T'_{2j}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Stejný výsledek lze ale získat i jinak: podle pravidel o transformaci složek tenzorů při změně báze. Zopakujme si příslušnou větu. Je-li E matice přechodu od K k N (pozor¹⁰⁰, srovnejte např. s příkladem 4.9), tedy $E(e_1, e_2)^T = (f_1, f_2)^T$, pak se složky vektoru v transformují $v^{i'} = [(E^T)^{-1}]_i^{i'} v^i$ (tedy sloupcový vektor složek v násobíme zleva $(E^T)^{-1}$ — u matice, která stojí v součinu vlevo sčítáme přes sloupcový index, tedy index dole) a složky formy φ podle vztahu $\varphi_{k'} = (E^T)_{k'}^k \varphi_k$ (řádkový vektor složek násobíme zprava E^T).

U obecného tenzoru T je potřeba transformovat *každý* horní index i pomocí $\sum_i [(E^T)^{-1}]_i^{i'} T_{\dots i}$ a každý dolní index k pomocí $\sum_k (E^T)_{k'}^k T_{\dots k}$. Pro náš tenzor to tedy bude

$$T'_{i'j'}^k = T_{ij}^k (E^T)_{i'}^i (E^T)_{j'}^j [(E^T)^{-1}]_k^{k'}.$$

¹⁰⁰Zde používáme jinou konvenci při definici matice přechodu: často se maticí přechodu nazývá matice E^T .

Pokud budeme chtít $T'^{k'}$ opět zapisovat jako matice 2×2 a T_{ij}^k vkládat ve stejném formátu, bude se hodit vztah rozepsat

$$T'_{1j'}^{k'} = T_{1j}^k (E^T)_1^1 (E^T)_{j'}^j [(E^T)^{-1}]_k^{k'} + T_{2j}^k (E^T)_1^2 (E^T)_{j'}^j [(E^T)^{-1}]_k^{k'},$$

$$T'_{2j'}^{k'} = T_{1j}^k (E^T)_2^1 (E^T)_{j'}^j [(E^T)^{-1}]_k^{k'} + T_{2j}^k (E^T)_2^2 (E^T)_{j'}^j [(E^T)^{-1}]_k^{k'},$$

neboli pomocí matic (T_1 je matice se složkami T_{1j}^k)

$$\begin{aligned} T'_1 &= (E^T)^{-1} T_1 E^T (E^T)_1^1 + (E^T)^{-1} T_2 E^T (E^T)_1^2 = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot 1 + \\ &\quad + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot 1 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T'_2 &= (E^T)^{-1} T_1 E^T (E^T)_2^1 + (E^T)^{-1} T_2 E^T (E^T)_2^2 = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot 2 + \\ &\quad + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot (-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ad c) Tenzor T rozhodně symetrický není. Ve složkách to znamená, že (v jakékoliv bázi) existují indexy i, j, k takové, že $T_{ij}^k \neq T_{ji}^k$ (například $T_{21}^2 \neq T_{12}^2$). V řeči vektorů to znamená, že existuje \mathbf{v} , \mathbf{u} , φ tak, že $T(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \varphi) \neq T(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \varphi)$. Když už jsme odhalili nesymetrii ve složkách, nabízí se nám přímo volba $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$, $\varphi = \mathbf{e}^2$.

Symetrie tenzoru znamená, že lze zaměnit dva dolní nebo dva horní indexy, symetrie typu $T_1^2 = T_2^1$ nezkoumáme. *KV

19.2 Jednoduchý tenzor typu (0,2)

Úkol: Mějme zadané dva vektory $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$, $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$. Nalezněte složky tenzoru $T = \mathbf{u} \otimes_{sym} \mathbf{v}$ (symetrický tenzorový součin) vzhledem ke kanonické bázi. T je tedy tenzor typu (0,2) definovaný předpisem

$$T : \varphi, \psi \in \mathbb{R}^{3*} \mapsto \varphi(\mathbf{u})\psi(\mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{v})\psi(\mathbf{u}).$$

Dokažte, že T je symetrický, a ověřte, že $T^{ij} = T^{ji}$.

Dále zvolte $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, -1, 0)$ a nalezněte složky tenzoru T vzhledem k bázi \mathbb{R}^3

$$f_1 = (1, 1, 1), \quad f_2 = (0, 1, 2), \quad f_3 = (0, 0, 1).$$

Musí i v obecné bázi pro složky T platit $T^{kl} = T^{lk}$? Poznámka: nezapomeňte, že se do T dosazují formy a ne vektory.

Řešení: Tenzor má složky

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} 2u^1v^1 & u^1v^2 + u^2v^1 & u^1v^3 + u^3v^1 \\ u^2v^1 + u^1v^2 & 2u^2v^2 & u^2v^3 + u^3v^2 \\ u^3v^1 + u^1v^3 & u^3v^2 + u^2v^3 & 2u^3v^3 \end{pmatrix}.$$

Složky v nekanonické bázi vypočítáme buď dosazováním forem z duální báze $f^1 = (1, 0, 0)$, $f^2 = (-1, 1, 0)$, $f^3 = (1, -2, 1)$, nebo pomocí transformačních vztahů:

$$\begin{aligned} T'^{kl} &= T^{ij} A_i^k A_j^l = A_i^k T^{ij} A_j^l = A_i^k T^{ij} [A^T]_j^l = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

tedy $T' = ATAT'$; do řádků matice A jsme psali výše uvedené složky duální báze (proč?). *KV

19.3 Tenzor setrvačnosti

Úkol: Tenzor setrvačnosti J tělesa v klasické mechanice lze chápat jako tenzor typu $(1, 1)$ na \mathbb{R}^3 .

Budiž ω vektor úhlové rychlosti a φ_n forma, která přiřazuje vektoru x velikost jeho (kolmého) průmětu do směru n (násobenou délkou n). Tenzor J pak pracuje následovně (pokud dosazujeme formu s jednotkovým vektorem n): $J(\omega, \varphi_n)$ je velikost průmětu momentu hybnosti uvažovaného tělesa do směru n , je-li jeho úhlová rychlost ω .

Pro jediný hmotný bod (o hmotnosti m) v bodě (pevném) $r = (r^1, r^2, r^3)$ má tenzor setrvačnosti tvar

$$J(\omega, \varphi_n) = \varphi_n [m(\omega \times r) \times r].$$

1. Vysvětlete, proč lze libovolný tenzor typu $(1, 1)$ na \mathbb{R}^n ztotožnit s lineárním zobrazením $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
2. Určete složky tenzoru J v kanonické bázi K . Poznámka: pro těleso složené z více hmotných bodů je celkový tenzor setrvačnosti roven součtu tenzorů odpovídajících jednotlivým bodům.
3. Nalezněte složky tenzoru J vzhledem k bázi $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

Řešení: 1. Tenzor T typu $(1, 1)$, tedy funkci $T(x, \varphi)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^*$ lze ztotožnit s lineárním zobrazením $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{T}(x) = T(x, e^1)e_1 + \dots + T(x, e^n)e_n,$$

kde $\{e_i\}$ je libovolná báze \mathbb{R}^n a $\{e^i\}$ báze k ní duální. Je-li zadán tenzor T , je toto zobrazení jednoznačně definováno; známe-li naopak zobrazení \mathbf{T} , lze složky T , neboli $T(e_i, e^j)$, zjistit tak, že vektor $\mathbf{T}(e_i)$ rozložíme do báze $\{e^j\}$.

Vidíme tedy, že T_j^i lze chápat jako matici, která zobrazuje \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n .

2., 3. V kanonické bázi (indexy vektoru r píšme pro přehlednost nesytematicky dolů)

$$J = \begin{pmatrix} -r_3^2 - r_2^2 & r_1 r_2 & r_1 r_3 \\ r_1 r_2 & -r_1^2 - r_3^2 & r_2 r_3 \\ r_1 r_3 & r_2 r_3 & -r_1^2 - r_2^2 \end{pmatrix},$$

v bázi B je $J' = E^{-1}JE$, tedy

$$\begin{pmatrix} -r_3^2 - r_2^2 & r_1 r_2 + r_1 r_3 & r_1 r_3 \\ +r_1 r_2 + r_1 r_3 & r_1^2 - r_3^2 + r_2 r_3 & r_2 r_3 - r_1 r_3 \\ -r_1^2 + r_2^2 & -r_1 r_2 - r_1 r_3 & r_2 r_3 - r_1 r_3 \\ +r_2 r_3 - r_1 r_3 & -r_2^2 + r_3^2 & -r_1^2 - r_2^2 - r_2 r_3 \\ -r_2^2 + r_3^2 & +r_1 r_3 - r_1 r_2 & \end{pmatrix},$$

kde E je matice, kterou když násobíme sloupcový vektor složek x vůči bázi B , dá vektor složek x v kanonické bázi.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*KV

19.4 Tenzory ve speciální relativitě

Úkol: Ve speciální relativitě pracujeme s čtyřvektory, které konstruujeme tak, že k třírozměrnému vektoru přidáme časovou složku (v různých konvencích zápisu jí přiřazujeme buď index 0 nebo 4). Tak např. čtyřvektor souřadnice je $x^\mu = (ct, \mathbf{x}) = (ct, x^1, x^2, x^3)$. Spouštění indexů provádíme pomocí Minkowského metrického tenzoru¹⁰¹ $\eta_{\mu\nu}$, jehož složky jsou 0, pokud $\mu \neq \nu$, dále -1 pro $\mu = \nu = 0$ a konečně 1 pro $\mu = \nu = 1, 2, 3$. Analogicky zvedání indexů zprostředkuje tenzor $\eta^{\mu\nu}$, pro nějž platí $\eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$. Vektor x^μ a příslušný kovektor $x_\mu = x^\mu\eta_{\mu\nu}$ se tedy liší pouze znaménkem u časové složky. Čtyřvektorem pak rozumíme objekt, jehož složky se při Lorentzově transformaci s maticí Λ_ν^μ transformují stejně jako složky čtyřvektoru polohy x^μ .

- Najděte podmínku, jakou musí splňovat matice Λ_ν^μ , jestliže víte, že prostorčasový interval $\sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 - c^2 dt^2$ je invariantní vůči Lorentzově transformaci.
- Ukažte, že složky čtyřgradientu $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu = (\frac{1}{c}\partial/\partial t, \partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3)$ se transformují (jak jinak) kontragradientně.
- Elektromagnetické pole ve vakuu charakterizujeme skalárním a vektorovým potenciálem φ a A , které jsou s ním svázané vztahy $E = -\text{grad } \varphi - \partial A/\partial t$ a $B = \text{rot } A$. V relativitě jsou oba potenciály složkami čtyřpotenciálu

$$A^\mu = \left(\frac{\varphi}{c}, A \right).$$

¹⁰¹Volíme tzv. „prostorupodobnou“ konvenci pro metriku $-+++$, také nazývanou „metrikou východního pobřeží USA“, která je oblíbená mezi experty na obecnou relativitu; Einstein původně psal čas jako ryze imaginární veličinu, díky čemuž fakticky užíval metriku $++++$. Opačně, „časupodobné“ konvenci pro metriku $+---$ „ze západního pobřeží USA“ dávají přednost částicové fyzice. Teorie strun sjednocuje kvantovou teorii pole s obecnou relativitou, a tomu odpovídá i míra schizofrenie v konvencích strunových teoretiků.

Připomeňte si vlnové rovnice

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A^\mu = -\mu_0 j^\mu, \quad (182)$$

kde μ_0 je permeabilita vakua (neplést se sčítacím indexem!) a $j^\mu = (\rho c, \mathbf{j})$ jsou složky čtyřproudu (ρ je nábojová hustota v daném bodě, \mathbf{j} je hustota proudu). Co znamená rovnice $\partial_\mu A^\mu = 0$?

d) Pomocí čtyřpotenciálu definujeme antisymetrický tenzor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (183)$$

Jak vypadají složky tohoto tenzoru? Dokažte, že pro tenzor $F_{\mu\nu}$ platí rovnice

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu, \quad (184)$$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \quad (185)$$

Co znamenají tyto rovnice?

e) Energetické poměry v elektromagnetickém poli se popisují tenzorem energie a hybnosti, jenž definujeme opět po složkách jako

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(\eta_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right).$$

Zákony zachování energie a hybnosti pak můžeme zapsat v jednotném tvaru

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} j_\alpha. \quad (186)$$

Dokažte tyto zákony pomocí rovnic (184) a (185). Ve výrazu stojícím na pravé straně (186) snad poznáte Lorentzovu čtyřsílu. Ukažte také, že tenzor energie a hybnosti má nulovou stopu.

Řešení: a) Prostorčasový interval je, jak jste si jistě všimli, roven $dx^\mu dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Z požadavku jeho invariance vůči Lorentzově transformaci dostaneme

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\alpha\beta} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta dx^\mu dx^\nu,$$

a odtud

$$\eta_{\alpha\beta}\widetilde{\Lambda}_\mu^\alpha\Lambda_\nu^\beta = \eta_{\mu\nu}.$$

Tato rovnost není nic jiného než složkový zápis rovnosti $A^T I_- A = I_-$ z příkladu 10.3, kde také najdete některé další vlastnosti prvků Lorentzovy grupy.

b) Označme $\widetilde{x}^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$ transformovanou souřadnicí. Jak se transformují složky *gradientu* skalární funkce f , zjistíme, pokud umíme derivovat složenou funkci (pro zkrácení píšeme $\widetilde{\partial}_\mu = \partial/\partial\widetilde{x}^\mu$).

$$\partial_\mu f = \widetilde{\partial}_\nu f \frac{\partial\widetilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} = \widetilde{\partial}_\nu f \Lambda_\mu^\nu,$$

tedy gradient se transformuje inverzní a transponovanou maticí (srovnej s $\widetilde{x}^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$), tj. *kontragredientně*. Gradient je proto tenzor typu (1, 0) a správně tedy jeho složkám píšeme index dole.

c) Přímou z definice čtyřpotenciálu dostaneme

$$0 = \partial_\mu A^\mu = \operatorname{div} A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

což je známá Lorentzova kalibrační podmínka, díky níž vypadají vlnové rovnice (182) tak hezky, jak vypadají. Jistě vám totiž neuniklo, že čtyřpotenciál svou definicí není určen jednoznačně — lze k němu např. přičíst čtyřgradient libovolné skalární funkce, aniž by se změnila pole E a B (ověřte):

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f = A^\mu + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right).$$

d) Prostorové složky *tenzoru elektromagnetického pole* $F_{\mu\nu}$ jsou (indexy od 1 do 3 budeme značit malými latinskými písmeny) $F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B^k$, jsou tedy rovny složkám magnetické indukce. Zbývající nenulové složky (tenzor je antisymetrický!) jsou $F_{i0} = E_i/c$. Tenzor tedy nese informaci o elektrické i magnetické složce pole. Pro větší názornost můžeme tenzor zapsat jako matici

$$F_{\mu\nu} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_1 & -\frac{1}{c}E_2 & -\frac{1}{c}E_3 \\ \frac{1}{c}E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ \frac{1}{c}E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ \frac{1}{c}E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

ale musíme si být vědomi toho, že tento zápis není správný: do matice lze zapsat pouze složky tenzoru typu (1, 1), $F_{\mu\nu}$ má *dva sloupcové* indexy. Mohli bychom samozřejmě vypsat $F_{\nu}^{\mu} = F_{\rho\nu}\eta^{\rho\mu}$, ale to by nevynikla tak pěkně antisymetrie $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$.

Dokažme rovnice (184) a (185). První z nich dostaneme přímočaře

$$\partial_{\nu}F^{\mu\nu} = \partial_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial_{\nu}\partial^{\nu}A^{\mu} = \mu_0j^{\mu}.$$

První člen je totiž nulový díky Lorentzově kalibraci $\partial_{\nu}A^{\nu} = 0$ a druhý jsme upravili pomocí vlnové rovnice. Konečně rovnost (185) je triviálním důsledkem záměnnosti parciálních derivací, stačí dosadit (183).

Když se podíváme pozorně, uvědomíme si, že rovnice (184) a (185) nejsou ničím jiným než relativisticky invariantním zápisem *Maxwellových rovnic*. Rovnice (184) v sobě pro $\mu = 0$, resp. $\mu = 1, 2, 3$ zahrnuje vztahy

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \text{ resp. } \operatorname{rot} B = \mu_0j + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t},$$

a pokud v (185) zvolíme indexy $\lambda = 1, \mu = 2, \nu = 3$, resp. $\lambda = 0, \mu, \nu \in \{1, 2, 3\}, \mu \neq \nu$, dostaneme

$$\operatorname{div} B = 0, \text{ resp. } \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}.$$

e) Nejprve všechny členy v $T^{\mu\nu}$ derivujeme jako součin a pomůžeme si vztahem $\partial^{\mu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 2F_{\alpha\beta}\partial^{\mu}F^{\alpha\beta}$

$$\mu_0\partial_{\nu}T^{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta}F^{\nu\beta}\partial_{\nu}F^{\mu\alpha} + \eta_{\alpha\beta}F^{\mu\alpha}\partial_{\nu}F^{\nu\beta} - \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\partial^{\mu}F^{\alpha\beta}. \quad (187)$$

V druhém členu poznáváme $-\mu_0F^{\mu\alpha}j_{\alpha}$ (antisymetrie tenzoru $F^{\mu\nu}$ a rovnice (184)). První člen upravíme pomocí definice tenzoru $F^{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta}F^{\nu\beta}\partial_{\nu}F^{\mu\alpha} &= \eta_{\alpha\beta}F^{\nu\beta}(\partial_{\nu}\partial^{\mu}A^{\alpha} - \partial_{\nu}\partial^{\alpha}A^{\mu}) = \\ &= F^{\nu\beta}(\partial_{\nu}\partial^{\mu}A_{\beta} - \partial_{\nu}\partial_{\beta}A^{\mu}) = F^{\nu\beta}\partial_{\nu}\partial^{\mu}A_{\beta}, \end{aligned}$$

druhý člen je totiž nulový — jde o součin antisymetrického tenzoru $F^{\nu\beta}$ se symetrickým $\partial_{\nu}\partial_{\beta}$. Konečně třetí člen v (187) upravíme

stejným způsobem (a ve druhém členu přeznačíme sčítací indexy)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\partial^\mu F^{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}(\partial^\mu\partial^\alpha A^\beta - \partial^\mu\partial^\beta A^\alpha) = \\ &= -\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\alpha A^\beta + \frac{1}{2}F_{\beta\alpha}\partial^\mu\partial^\alpha A^\beta = F_{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\beta A^\alpha. \end{aligned}$$

Pohledem na takto upravený první a třetí člen rovnice (187) zjistíme, že jejich součet je nula (aby to bylo skutečně vidět, je jenom potřeba opět přejmenovat sčítací indexy a užít antisymetrie $F_{\alpha\beta} + F_{\beta\alpha} = 0$). Závěr tedy je

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha}j_\alpha, \quad (188)$$

což bylo dokázat. Budete-li pátrat po tom, jak vypadají složky tenzoru energie a hybnosti, zjistíte, že složkou T^{00} je hustota energie elektromagnetického pole $w = \frac{1}{2}(\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2)$, složky T^{0i} obsahují hustotu toku energie (Poyntingův vektor, viz níže) dělenou rychlostí světla a ostatní složky jsou prostě třírozměrnou analogií celého tenzoru $T^{\mu\nu}$, tedy složky klasického tenzoru hustoty toku hybnosti elektromagnetického pole¹⁰² $T^{ij} = -\tilde{T}^{ij} = -\varepsilon_0 E^i E^j - \frac{1}{\mu_0} B^i B^j + \delta^{ij}w$:

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} w & \frac{1}{c}S^i \\ \hline \frac{1}{c}S^i & -\tilde{T}^{ij} \end{array} \right).$$

Z rovnice (188) dostaneme pro $\mu = 0$ zákon zachování energie ve tvaru

$$\frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{c}\operatorname{div} S = \partial_0 T^{00} + \partial_j T^{0j} = -\frac{1}{c}\mathbf{E} \cdot \mathbf{j},$$

kde $S = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ je *Poyntingův vektor*, který chápeme jako tok energie pole v daném bodě. Pro $\mu = 1, 2, 3$ získáme zákon zachování hybnosti

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial S_i}{\partial t} - \partial_j T^{ij} = \partial_0 T^{i0} - \partial_j T^{ij} = -(\rho E + \mathbf{j} \times \mathbf{B}).$$

Stopu $T^{\mu\nu}$ spočítáme jednoduše tak, že tenzor přenásobíme $\eta_{\mu\nu}$: můžeme si buďto vzít přímo definici pomocí F a použít $\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = 4$,

¹⁰²Složky klasického tenzoru značíme \tilde{T}^{ij} .

nebo počítat $T^{\mu\nu}$ tak, jak jsme je právě vyjádřili pomocí E a B a nezapomenout započítat T^{00} s minusem. Stopa klasického tenzoru \tilde{T}^{ij} je tím pádem rovna $-T^{00} = -w$. *TB

19.5 O Levi–Civitově tenzoru

Úkol: Dokažte následující tvrzení pro Levi–Civitův tenzor ε_{ijk}

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} &= \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} &= 2\delta_{il} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} &= 6 \\ 0 &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} + \varepsilon_{jlk}\varepsilon_{imk} + \varepsilon_{lik}\varepsilon_{jmk} \\ \varepsilon_{ijk}\delta_{lm} &= \varepsilon_{mjk}\delta_{il} + \varepsilon_{mki}\delta_{jl} + \varepsilon_{mij}\delta_{kl}\end{aligned}\tag{189}$$

V příkladu se používá Einsteinova sumační konvence. Činíme zde výjimku v rámci této kapitoly a všechny indexy píšeme dolů, neboli ztotožňujeme a^i s a_i . To můžeme udělat, pokud s vektory pracujeme pouze v ortonormálních bázích. Všechny indexy mohou nabývat hodnot jedna až tři.

Řešení: Nejprve si připomeneme definici Levi–Civitova tenzoru. ε_{ijk} je rovno $+1$ pokud je ijk sudá permutace trojice 123, tzn. $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = +1$, je rovno -1 pokud je ijk lichá permutace trojice 123, tzn. $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$ a je rovno nule pokud se aspoň dva indexy shodují, např. $\varepsilon_{133} = 0$.

Základem našich úvah bude toto pozorování:

$$\varepsilon_{ijk} = \det \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{pmatrix},\tag{190}$$

skutečně, pokud jsou dva indexy stejné, tak je determinant nulový (dva stejné sloupce), pokud je ijk sudá permutace trojice 123, tak

se jedná o determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ve které byla provedena sudá permutace sloupců¹⁰³ (tedy taková, která nemění znaménko determinantu). Obdobně pokud je ijk lichá permutace trojice 123, pak permutace změní znaménko determinantu výše uvedené matice na -1 .

Na základě této definice si můžete rozmyslet, že ε_{ijk} jsou skutečně složky tenzoru typu $(3, 0)$ vzhledem ke kanonické bázi. Tento tenzor je totálně *antisymetrický* ve všech třech argumentech (to je zřetelně vidět na jeho složkách) a působí tak, že třem vektorům a, b, c (a nula formám) přiřadí číslo $V = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = a \cdot (b \times c)$, neboli (orientovaný) objem rovnoběžnostěnu definovaného těmito vektory. *Totální antisymetrie* je zřejmá i jinak: odpovídá změnám znamének determinantu při záměně *libovolných* dvou sloupců v (190).

Jak se určí takový objem (tedy hodnota tenzoru), pokud jsou vektory a, b, c zadané pomocí složek v jiné (čárkované) bázi? Spočítá se opět $\varepsilon_{ijk} a'_i b'_j c'_k$, čímž vyjde (orientovaný) objem v jednotkách objemu rovnoběžnostěnu definovaného novými bázeovými vektory (označme objem tohoto rovnoběžnostěnu K ; následující úvahy provedeme i pro neortonormální báze, kde může být $K \neq 1$). Správný výsledek je tedy $V = K \varepsilon_{ijk} a'_i b'_j c'_k$.

Podívejme se, jak se budou transformovat složky ε . Změna báze (od původní k čárkované) nechť je popsána maticí přechodu A ; kontravariantní složky tenzoru se pak budou transformovat pomocí $A_{i'i}$. Dosazením do definice (190) vyjde

$$\varepsilon'_{i'j'k'} = \varepsilon_{ijk} A_{ii'} A_{jj'} A_{kk'} = \det \begin{pmatrix} A_{1i'} & A_{1j'} & A_{1k'} \\ A_{2i'} & A_{2j'} & A_{2k'} \\ A_{3i'} & A_{3j'} & A_{3k'} \end{pmatrix}.$$

Stejně jako v kanonické bázi je i $\varepsilon'_{i'j'k'}$ nula, pokud jsou dva indexy stejné (dva stejné sloupce v determinantu) a správně mění znaménko při zaměňování indexů (prohazují se sloupce v determinantu). Pokud

¹⁰³Každou permutaci můžeme rozložit na transpozice. Těm tady odpovídá prohození dvou sloupců, které, jak víme, mění znaménko determinantu.

jsou všechny indexy různé, je hodnota $\varepsilon'_{i'j'k'}$ až na znaménko rovna $\det A$:

$$\varepsilon'_{i'j'k'} = \det A \varepsilon_{ijk} \delta_{ii'} \delta_{jj'} \delta_{kk'}$$

Přitom ale víme, že determinant A je právě objem rovnoběžnostěny definované bázovými vektory čárkované báze. Díky tomu platí

$$V = \varepsilon'_{i'j'k'} a'_{i'} b'_{j'} c'_{k'} = K \varepsilon_{ijk} a'_i b'_j c'_k,$$

složky ε mají správné transformační vlastnosti, a jsou tedy složkami tenzoru.

Místo právě provedených úvah o tom, jak se transformují složky tenzoru udávajícího objem rovnoběžnostěny, se možná někteří čtenáři spokojí s intuitivním tvrzením, že objem (v jednotkách objemu jednotkové krychle) je veličina nezávislá na volbě báze. My jsme nyní ukázali, že složky tohoto tenzoru jsou stejné (ε_{ijk}) ve všech pravotočivých bázích, jejichž vektory definují rovnoběžnostěn jednotkového objemu (tedy takových, že $\det A = 1$). V ostatních bázích jsou složky $\det A \varepsilon_{ijk}$.

Nyní se můžeme pustit do odvozování vzorců ze zadání (vše píšeme dále opět pouze pro ortonormální báze). Především

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \delta_{1l} & \delta_{1m} & \delta_{1n} \\ \delta_{2l} & \delta_{2m} & \delta_{2n} \\ \delta_{3l} & \delta_{3m} & \delta_{3n} \end{pmatrix},$$

použijeme větu o determinantu součinu a pro první matici také $\det A = \det A^T$. S využitím $\delta_{ij} \delta_{ik} = \delta_{1j} \delta_{1k} + \delta_{2j} \delta_{2k} + \delta_{3j} \delta_{3k} = \delta_{jk}$ (neboli $\dots = \dots$ zapsaného ve složkách) dostaneme

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{pmatrix},$$

čímž jsme dokázali první tvrzení. Toto je mimochodem tenzor typu $(6, 0)$, který jsme dostali *tenzorovým součinem* ε se sebou samým.

Abychom dostali další požadované vzorce, stačí jen vhodně *úžit*¹⁰⁴ tenzor $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn}$, jehož vyjádření jsme právě našli. Máme

¹⁰⁴Správně by se úžení provedlo $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} G^{kn}$, zde ale klademe $G^{kn} = \delta^{kn}$, neboli ztotožňujeme prostor s jeho duálem (viz příklad 13.2).

proto (pro přehlednost výslovně píšeme sumaci přes opakující se index)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} &= \sum_{k=1}^3 \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{ik} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jk} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kk} \end{pmatrix} = \\
&= \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} \begin{vmatrix} \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} \end{vmatrix} - \delta_{jk} \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} \end{vmatrix} + \delta_{kk} \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{il} & \delta_{im} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}
\end{aligned}$$

Použili jsme $\delta_{kk} = \text{Tr.} = 3$ a získali jsme další pěkný tenzor typu (4,0). K odvození dalšího vzorce stačí užít tento tenzor

$$\delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jl} = 3\delta_{il} - \delta_{il} = 2\delta_{il},$$

a konečně

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 6,$$

čímž jsme získali postupně tenzor typu (2,0) a (0,0), neboli skalár (číslo, které se nemění při změně báze).

*Jacobiho identitu*¹⁰⁵, která činí z prostoru \mathbb{R}^3 se sčítáním a komutátorem $[a, b] = a \times b$ *Lieovu algebru*,

$$0 = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} + \varepsilon_{jlk}\varepsilon_{imk} + \varepsilon_{lik}\varepsilon_{jmk},$$

dokážeme tak, že každý člen tohoto součinu rozepíšeme pomocí vzorce (189).

Konečně poslední tvrzení dostaneme pomocí nedávno odvozeného vzorečku $2\delta_{il} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}$:

$$\varepsilon_{ijk}\delta_{lm} = \varepsilon_{ijk} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_{lno}\varepsilon_{mno} \right) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lno})\varepsilon_{mno}.$$

¹⁰⁵ $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$

Dosadíme za $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lno}$ podle prvního z odvozených vzorců (determinant)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{ko} + \delta_{io}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{in}\delta_{jo}\delta_{kl} - \\ & \quad - \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{ko} - \delta_{io}\delta_{jn}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jo}\delta_{kn}) \varepsilon_{mno} = \\ & = \frac{1}{2} (\delta_{il}\varepsilon_{mjk} + \delta_{jl}\varepsilon_{mki} + \delta_{kl}\varepsilon_{mij} - \delta_{jl}\varepsilon_{mik} - \delta_{kl}\varepsilon_{mji} - \delta_{il}\varepsilon_{mkj}) \end{aligned}$$

a nakonec si uvědomíme, že díky $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$

$$\varepsilon_{ijk}\delta_{lm} = \varepsilon_{mjk}\delta_{il} + \varepsilon_{mki}\delta_{jl} + \varepsilon_{mij}\delta_{kl}.$$

*VP

19.6 Symetrické a antisymetrické tenzory

Úkol: Mějme vektorový prostor V dimenze n .

1. Určete, jaká je dimenze prostoru S_k všech totálně symetrických tenzorů typu $(0, k)$ nad V .
2. Určete, jaká je dimenze prostoru A_k všech totálně antisymetrických tenzorů typu $(0, k)$ nad V . Je součet dimenzí A_k a S_k roven dimenzi prostoru všech tenzorů typu $(0, k)$ nad V ?
3. Najděte příklad symetrického a příklad antisymetrického tenzoru typu $(0, 2)$ nad \mathbb{R}^2 .

Řešení: 1. Pro pohodlí zavedeme *symetrizovaný tenzorový součin*: pro dva vektory jako $v \otimes_+ w = v \otimes w + w \otimes v$ (místo \otimes_+ se také používá \odot), pro více vektorů¹⁰⁶

$$\bigotimes_{i=1}^k \oplus_+ v_i \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{\pi} v_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes v_{\pi(k)},$$

kde sčítáme přes všechny permutace množiny $\{1, \dots, k\}$. Symetrizovaný tenzorový součin vektorů v_1, \dots, v_k dostojí svému jménu a je skutečně (totálně) symetrickým tenzorem typu $(0, k)$. Vyzkoušíme to

¹⁰⁶Někdy bývá v definici ještě faktor $1/k!$.

na příkladě $T = v \otimes_+ w$: tento tenzor lze chápat jako zobrazení, které (nula vektorům a) dvěma formám φ, ψ přiřadí bilineárním způsobem číslo:

$$T(\varphi, \psi) = \varphi(v)\psi(w) + \varphi(w)\psi(v).$$

Nikdo jistě nepochybuje o tom, že čísla $T(\varphi, \psi)$ a $T(\psi, \varphi)$ jsou pro libovolné dvě formy stejné: tenzor T je tedy symetrický.

Budiž nyní $\{e_1, \dots, e_n\}$ báze V . Libovolný symetrický tenzor typu $(0, k)$ pak lze zapsat jako lineární kombinaci tenzorů typu

$$T_I^+ = \bigotimes_{i \in I}^+ e_i, \quad \text{kde } I = \{i_1, \dots, i_k\}, \quad 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n,$$

bázové tenzory jsou tedy indexovány skupinami¹⁰⁷ I , k prvků této skupiny představuje právě k dolních indexů. Tenzory T_I^+ , jejichž skupiny I by obsahovaly stejná čísla a lišily by se jen jejich pořadím jsou zřejmě totožné.

Dimenze S_k je tedy rovna právě počtu všech k -prvkových skupin I , které je možno vybrat z prvků $\{1, \dots, n\}$ bez ohledu na pořadí s tím, že se prvky mohou opakovat. Abychom nezapočítali některé výběry, které se liší jen pořadím prvků, vícekrát, je vhodné prvky seřadit například podle velikosti, tedy $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$.

Počet výběrů (*kombinací s opakováním*) můžeme zjistit například touto úvahou: představme si $n + k - 1$ políček v řadě. Na každém políčku může být buď křížek (těch máme k) nebo přepážka (těch je $n - 1$). Začneme na prvním políčku a spočítáme křížky v řadě až po první přepážku. Toto číslo (může to být i nula, je-li na prvním políčku přepážka) znamená, kolikrát máme do našeho výběru I vzít jedničku. Počet křížků mezi první a druhou přepážkou znamená, kolik máme vzít dvojek, a podobně až po křížky mezi $(n - 1)$ -ní přepážkou a koncem řady, které určují, kolikrát bude ve výběru číslo n . Každému výběru takto odpovídá právě jedno rozmístění křížků a přepážek¹⁰⁸, a těchto rozmístění je právě

$$\dim S_k = \binom{n + k - 1}{n - 1}.$$

¹⁰⁷Pojem skupina užíváme proto, abychom zdůraznili, že se zde mohou narozdílit od množin prvky opakovat.

¹⁰⁸To jsou permutace s opakováním na množině všech přepážek a křížků.

2. Analogicky předchozímu bodu definujeme *antisymmetrizovaný tenzorový součin*. Pro dva vektory to bude $v \otimes_{-} w = v \otimes w - w \otimes v$ (často se používá také označení $v \wedge w$), pro více vektorů¹⁰⁹

$$\bigotimes_{i=1}^k v_i \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{\pi} \text{zn } \pi v_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes v_{\pi(k)}.$$

Z této definice plyne, že pokud se mezi násobenými vektory v součinu T vyskytnou dva stejné vektory, musí být $T = -T$, a tedy $T = 0$ (uvedený součin je antikomutativní). Pokud takto násobíme dvě stejné množiny vektorů a pouze změníme jejich pořadí, musíme tedy dostat totéž, případně totéž až na znaménko.

Bázi v A_k tvoří pro $k \leq n$ tenzory

$$T_I^- = \bigotimes_{i \in I} e_i, \quad \text{kde } I = \{i_1, \dots, i_k\}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

a takových tenzorů existuje prostě $\binom{n}{k}$. Pro $k > n$ se musí nutně v uvedeném součinu dva vektory opakovat, součin je tudíž nula a vidíme, že A_k obsahuje v takovém případě pouze nulový tenzor.

Báze prostoru *všech* tenzorů typu $(0, k)$ je tvořena součiny

$$\bigotimes_{i \in I} e_i, \quad \text{kde } I = \{i_1, \dots, i_k\}, i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\},$$

v množině I tedy v tomto případě záleží na pořadí. Dimenze tohoto prostoru je tudíž n^k , což je pro $n > 1$ a $k > 2$ vždy více než $\dim S_k + \dim A_k$. Důvod je ten, že zatímco obecný tenzor typu $(0, 2)$ lze vždy napsat ve tvaru „nějaký symetrický plus nějaký antisymetrický tenzor“

$$T(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}[T(\varphi, \psi) + T(\psi, \varphi)] + \frac{1}{2}[T(\varphi, \psi) - T(\psi, \varphi)] \stackrel{\text{df}}{=} T^{(s)}(\varphi, \psi) + T^{(a)}(\varphi, \psi),$$

mezi tenzory typu $(0, k)$, $k > 2$ existují například tenzory symetrické jen v prvních dvou indexech (a nikoliv jen tenzory totálně

¹⁰⁹I zde bývá někdy v definici ještě faktor $1/k!$.

symetrické). Pro obecné k se různé typy symetrie tenzorů klasifikují pomocí *Youngových schémat*; ta samozřejmě velmi úzce souvisí se strukturou symetrických grup, neboli grup všech permutací k -prvkové množiny.

3. Odpovědi na tyto dvě otázky již vlastně máme. Symetrický tenzor je například $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$ či $\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$ (prostor S_2 má dimenzi 3). Antisymetrický tenzor existuje jediný (až na násobek), a to $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$. *KV

19.7 Tenzorové součiny operátorů

Úkol: Necht' $\{\mathbf{e}_i\}$, resp. $\{f_j\}$ je báze vektorového prostoru \mathbb{V} , resp. \mathbb{W} a necht' \hat{A} , resp. \hat{B} je lineární operátor na \mathbb{V} , resp. \mathbb{W} . Potom na $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ definujeme tenzorový součin těchto operátorů jeho působením na jednotlivé vektory báze $(\hat{A} \otimes \hat{B})(\mathbf{e}_i \otimes f_j) = (\hat{A}\mathbf{e}_i) \otimes (\hat{B}f_j)$.

a) Dokažte, že platí

$$\text{Tr}(\hat{A} \otimes \hat{B}) = \text{Tr} \hat{A} \cdot \text{Tr} \hat{B}. \quad (191)$$

b) Z libovolného operátoru \hat{C} na $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ lze úžením přes indexy působící na prostoru \mathbb{W} dostat operátor na \mathbb{V} . Takovou restrikci budeme značit $\text{Tr}_{\mathbb{W}} \hat{C}$, neboť se jedná o jakousi částečnou stopu. Ukažte na příkladu, že tato částečná stopa není obecně invariantní vůči cyklické záměně, tj. neplatí

$$\text{Tr}_{\mathbb{W}}(\hat{C}\hat{D}) = \text{Tr}_{\mathbb{W}}(\hat{D}\hat{C}) \quad (192)$$

pro jakékoliv operátory \hat{C}, \hat{D} na $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$.

c) Předved'te, že je-li jeden z operátorů \hat{C}, \hat{D} speciálního tvaru, např. $\hat{D} = \cdot_{\mathbb{V}} \otimes \hat{d}$ (\hat{d} je operátor na \mathbb{W}), potom už (192) platí.

Řešení: a) Maticové elementy C_{kl}^{ij} obecného operátoru \hat{C} na $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ vzhledem k bázi $\{\mathbf{e}_i \otimes f_j\}$ definujeme pomocí

$$\hat{C}(\mathbf{e}_k \otimes f_l) = (\mathbf{e}_i \otimes f_j) C_{kl}^{ij}.$$

Pro $\widehat{C} = \widehat{A} \otimes \widehat{B}$ je $C_{kl}^{ij} = A_k^i B_l^j$ (ověřte) a

$$\text{Tr}(\widehat{A} \otimes \widehat{B}) = (A \otimes B)_{ij}^{ij} = A_i^i B_j^j = \text{Tr } \widehat{A} \cdot \text{Tr } \widehat{B}.$$

c,b) Platí $(CD)_{kl}^{ij} = C_{st}^{ij} D_{kl}^{st}$ a dále stejně jako v a):

$$\left(\text{Tr}_{\mathbb{W}}(\widehat{C}\widehat{D}) \right)_j^i = (CD)_{jk}^{ik} = C_{st}^{ik} D_{jk}^{st} = C_{st}^{ik} \delta_j^s d_k^t = C_{jt}^{ik} d_k^t,$$

a naopak

$$\left(\text{Tr}_{\mathbb{W}}(\widehat{D}\widehat{C}) \right)_j^i = D_{st}^{ik} C_{jk}^{st} = \delta_s^i d_t^k C_{jk}^{st} = d_t^k C_{jk}^{it} = C_{jt}^{ik} d_k^t.$$

Zároveň je vidět, že obecně nemusí být $C_{st}^{ik} D_{jk}^{st} = C_{jk}^{st} D_{st}^{ik}$: obzvláště názorné to je, pokud $\widehat{C} = \widehat{C}_{\mathbb{V}} \otimes \widehat{C}_{\mathbb{W}}$, $\widehat{D} = \widehat{D}_{\mathbb{V}} \otimes \widehat{D}_{\mathbb{W}}$. V takovém případě je totiž

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\mathbb{W}} \widehat{C}\widehat{D} &= \text{Tr}_{\mathbb{W}}(\widehat{C}_{\mathbb{V}}\widehat{D}_{\mathbb{V}}) \otimes (\widehat{C}_{\mathbb{W}}\widehat{D}_{\mathbb{W}}) = \widehat{C}_{\mathbb{V}}\widehat{D}_{\mathbb{V}} \text{Tr}(\widehat{C}_{\mathbb{W}}\widehat{D}_{\mathbb{W}}) \\ \text{Tr}_{\mathbb{W}} \widehat{D}\widehat{C} &= \widehat{D}_{\mathbb{V}}\widehat{C}_{\mathbb{V}} \text{Tr}(\widehat{C}_{\mathbb{W}}\widehat{D}_{\mathbb{W}}), \end{aligned}$$

a tyto operátory $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ jsou totožné pouze v případě, že $[\widehat{C}_{\mathbb{V}}, \widehat{D}_{\mathbb{V}}] = 0$. Chápeme tedy již, proč jsme byli úspěšní v případě $\widehat{D} = \mathbb{V} \otimes \widehat{d}$.

*TB

19.8 Rozložitelné antisymetrické tenzory a vektorový součin

Úkol: Vnější algebrou $\Lambda(\mathbb{V})$ vektorového prostoru \mathbb{V} nazýváme direktní součet

$$\Lambda(\mathbb{V}) = \mathbb{R} \oplus \Lambda^1(\mathbb{V}) \oplus \dots \oplus \Lambda^n(\mathbb{V}),$$

kde¹¹⁰ $\Lambda^k(\mathbb{V})$ je prostor totálně antisymetrických tenzorů typu $(0, k)$ z $\otimes_{i=1}^k \mathbb{V}$ a n je dimenze \mathbb{V} .

Jejich prvky vytváříme z vektorů \mathbb{V} pomocí antisymetrizovaného tenzorového součinu (viz také příklad 19.6)

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{\pi} \text{zn } \pi v_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes v_{\pi(k)} \in \Lambda^k(\mathbb{V}),$$

¹¹⁰ \mathbb{R} si lze představit jako „ \mathbb{V}^0 “.

například $v_1 \wedge v_2 = v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$. Platí tedy $v \wedge w = -w \wedge v$ a pokud se v součinu vyskytnou dva stejné vektory, je součin díky antisymetrii roven nule.

Rozložitelnost antisymetrického tenzoru t definujeme jako existenci vektorů $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{V}$ takových, že $t = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$. Připomeňte si ještě definici anulátoru:

$$An(t) = \{v \in \mathbb{V} \mid v \wedge t = 0\}.$$

- a) Na rozcvičení dokažte, že pokud vektory v_1, \dots, v_k jsou lineárně nezávislé, potom

$$An(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k).$$

- b) Označme n dimenzi prostoru \mathbb{V} . Pro každý nenulový tenzor $t \in \Lambda^k(\mathbb{V})$ ($k \leq n$) platí, že t je rozložitelný, právě když $\dim An(t) = k$.
- c) Všechny tenzory z $\Lambda^1(\mathbb{V})$ jsou triviálně rozložitelné. Dokažte, že také každý tenzor z $\Lambda^{n-1}(\mathbb{V})$ je rozložitelný.
- d) Na \mathbb{V} zaveďte skalární součin a ukažte, že lze prostory $\Lambda^1(\mathbb{V})$ a $\Lambda^{n-1}(\mathbb{V})$ ztotožnit. V případě $n = 3$ najděte objekt podobný vektorovému součinu vektorů v_1, v_2 , který bude nezávislý na volbě báze ve \mathbb{V} .

Řešení: Na úvod dva příklady. Tenzor $e_1 \otimes e_2 + 2e_2 \otimes e_2$ je rozložitelný, neboť je roven $(e_1 + 2e_2) \otimes e_2$, tenzor $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$ je nerozložitelný (tyto tenzory samozřejmě nejsou antisymetrické).

- a) Zřejmě každý vektor z lineárního obalu vektorů v_1, \dots, v_k leží v příslušném anulátoru:

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \wedge \sum_i x_i v_i = \sum_i x_i (v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \wedge v_i,$$

všechny sčítance jsou nulové (součiny obsahují vždy dva stejné vektory). K důkazu opačné implikace si vzpomeneme na větu ze

skript [PLA] na straně 315, která říká, že pro každou k -tici vektorů v_1, \dots, v_k ; $v_i = e_j a_i^j$, přičemž $\{e_j\}_{j=1}^n$ je báze na \mathbb{V} , platí¹¹¹

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{\Omega} \det A^{\Omega} e_{\omega_1} \wedge \dots \wedge e_{\omega_k}, \quad (193)$$

kde A^{Ω} značí $k \times k$ matici vzniklou z matice $A = \{a_i^j\}_{i=1 \dots k}^{j=1 \dots n}$ výběrem řádků s indexy $\omega_1 < \dots < \omega_k$ a sčítá se přes všechny uspořádané výběry Ω . Teď vidíme, že když vezmeme nějaký vektor $v \in An(v_1 \wedge \dots \wedge v_k)$ a napíšeme $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge v$ (což má vyjít nula), ve tvaru (193), musí na pravé straně stát triviální lineární kombinace. Tedy determinant všech $(k+1) \times (k+1)$ matic A^{Ω} je nulový, a tedy se hodnota matice A se po přidání vektoru v nezměnila, čili vektor v musí být lineární kombinací vektorů v_1, \dots, v_k . Lineární nezávislost byla v předpokladech proto, aby před přidáním vektoru v měla matice A plnou hodnotu k .

Tvrzení, které jsme právě dokázali lze jinak formulovat i tak, že anulátor tenzoru $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ tvoří právě všechny vektory v_{k+1} , které s původními k vektory vytvoří $(k+1)$ -rozměrný rovnoběžnostěn nulového objemu.

b) Je-li t rozložitelný, plyne $\dim An(t) = k$ z bodu a). Naopak vezmeme nějakou bázi v_1, \dots, v_k prostoru $An(t)$ a doplníme ji vektory v_{k+1}, \dots, v_n na bázi celého prostoru \mathbb{V} . Využijeme toho, že tenzory $v_{\omega_1} \wedge \dots \wedge v_{\omega_k}$, kde posloupnost $\omega_1 < \dots < \omega_k$ necháme probíhat všechny uspořádané k -prvkové podmnožiny množiny indexů $\{1, \dots, n\}$, tvoří bázi prostoru $\Lambda^k(\mathbb{V})$. V této bázi zapíšeme tenzor t symbolicky jako

$$t = \sum_{|\Omega|=k} a_{\Omega} t_{\Omega}, \quad (194)$$

kde $t_{\Omega} = v_{\omega_1} \wedge \dots \wedge v_{\omega_k}$ a $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$. Víme, že v_i je v anulátoru, tedy $t \wedge v_i = (\sum_{\Omega} a_{\Omega} t_{\Omega}) \wedge v_i = 0$. Členy na levé straně, které v t_{Ω} obsahují v_i , jsou po vynásobení v_i nulové, zůstávají tedy pouze členy s $i \notin \Omega$. Jestliže jsou tyto prvky bázovými prvky v $\Lambda^k(\mathbb{V})$, pak jsou

¹¹¹Věta není složitá. Vyzkoušejte si ji na případě $v_1 \wedge v_2$, $v_{1,2} \in \mathbb{R}^3$. Napište si v_1 jako $(v_1)^1 e_1 + (v_1)^2 e_2 + (v_1)^3 e_3$, podobně to udělejte s v_2 a pak už jen násobte.

$t_\Omega \wedge v_i$ bázovými prvky $\Lambda^{k+1}(\mathbb{V})$. Na levé straně je tedy lineární kombinace prvků báze, která má být rovna nule. Proto všechny a_Ω , $i \notin \Omega$ musí být nula a naopak, má-li být $a_\Omega \neq 0$, musí být všechna $1, \dots, k$ v Ω , a tedy zbývá pouze jediné nenulové a_Ω , a to pro $\Omega = \{1, \dots, k\}$.

c) Buď t nenulový tenzor z $\Lambda^{(n-1)}(\mathbb{V})$. Uvažme zobrazení $t \wedge : \mathbb{V} \rightarrow \Lambda^n(\mathbb{V})$, přiřazující vektoru $v \in \mathbb{V}$ tenzor $t \wedge v$. Pro toto zobrazení je evidentně $\dim \text{Im}(t \wedge) = 1$ ($\dim \Lambda^n(\mathbb{V}) = 1$, viz příklad 19.6), tudíž

$$\dim \text{Ker}(t \wedge) = \dim \text{An}(t) = n - 1$$

a tvrzení plyne z bodu b).

Vidíme tedy, že chceme-li najít nějaký nerozložitelný antisymetrický tenzor, musíme hledat ve vnější algebře prostoru dimenze alespoň 4 (najděte například rozklad $e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_3 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$). Příkladem budiž třeba kombinace $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ prvků báze prostoru \mathbb{R}^4 . Z tohoto příkladu už snadno vytvoříte nerozložitelný tenzor z $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ pro každé $n \geq 4$ a $k \in \{2, 3, \dots, n-2\}$ (zkuste si to!).

d) Mějme tedy pro jednoduchost dán na \mathbb{V} skalární součin a zvolme libovolnou ortonormální bázi $\{e_j\}_{j=1}^n$ ve \mathbb{V} . Libovolný tenzor $a \in \Lambda^{n-1}(\mathbb{V})$ nejprve rozložíme, a dále z jednorozměrného prostoru vektorů kolmých na všechny složky a (čili podle bodu a) kolmých na $\text{An}(a)$) vybereme ten vektor b , pro který je $a \wedge b = 1e_1 \wedge \dots \wedge e_n$.

Pokud v případě $n = 3$ bude $a = v_1 \wedge v_2$, pak vektor $b/|b|^2$ vyjde roven vektorovému součinu $v_1 \times v_2$. Všimněte si, že zatímco výraz $v_1 \wedge v_2$ vůbec nezávisí na volbě báze $\{e_j\}_{j=1}^3$, vektor $b/|b|^2$ změní znaménko, pokud například zaměníme e_1 a e_2 (změna levotočivé na pravotočivou bázi či naopak); pro ortogonální pravotočivé báze ovšem bude vycházet stále stejně. Proto říkáme, že vektorový součin je antisymetrický tenzor druhého řádu, který lze ztotožnit s axiálním vektorem (či také *pseudovektorem*), neboli vektorem, který při zrcadlení báze změní orientaci.

*TB

20 Několik dalších příkladů

20.1 Násobení blokových matic; výpočet inverze blokové matice

Mějme blokovou matici tvaru

$$X = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline 0 & D & E \\ \hline 0 & 0 & F \\ \hline \end{array}, \quad (195)$$

kde A, D, F jsou čtvercové matice (ne nutně stejného rozměru) a B, C, E obdélníkové matice příslušného rozměru. Symboly 0 označujeme matice (různých rozměrů) obsahující pouze samé nuly. Chceme zde upozornit, že inverzní matici X^{-1} počítáme v zásadě stejným postupem, jako kdyby A, B, \dots, F byla pouhá čísla! Metodu lze zobecnit i na větší počet bloků.

Věta. Platí vztah

$$X^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline 0 & d & e \\ \hline 0 & 0 & f \\ \hline \end{array}, \quad (196)$$

kde $a = A^{-1}$, $d = D^{-1}$, $f = F^{-1}$, $b = -A^{-1}Bd$, $e = -D^{-1}Ef$ a konečně c dostaneme řešením rovnice

$$Ac + Be + Cf = 0. \quad (197)$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, jak vypadá součin dvou blokových matic, tzn. že výsledek vypadá stejně, jako kdyby A, B, \dots, a, b, \dots byla čísla a ne matice (vhodného rozměru).

Ověřte podrobně, jak vypadá součin dvou blokových matic (s bloky odpovídajících rozměrů)!

20.2 Gaussovské integrály v \mathbb{R}^n — základní výpočty

Jde o nejzákladnější a nejjednodušší úlohu vícerozměrné integrace. Mějme funkci f na \mathbb{R}^n , pro jednoduchost všude nenulovou, tedy

tvaru $f(x) = e^{-g(x)}$. Jednodušší funkci než kvadraticko-lineární nevymyslíme. (Pouze lineární funkce $g(x)$ by nedávala integrabilitu na celém \mathbb{R}^n !)

Nechť tedy je g kvadratická forma

$$g(x) = \sum a_{ij}x^i x^j = (Ax, x), \quad (198)$$

kde symbol (\cdot, \cdot) označuje obvyklý skalární součin na \mathbb{R}^n a A je *pozitivně definitní* reálná matice (aby $f(x)$ byla integrovatelná). Příklad *komplexních* matic A je též velmi důležitý, zatím jej ale odložíme na později. Naším prvním cílem bude tedy spočítat

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(Ax, x)} dx. \quad (199)$$

Začneme případem $n = 1$. Připomeňme nejprve známý výpočet pomocí věty o substituci, použitím polárních souřadnic a Fubiniho věty.

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi = \quad (200)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}, \quad \text{tedy} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (201)$$

Obecněji, pomocí věty o substituci máme

$$\int e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (202)$$

Zkusme si počínat analogicky i ve vícerozměrném případě! Nejprve ovšem připomeňme, co to je odmocnina (pozitivně definitní) symetrické matice A .

Napišme spektrální rozklad A

$$A \equiv Q^{-1}DQ, \quad Q^{-1} = Q^T, \quad (203)$$

kde Q je nějaká ortogonální matice a D je diagonální (s kladnými prvky na diagonále, pokud A je pozitivně definitní). Položme

$$B = Q^{-1}\sqrt{D}Q = Q^T\sqrt{D}Q \quad (204)$$

(je jasné, co to je odmocnina z diagonální matice, a druhý tvar ukazuje, že B je též symetrická matice), pak je skutečně

$$B^2 = Q^{-1}\sqrt{D}QQ^{-1}\sqrt{D}Q = A. \quad (205)$$

A pokračujeme nyní přesně jako v jednorozměrném případě, použitím věty o substituci a vztahu $\det A = (\det B)^2$, odůvodněte podrobněji všechny kroky

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(Ax,x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(Bx,Bx)} dx = \frac{1}{\det B} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y,y)} dy \quad (206)$$

(neboť Jacobián substituce $Bx = y$ je $\det B$), dále

$$\frac{1}{\det B} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y,y)} dy = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum y_i^2} dy_1 \dots dy_n = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}} \quad (207)$$

podle jednorozměrného výsledku nahoře a Fubiniovy věty.

Jednodušší funkci než $f(x) = e^{-g(x)}$ (s kvadratickou, popř. lineárně kvadratickou funkcí g) skutečně nevymyslíme. Jsou ale i nějaké další funkce, které bychom takto uměli integrovat? Co takhle třeba tzv. *korelační koeficienty* gaussovské míry, dané hustotou vůči Lebesgueově míře na \mathbb{R}^n

$$d\mu(x) = e^{-(Ax,x)} \sqrt{\frac{\det A}{\pi^n}} dx, \quad (208)$$

tedy výrazy typu

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j d\mu(x)? \quad (209)$$

Zde vede rychle k cíli následující „trik“: Uvažme, že pro každé pevné $i_0 \neq j_0$ lze součin $x_{i_0} x_{j_0}$ chápat jako

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_{i_0 j_0}} (Ax, x), \quad (210)$$

kde výraz (Ax, x) je chápán jako funkce „parametrů“ a_{ij} matice A . (Koeficient $\frac{1}{2}$ je tu proto, že pracujeme se symetrickou maticí). Tedy

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_{i_0} x_{j_0} d\mu(x) = \sqrt{\frac{\det A}{\pi^n}} \int x_{i_0} x_{j_0} e^{-(Ax,x)} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{\det A}{\pi^n}} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial a_{i_0 j_0}} (Ax, x) e^{-(Ax, x)} dx = \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\det A}{\pi^n}} \int_{\mathbb{R}^n} -\frac{\partial}{\partial a_{i_0 j_0}} \left(e^{-(Ax, x)} \right) dx = \\
&= -\frac{\sqrt{\det A}}{4} \left(\frac{\partial}{\partial a_{i_0 j_0}} \left(\frac{1}{\sqrt{\det A}} \right) \right) = \frac{1}{2 \det A} \frac{\partial}{\partial a_{i_0 j_0}} \det A. \quad (211)
\end{aligned}$$

V případě obecné nesymetrické matice a fixované uspořádané dvojice i_0, j_0 je hned vidět, čemu je roven výraz $\frac{\partial}{\partial a_{i_0 j_0}} \det A$, resp. $\frac{1}{\det A} \frac{\partial}{\partial a_{i_0 j_0}} \det A$. Je to (j_0, i_0) -tý minor matice A , resp. (j_0, i_0) -tý prvek matice $C = A^{-1}$! Obdobný výsledek dostáváme ale i pro náš případ — *symetrickou* matici A a *neuspořádanou* dvojici $\{i_0, j_0\}$ indexů. Je jenom třeba pozorně prohlédnout koeficienty výrazů tvaru, omezme se zatím na případ $i_0 \neq j_0$,

$$\frac{\partial}{\partial a_{i_0 j_0}} \left[a_{i_0 j_0} \sum_{\substack{\pi: \pi(i_0)=j_0 \\ \pi(j_0) \neq i_0}} \prod_{i \neq i_0} a_{i \pi(i)}, \right] \quad (212)$$

resp.

$$\frac{\partial}{\partial a_{i_0 j_0}} \left[(a_{i_0 j_0})^2 \sum_{\substack{\pi: \pi(i_0)=j_0 \\ \pi(j_0)=i_0}} \prod_{i \notin \{i_0, j_0\}} a_{i \pi(i)}, \right] \quad (213)$$

a uvědomit si definici determinantu. Vzhledem k symetrii matice A se pro dané i, j rozpadají sčítance v definici determinantu na tři typy: ty, které neobsahují ani a_{ij} ani a_{ji} , ty, jež ho obsahují lineárně (tedy obsahují a_{ij} a neobsahují a_{ji} či naopak) a ty, které je obsahují kvadraticky (tedy jak a_{ij} , tak a_{ji}). Prvně jmenované při derivaci vypadnou, (212) je lineární a (213) kvadratický člen.

Vyjde v případě $i_0 \neq j_0$

$$\frac{\partial}{\partial a_{i_0 j_0}} \det A = 2 \det A c_{i_0 j_0}. \quad (214)$$

Spočetli jsme tedy celkově — platí jak pro $i_0 \neq j_0$, tak pro $i_0 = j_0$ (případ $i_0 = j_0$ proberte sami jako cvičení a modifikujte příslušné

mezivýsledky)

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_{i_0} x_{j_0} d\mu(x) = \frac{1}{2} c_{i_0 j_0}, \quad (215)$$

kde $C = A^{-1}$. Už vidíme, proč C se nazývá *korelační maticí* míry μ .

20.3 Integrály polynomů a exponenciály (vytvorující funkce) vůči gaussovské míře

Jde o integrály typu (výraz $\sum \xi_i x_i$ píšeme níže též ve tvaru (x, ξ))

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum \xi_i x_i} d\mu(x) = \left(\sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}} \right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum \xi_i x_i} e^{-(Ax, x)} dx, \quad (216)$$

resp.

$$\int \prod_i x_i^{m_i} d\mu(x) = \left(\sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}} \right)^{-1} \int \prod_i x_i^{m_i} e^{-(Ax, x)} dx. \quad (217)$$

Mnohé integrály druhého typu počítat metodou *per partes* (určitě je to možné pro jednorozměrnou míru μ , jinak to asi bude složitější...), my ale použijeme jiný postup. Nejdřív se ovšem podíváme na první z těchto integrálů. Nejprve provedeme potřebné pomocné úpravy pro lineárně kvadratický výraz v exponentu („doplněním na čtverec“, opět označíme $B = \sqrt{A}$ a využijeme symetrie B)

$$\begin{aligned} (Ax, x) - (\xi, x) &= (Bx, Bx) - (B^{-1}\xi, Bx) = \\ &= (Bx - \frac{1}{2}B^{-1}\xi, Bx - \frac{1}{2}B^{-1}\xi) - \frac{1}{4}(B^{-1}\xi, B^{-1}\xi). \end{aligned} \quad (218)$$

Tedy máme, s použitím substituce $Bx - \frac{1}{2}B^{-1}\xi = y$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{(\xi, x) - (Ax, x)} dx = \frac{1}{\det B} \int e^{\frac{1}{4}(B^{-1}\xi, B^{-1}\xi)} e^{-(y, y)} dy, \quad (219)$$

čili celkově

$$F(\xi) = \int e^{(\xi, x)} d\mu(x) = e^{\frac{1}{4}(A^{-1}\xi, \xi)} = e^{\frac{1}{4}(C\xi, \xi)}. \quad (220)$$

Všimněme si, že výraz v exponentu je pozitivní. Chceme-li spočítat *Fourierovu transformaci* míry μ s ryze imaginárním exponentem

$$\hat{\mu}(\xi) = \int e^{i(\xi, x)} d\mu(x), \quad (221)$$

nabízí se napsat přímo výsledek, kde $\eta = i\xi$ (i je imaginární jednotka, nikoliv index!)

$$\hat{\mu}(\xi) = e^{\frac{1}{4}(C\eta, \eta)} = e^{-\frac{1}{4}(C\xi, \xi)}. \quad (222)$$

Pozor, výraz (x, y) zde stále znamená $\sum_k x_k y_k$, i když pracujeme s imaginárními veličinami!

Proč to tak můžeme napsat? Funkce

$$F_1(\xi) = \int e^{(\xi, x)} d\mu(x), \quad (223)$$

a

$$F_2(\xi) = e^{\frac{1}{4}(C\xi, \xi)} = e^{\frac{1}{4}\sum c_{ij}\xi_i\xi_j}, \quad (224)$$

jsou totožné pro *reálné* hodnoty ξ_k , jak jsme právě ukázali. Tyto funkce jsou však zřejmě holomorfní funkce¹¹² proměnných ξ_k .

Tedy, podle „známé věty“ o jednoznačnosti holomorfní funkce (zformulujte tuto větu a přeneste ji indukcí na případ funkce více proměnných) musí být funkce F_1 a F_2 totožné pro *všechny*, i komplexní, hodnoty proměnných $\xi^k \in \mathbb{C}$! Takže musí platit vztah

$$\int e^{i(\xi, x)} d\mu(x) = e^{-\frac{1}{4}(C\xi, \xi)}. \quad (225)$$

A nyní přistupme k výpočtu, pro jakoukoliv n -tici indexů $\{m_i, i = 1, \dots, n\}$, integrálu (i je tady všude index — používáme zase jen reálné veličiny ξ_i)

$$\int \prod_{i=1}^n x_i^{m_i} d\mu(x). \quad (226)$$

Podívejme se na rozvoj funkce $e^{(\xi, x)}$:

$$e^{(\xi, x)} = e^{\sum \xi_i x_i} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\sum \xi_i x_i \right)^N. \quad (227)$$

¹¹²Holomorfní funkce $F(\xi_1, \dots, \xi_n)$ více proměnných definujeme prostě tak, že vyžadujeme holomorfnost ve zbývající proměnné pro jakoukoliv fixovanou hodnotu ostatních proměnných.

Členy na pravé straně rozepíšeme podle multinomické formule

$$\frac{1}{N!}(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n)^N = \sum_{\substack{\{n_i\} \\ \sum_i n_i = N}} \prod_i \frac{(\xi_i x_i)^{n_i}}{n_i!}. \quad (228)$$

Označme $M = m_1 + \dots + m_n$, v předchozím vztahu nás tedy zajímá hlavně (m_1, \dots, m_n) -tý prvek rozvoje členu $(\sum \xi_i x_i)^M$. Je tedy, podle (227) a (228),

$$e^{(\xi, x)} = \prod_i \left(\sum_{n_i=0}^{\infty} \frac{(\xi_i x_i)^{n_i}}{n_i!} \right), \quad (229)$$

$$\int e^{(\xi, x)} d\mu(x) = \sum_{\{n_i\}} \prod_i \frac{\xi_i^{n_i}}{n_i!} \int \prod_i x_i^{n_i} d\mu(x). \quad (230)$$

Budeme se tedy na integrál $\int \prod_i x_i^{m_i} d\mu(x)$ dívat jako na koeficient u členu $\prod_i \frac{\xi_i^{m_i}}{m_i!}$ rozvoje (v proměnných ξ_i) funkce

$$F(\xi) = \int e^{(\xi, x)} d\mu(x). \quad (231)$$

Poznamenejme, že nás zajímají *sudé* hodnoty stupně $M = \sum_{i=1}^n m_i$; pro *liché* M je výše uvedený integrál očividně roven nule (Ověřte to!).

Shrňme dosavadní pozorování. Píšeme

$$F(\xi) = \int e^{(\xi, x)} d\mu(x) = \prod_i \frac{\xi_i^{m_i}}{m_i!} \int \prod_i x_i^{m_i} d\mu(x) + \dots \quad (232)$$

Naopak je, jak již víme,

$$F(\xi) = \int e^{(\xi, x)} d\mu(x) = e^{\frac{1}{4} \sum c_{ij} \xi_i \xi_j}. \quad (233)$$

Rozložme tuto funkci do nekonečné řady: Píšeme

$$e^{\frac{1}{4}(C\xi, \xi)} = e^{\frac{1}{4} \sum c_{ij} \xi_i \xi_j} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \frac{(\sum c_{ij} \xi_i \xi_j)^k}{k!} = \frac{1}{2^M} \frac{(\sum c_{ij} \xi_i \xi_j)^{\frac{M}{2}}}{\frac{M}{2}!} + \dots \quad (234)$$

kde tečky obsahují další, pro nás již teď nezajímavé členy. *Roznásobíme závorky* na pravé straně (234) a dostaneme vzorec

$$\left(\sum c_{ij}\xi_i\xi_j\right)^{\frac{M}{2}} = \sum_G \prod_{\substack{\{i,j\}\in G \\ i\neq j}} 2c_{ij} \prod_{\{i,i\}\in G} c_{ii} \prod_{i=1}^n \xi_i^{m_i}, \quad (235)$$

kde sumujeme přes všechny *uspořádané* $\frac{M}{2}$ -tice množiny G dvojic indexů $\{i, j\}$ takové, že celkový počet „žeber“ $\{i, j\}$ (žebra $\{i, i\}$ se počítají dvakrát) obsahujících daný index i je roven číslu m_i . Dvojnásobek počtu všech „žeber“ G je tedy roven číslu $\sum_{i=1}^n m_i = M$.

Abychom si názorněji představili, přes jakou množinu G dvojic $\{i, j\}$ vlastně sčítáme, představme si každou dvojici $\{i, j\}$ třeba jako nataženou gumičku mezi uzly i a j . Rozstříhnutím té gumičky uprostřed dostaneme dva „prsty“, jeden upevněný v uzlu i a druhý v uzlu j . Viz obrázek nakreslený níže, kde gumičky jsou již takto rozstříhány na dvě části a máme tedy nakonec systém „ruk“, kde i -tá ruka má m_i „prstů“. Ty prsty jsou zatím neuspořádané, níže je ale bude účelné uspořádat.

Shrňme dosažený výsledek. Srovnáním odpovídajících členů rozvoju (232) a (234) máme vzorec

$$\int \prod_{i=1}^n x_i^{m_i} d\mu(x) = \frac{1}{2^M \left(\frac{M}{2}\right)!} \prod_{i=1}^n m_i! \sum_{G \in \mathcal{G}(\{m_i\})} c_G, \quad (236)$$

kde $\mathcal{G}(\{m_i\})$ je množina všech uspořádaných $\frac{M}{2}$ -tic G popsanych nahore, a

$$c_G = \prod_{\substack{\{i,j\}\in G \\ i\neq j}} (2c_{ij})^{m_{ij}} \prod_{\{i,i\}\in G} c_{ii}^{m_{ii}}, \quad (237)$$

kde c_{ij} je příslušný maticový element (z korelační matice C) a m_{ij} označuje násobnost (multiplicitu) páru $\{i, j\}$, tzn. počet jeho použití v uspořádané množině G . Některé gumičky jsou tedy vlastně svazky gumiček, a bereme v úvahu i gumičky typu „smyčka“, tedy páry $\{i, i\}$. I ony mohou mít multiplicitu větší než jedna.

Vzorec (236) se stane přehlednějším, přepíšeme-li ho nyní pro *neuspořádaná* párování. Při vhodné interpretaci navíc „zmizí“ všech-

ny faktoriály v (236) (a navíc se sjednotí příspěvky $2c_{ij}$, resp c_{ii} , v (237)).

Označíme symbolem $\mathcal{P}(\{m_i\})$ množinu neuspořádaných $\frac{M}{2}$ -tic párů typu $\{i, j\}$ takových, že počet výskytů indexu i je dán čísly m_i . Tato množina se rozpadá na sjednocení

$$\mathcal{P}(\{m_i\}) = \bigcup_{\{m_{ij}\}} \mathcal{P}(\{m_i\}, \{m_{ij}\}) \quad (238)$$

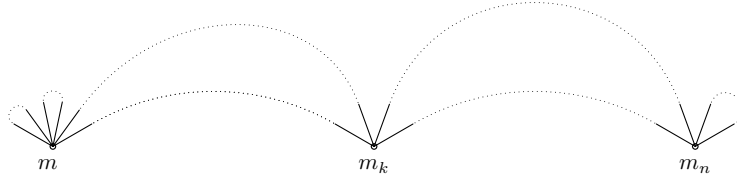
množin neuspořádaných $\frac{M}{2}$ -tic s předepsanými multiplicitami žebér $\{m_{ij}\}$. Kolika způsoby lze uspořádat zvolený prvek $P \in \mathcal{P}(\{m_i\}, \{m_{ij}\})$? Očividně

$$N_P = \frac{\left(\frac{M}{2}\right)!}{\prod_{\{i,j\}} m_{ij}!} \quad (239)$$

různými způsoby. Takže máme vzorec, vyplývající z (236),

$$\int \prod_i x_i^{m_i} d\mu(x) = \frac{\prod m_i!}{\prod_{\{i,j\}} m_{ij}! 2^M} \sum_{P \in \mathcal{P}(\{m_i\})} c_P, \quad (240)$$

kde c_P je dáno formulí (237). Představme si nyní, že každou „gumičku“ ze systému P rozstříhneme uprostřed. Vznikne systém n „ruk“, kde i -tá ruka má m_i „prstů“.



Obrázek 19: Příklad párování ručiček

Představme si naopak, že prsty těchto roztažených ruk budeme párovat a tím vytvářet různé $\frac{M}{2}$ -tice P .

Platí nyní, že každé neuspořádané párování (uspořádaných m_i -tic prstů ruk) takto vytvoříme celkem

$$\frac{\prod_i m_i!}{\prod_{\{i,i\} \in P} 2^{m_{ii}} m_{ii}! \prod_{\substack{\{i,j\} \\ i \neq j}} m_{ij}!} \quad (241)$$

krát. Vyjasníme jmenovatel tohoto výrazu. Pokud $m_{ii} = 0$ a $m_{ij} \leq 1$, je výsledek $\prod_i m_i!$ jasný, každá n -tice permutací prstů ruk vytváří různou realizaci téhož neuspořádaného párování P . Označujme raději tyto realizace symbolem R (místo P).

V případě $m_{ij} > 1$ je třeba si dále uvědomit, že po provedení jakékoliv permutace uvnitř svazku „gumiček“ $\{i, j\}$ zůstává realizace R stejná. To vysvětluje přítomnost faktoriálů $m_{ij}!$ ve jmenovateli vzorce nahoře.

V případě multiplicit smyček $\{i, i\}$ je příslušná kombinatorika ještě poněkud jiná. Zatímco konce všech párů $\{i, j\}$ jsou apriori „odlišeny“, u párů $\{i, i\}$ tomu tak není, a transpozice koncových bodů „gumiček“ ze svazku $\{i, i\}$ dávají onen dodatečný faktor $2^{m_{ii}}$ — který ovšem chybí pro $i \neq j$.

A máme finální vzorec (všimněte si, jak „zmizel“ faktor $\frac{1}{2^M}$ a též faktor 2 u členů c_{ij} , $i \neq j$), je to tzv. *Wickův vzorec*:

$$\int \prod_i x_i^{m_i} d\mu(x) = \sum_{R \in \mathcal{R}(\{m_i\})} c_R, \quad (242)$$

kde

$$c_R = \prod_{\{i,j\}} c_{ij}^{m_{ij}} \quad (243)$$

a sčítá se přes všechny možné realizace R párování uspořádaných m_i -tic prstů v obrázku nahoře.

Samostatný příklad bude věnován zobecněním této formule pro případ, kdy místo členu $\prod_i x_i^{m_i}$ bereme různé součiny *ortogonalizovaných* polynomů (v prostoru $L^2(\mu)$).

20.4 Exponenciála mocninné řady a rozvoj logaritmu

Uvedeme zde jedno tvrzení (kombinatoricko-analytického charakteru) pro mocninné řady. Má význam pro studium pojmu exponenciály a logaritmu matice. Pracujeme zde obecněji v jakékoliv algebře, kde výrazy jako $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum x^n$ a všechny uvažované řady typu $\sum a_n x^n$, či $\sum b_n x^n$ mají smysl pro dostatečně malé x (\equiv pro každé x , pokud je pronásobíme dostatečně malým koeficientem).

Čistě kombinatorický důkaz rozvoje $\log(1+x)$ je uveden v příkladě p. Vybírala. Jistěže je neestetické přidávat analytické úvahy tam, kde bychom chtěli (a kde existuje) čistě kombinatorický důkaz. Uvidíme však, že i malé množství analýzy důkaz velmi zpřehlední. Vyhýbáme se zde ovšem čistě analytickým úvahám jako využití znalosti Taylorova rozvoje $\log(1+x)$ pro reálná x .

Věta. Necht' platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \exp \left[\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m \right]; \quad a_0 \equiv 1. \quad (244)$$

Potom je mezi koeficienty a_n a b_m vztah

$$a_n n = \sum_{m=1}^n b_m m a_{n-m}. \quad (245)$$

Speciálně, volíme-li $a_n \equiv 1$, je $b_m \equiv \frac{1}{m}$, a tedy platí

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \exp \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right], \quad (246)$$

neboli

$$-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad (247)$$

Důkaz. Zmíněný rudiment analýzy (bez kterého obejít se by bylo skutečně nepohodlné) je tvrzení

$$\frac{d}{dx} e^{g(x)} = g'(x) e^{g(x)}. \quad (248)$$

Pokud chápeme $\frac{d}{dx} \sum a_n x^n$ jako $\sum a_n n x^{n-1}$ a definujeme-li $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, dále $e^{g(x)}$ dosazením řady pro $g(x)$ do exponentu e^x , lze tvrzení (248) dokázat i čistě kombinatoricky. Proveďte! Potřebujeme k tomu ovšem další „zřejmé“ tvrzení, totiž, že

$$((g(x))^n)' = n (g(x))^{n-1} g'(x). \quad (249)$$

Takže nyní máme pro $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = e^{g(x)}$, $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m$, vztah

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} &= e^{\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m} \sum_{m=1}^{\infty} m b_m x^{m-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{m=1}^{\infty} m b_m x^{m-1} \end{aligned} \quad (250)$$

a pronásobením řad na pravé straně skutečně dostaneme hledaný vztah

$$a_n n = \sum_{k,l: k+l=n} a_k l b_l. \quad (251)$$

20.5 Přibližné výpočty velkých mocnin matic

Spočítejte s dostatečně velkou přesností A^{1000} pro matici

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (252)$$

Řešení. Jde o stochastickou matici, její největší vlastní číslo je tedy 1. Další vlastní čísla jsou, jak snadno zjistíme, 0 a $\frac{1}{3}$. Tedy matice A je podobná matici D

$$A = CBC^{-1}, \quad \text{kde } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = C^T \quad (253)$$

a kde sloupce ortogonální matice C jsou tvořeny vlastními vektory příslušícími vlastním číslům 1, $\frac{1}{3}$, 0. Poznamenejme, že vlastní vektor příslušící vlastnímu číslu 1 má složky $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Všimněme si, že platí přibližný vztah

$$A^{1000} = CB^{1000}C^{-1} \doteq C\bar{B}C^{-1} = C\bar{B}C^T, \quad (254)$$

$$\text{kde } \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (255)$$

s přesností řádově na hodnotu $(\frac{1}{3})^{1000}$!

Dosazením do (254) dostaneme

$$C\bar{B}C^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & ? & ? \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & ? & ? \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

tedy, s přesností řádově $(\frac{1}{3})^{1000}$

$$A^{1000} \doteq \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (256)$$

20.6 Násobení blokových matic typu 2×2

- a) Spočítejte M^n , kde matice M rozměrů 2×2 je tvaru $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
- b) Řešte analogickou úlohu pro případ, kdy $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ je bloková matice rozměrů $(m+n) \times (m+n)$ a bloky A, B, C a 0 mají postupně rozměry $m \times m, m \times n, n \times n$ a $n \times m$; 0 označuje matici, jejíž všechny prvky jsou rovny nule.

Řešení. a) Spočtením několika prvních mocnin není těžké nahlednout, že bude platit

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix}. \quad (257)$$

Dokažme to matematickou indukcí. Vskutku,

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n M = \\ &= \begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1})c + a^n b \\ 0 & c^{n+1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & b(a^n + \dots + c^n) \\ 0 & c^{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{q. e. d.} \end{aligned} \quad (258)$$

b) V případě, že A, B, C a 0 jsou blokové matice, ověříme snadno, že

$$M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & AB + BC \\ 0 & C^2 \end{pmatrix}, \quad (259)$$

$$M^3 = \begin{pmatrix} A^3 & A^2B + ABC + BC^2 \\ 0 & C^3 \end{pmatrix}. \quad (260)$$

Odůvodněte podrobněji, proč je součin dvou blokových matic

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \quad (261)$$

odpovídajících rozměrů roven matici

$$\begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}! \quad (262)$$

Podrobně jako v případě $a)$ nyní dokážeme matematickou indukcí, že

$$M^n = \begin{pmatrix} A^n & A^{n-1}B + A^{n-2}BC + \dots + ABC^{n-1} + BC^n \\ 0 & C^n \end{pmatrix}, \quad (263)$$

(pozor na pořadí matic!) což v případě, že matice A, B, C vzájemně komutují a pokud je $(C - A)$ regulární matice, lze napsat přehledněji ve tvaru

$$M^n = \begin{pmatrix} A^n & B(C - A)^{-1}(C^n - A^n) \\ 0 & C^n \end{pmatrix}. \quad (264)$$

20.7 Cyklické vektory operátorů

Dokažte, že operátor $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ má cyklický vektor právě tehdy, když pro každý prvek jeho spektra existuje právě jedna Jordanova buňka.

Věta. *Cyklickým vektorem nazýváme takový vektor $v \in \mathbb{V}$, že vektory $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$, kde n je $\dim \mathbb{V}$, tvoří bázi \mathbb{V} . Jde tedy o takový vektor, pro který jsou ještě i vektory $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ lineárně nezávislé. (Vektory $v, f(v), \dots, f^n(v)$ již lineárně nezávislé být nemohou!)*

Důkaz. Snažší je důkaz implikace \Rightarrow . Existují-li totiž pro nějaký prvek λ spektra f dva Jordanovy bloky, uvažujme následovně.

Vzhledem k $\mathbb{L}(z, f(z), \dots) = \mathbb{L}(z, (f - \lambda)(z), \dots)$ můžeme předpokládat, že platí $\lambda = 0$. Jsou-li potom v a w počáteční vektory příslušných dvou Jordanových řetězců $(v, (f - \lambda)(v), \dots, (f - \lambda)^n(v))$ a $(w, (f - \lambda)(w), \dots, (f - \lambda)^m(w))$ a označíme-li symboly $\{z_k\}$ zbylé vektory Jordanovy báze, tak je snadné nahlédnout, že v lineárním obalu vektorů $z, f(z), f^2(z), \dots$, kde

$$z = \sum_{i=0}^n \alpha_i (f - \lambda)^i(v) + \sum_{j=0}^m \beta_j (f - \lambda)^j(w) + \sum_k \gamma_k z_k \quad (265)$$

nemohou být všechny vektory zmíněných dvou řetězců nahoře! Označme $N = \max(n + 1, m + 1)$. Pak $(f - \lambda)^i(z) \in \mathbb{L}(z_k)$ pro $i \geq N$, a pokud je dimenze $\mathbb{L}(z_k)$ rovna M , pak je už $\{z, (f - \lambda)(z), \dots, (f - \lambda)^{N+M}z\}$ lineárně závislá množina. Ale $N + M = \max(n + 1, m + 1) + \dim \mathbb{L}(z_k) < n + 1 + m + 1 + \dim \mathbb{L}(z_k) = \dim V$, takže $\{z, (f - \lambda)(z), \dots\}$ nemůže být bází V a tedy ani $\{z, f(z), \dots\}$.

Nyní dokažme zajímavější implikaci „ \Leftarrow “.

Důkaz se sestává ze dvou kroků, přičemž ten druhý krok bude níže vydělen jako samostatný příklad.

Pro každé $\lambda \in \varrho(f)$ (spektrum f) označme symbolem v_λ počáteční vektor příslušného Jordanova řetězce $v_\lambda, (f - \lambda J)v_\lambda, \dots, (f - \lambda J)^{m_\lambda - 1}v_\lambda$, kde m_λ označuje násobnost λ . Pak můžeme každý vektor $v \in \mathbb{V}$ rozložit do tvaru

$$v = \sum_{\lambda} \sum_{k=0}^{m_\lambda - 1} \alpha_{k,\lambda} (f - \lambda J)^k v_\lambda. \quad (266)$$

Volme speciálně $v \in \mathbb{V}$ tvaru

$$v = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} v_{\lambda}. \quad (267)$$

Potom je pro libovolné $m \in \mathbb{N}$

$$f^m(v) = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} (f - \lambda J + \lambda J)^m v_{\lambda} = \quad (268)$$

$$= \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \lambda^{m-l} (f - \lambda J)^l v_{\lambda}. \quad (269)$$

Tedy matice B , v jejichž sloupcích jsou souřadnice n vektorů $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ vůči zvolené Jordanově bazi $\{v_{\lambda}, (f - \lambda J)v_{\lambda}, (f - \lambda J)^2 v_{\lambda}, \dots\}$, má v řádku odpovídajícím vektoru $(f - \lambda J)^k v_{\lambda}$ prvky

$$\left(0, 0, \dots, \binom{k}{k}, \binom{k+1}{k} \lambda, \dots, \binom{n-1}{k} \lambda^{n-1-k}\right), \quad (270)$$

a je tedy tvořena pod sebe napsanými obdélníkovými bloky, které jsou jakoby gaussovsky zeliminované a které odpovídají jednotlivým Jordanovým blokům. Níže uvidíme, jak tato matice souvisí se známou maticí Vandermondovou.

Takže volba (267) s vesměs nenulovými vektory α_{λ} dává vždy bázi $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ prostoru \mathbb{V} .

Obecný případ (0) s $\alpha_{i,\lambda} \neq 0$, $i > 0$ pro každé $\lambda \in \varrho(f)$ zde již vyšetřovat podrobně nebudeme a přenecháváme jej čtenáři.

20.8 Zobecněný Vandermondův determinant

Jde o čtvercový determinant složený z obdélníků tvaru

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 0 & 1 & 2x & \dots & nx^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 & \dots & n(n-1)x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k! & \dots & n(n-1) & \dots & (n-k+1)x^{n-k} \end{vmatrix}. \quad (271)$$

Označme takovéto obdélníky — rozměru $(k+1) \times (n+1)$, symboly $R(x)$. Chceme tedy spočítat determinant

$$\det \begin{pmatrix} R(x) \\ R(y) \\ \vdots \end{pmatrix} = \det A, \quad (272)$$

kde obdélníkové matice $R(x)$ jsou tvaru

$$R(x) = \begin{pmatrix} r(x) \\ r'(x) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (273)$$

a kde $r(x) = (1, x, \dots, x^n)$.

Věta. Determinant takovéto matice

$$A = \begin{pmatrix} R(x_1) \\ R(x_2) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (274)$$

je roven $\det A = \prod_{i>j} (x_i - x_j)^{m_i m_j} \prod_i m_i!$, kde m_i je tloušťka bloku $R(x_i)$.

Řešení. Nahradíme k -tou derivací k -tou diferencí:

$$\frac{d^k}{dx^k} r(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} D^k r(x), \quad (275)$$

kde

$$D^k r(x) = \frac{1}{k! \Delta^k} \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} r(x + l\Delta). \quad (276)$$

(Připomínáme zde tento vztah n -té difference a n -té derivace. Nej-jednodušeji se to dokáže pomocí L'Hospitalova pravidla.) Potom je

$$\det A = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \det \begin{pmatrix} R_{\Delta}(x_1) \\ R_{\Delta}(x_2) \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (277)$$

kde obdélníky $R_{\Delta}(x)$ mají tvar

$$R_{\Delta}(x) = \begin{pmatrix} r(x) \\ Dr(x) \\ D^2 r(x) \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (278)$$

Nyní použijeme vzorce pro výpočet „obyčejného“ Vandermondova determinantu a poté spočteme limitu $\Delta \rightarrow 0$. Proved'te podrobně, speciálně si uvědomte, jak se vzájemně kompenzují faktoriály $k!$ (vznikající i v limitě (277) použitím známého vzorce pro „obyčejný“ Vandermondův determinant).

20.9 Výpočet odmocniny symetrické matice

Mějme zadanou nějakou symetrickou matici A , třeba

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (279)$$

Hledejme (symetrickou) matici B takovou, aby $B^2 = A$.

Řešení a) Pro takto zadané číselné hodnoty bude asi nejjednodušší matici B uhádnout. Pokud její prvky budou celočíselné, máme zřejmě na výběr pouze hodnoty $-1, 0, 1$. Píšeme-li

$$B = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}. \quad (280)$$

máme

$$\begin{aligned} a^2 + d^2 + e^2 &= 1, \\ e^2 + f^2 + c^2 &= 1, \\ d^2 + b^2 + f^2 &= 3. \end{aligned} \quad (281)$$

Rovnice $d^2 + b^2 + f^2 = 3$ má jediné celočíselné řešení $d = b = f = 1$, tedy dále máme $a = e = c = 0$, takže

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (282)$$

je hledaným řešením.

b) Standardní postup by ovšem byl

α) spočítat spektrum (zde 0, 1, 4) matice A ,

β) vyjádřit $A = CDC^{-1}$, kde sloupce matice C jsou příslušné vlastní vektory,

γ) spočítat $B = C\sqrt{D}C^{-1}$.

Proveďte podrobně!

20.10 Pfaffián antisymetrické matice

Uvedeme zde některé pozoruhodné vlastnosti determinantu *antisymetrické matice A sudého rozměru $2n$* .

Připomeňme definici determinantu, zapsanou v následujícím (na první pohled méně obvyklém) tvaru

$$\det A = \sum_{\pi} \prod_{C \in \pi} a_C, \quad (283)$$

kde sumace je přes všechny permutace π , symbolem C značíme *cyklus* permutace π tvaru $(i_1, i_2, \dots, i_k, i_1)$ (cyklicky uspořádaná k -tice indexů), $k \geq 1$, a „váha“ takového cyklu C je dána vzorcem

$$a_C = (-1)^{k-1} \prod_{j=1}^k a_{i_j i_{j+1}}, \quad (i_{k+1} \equiv i_1) \quad (284)$$

kde a_{ij} jsou maticové elementy A . Vezměme (pro $k \geq 3$) cyklus C^{-1} , inverzní k C , tzn. $C^{-1} = (i_k, i_{k-1}, \dots, i_1, i_k)$ a uvědomme si vztah

$$a_{C^{-1}} = a_C (-1)^k, \quad (285)$$

který vyplývá z antisymetričnosti A .

Vezměme nějaký systém φ vzájemně se neprotínajících cyklů. Nechť \tilde{C} je další cyklus o *lichém* počtu prvků neprotínající žádný cyklus z φ . Zřejmě je potom

$$a_{\varphi \cup \tilde{C}} = -a_{\varphi \cup \tilde{C}^{-1}}, \quad a_{\varphi} = \prod_{C \in \varphi} a_C, \quad (286)$$

takže v definici determinantu antisymetrické matice se můžeme omezit na permutace obsahující *pouze* cykly o sudém počtu prvků (transpozice, čtveřice, apod.). Příspěvky permutací obsahujících cyklus

liché délky se totiž vzájemně vynulují. (Proveďte tuto úvahu podrobně!)

Tvrzení. Pro antisymetrickou matici platí

$$\det A = \sum_{\pi} \prod_{C \in \pi} \prod_{(i,j) \in C} a_{ij}, \quad (287)$$

kde sumace je nyní pouze přes permutace *neobsahující* cykly o lichém počtu prvků. Výraz $\prod_{(i,j) \in C} a_{ij}$ (součin přes „orientovaná žebra“ cyklu C) pak *nezávisí* na tom, zda vezmeme C , či C^{-1} .

A nyní pojďme k pojmu *párování* množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Tím budeme rozumět rozklad P množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ na disjunktní dvojice prvků. Každé párování lze chápat jako obraz „kanonického“ párování P_0 systému dvojic $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}$ při vhodné permutaci π množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Samozřejmě, v definici π je velká libovůle. Lze permutovat vzniklé dvojice mezi sebou, a také prvky uvnitř dvojic. Celkem $2^n n!$ možností.

Páry kanonického párování jsou fakticky *uspořádané* dvojice typu $(2k-1, 2k)$, a přenos P_0 permutací π dává tedy také párování na uspořádané dvojice. Změní-li se pořadí prvků uvnitř dvojic, změní se odpovídajícím způsobem i π a též výraz $\sum \pi$. (Jak?)

Nyní je třeba si uvědomit, že výraz

$$a_P \equiv \prod_{i=1}^n a_{\pi(2k-1), \pi(2k)} \sum \pi \quad (288)$$

potom *nezmění* svou hodnotu, složíme-li π s nějakou další permutací tak, aby výsledné (neuspořádané) párování P bylo zachováno. (Zde opět hraje roli antisymetrie A , vyjasněte!) Můžeme také psát (všechny členy této sumy jsou stejné!)

$$a_P = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi: \pi(P_0)=P} \prod_{k=1}^n a_{\pi(2k-1), \pi(2k)} \sum \pi, \quad (289)$$

kde sumace je přes všechny permutace π přenášející kanonické párování na P .

Všimneme si také, že pro párování $\{2, 3\}, \{4, 5\}, \dots, \{2n, 1\}$ dostaneme opačnou hodnotu a_P než pro párování P_0 nahoře. Analogickou úvahu můžeme udělat i uvnitř každého cyklu majícího sudý počet prvků. A můžeme zformulovat náš hlavní výsledek:

Věta. Platí rovnost

$$\det A = (\text{Pf}(A))^2, \quad (290)$$

kde $\text{Pf}(A) = \sum_P a_P$. Výraz $\text{Pf}(A)$ se nazývá *Pfaffiánem* matice A .

Důkaz. Stačí si představit každý cyklus (sudé délky!) z formule

$$\det A = \sum_{\pi} \prod_{C \in \pi} a_C \quad (291)$$

rozdělen střídavě na *dva druhy* žebor $\{i, j\} \in P$: „černá“ a „bílá“. Není těžké si uvědomit, že každý systém vzájemně neprotínajících se cyklů (o sudém počtu vrcholů) lze takto *jednoznačně reprezentovat* jako *dvojici párování* (černé párování a bílé párování).

Ještě zbývá si uvědomit, že máme *dva způsoby orientace* každého cyklu (delšího než 2), ale také dva různé jeho rozklady na systém „černých“ a „bílých“ žebor. (Pro cykly délky 2 je to nutno formulovat trochu jinak. V tomto případě je $C^{-1} \equiv C$. Modifikujte výše uvedenou úvahu podrobně pro tento případ.)

Výraz

$$\text{Pf}(A) \cdot \text{Pf}(A) \quad (292)$$

si nyní budeme představovat jako součin dvou sum: „černé“ sumy $\sum_P a_P$ přes všechna „černá“ párování množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ a analogické „bílé“ sumy. Tím je důkaz zakončen, vyjasněte příslušné kombinatorické detaily, zvláště to, jak se násobí znaky příslušných párování a jak to všechno souvisí se znakem π .

Příklad.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} = (-be + cd + af)^2 \quad (293)$$

Ověřte výsledek obvyklým výpočtem.

Otázka. Co dostaneme pro případ lichého rozměru matice A ?

20.11 Populační model

Nechť p_n , resp. q_n , je pravděpodobnost, že ve společnosti (bez sociálních a jiných výkyvů, žijící při vědomí udržitelného rozvoje)

se ženě stáří n let během roku narodí syn, resp. dcera. Necht' m_n , resp. z_n , je naopak pravděpodobnost, že muž, resp. žena, stáří n let během roku zemře. S výjimkou období těsně po válce apod. obvykle platí, že $p_n \doteq q_n$, resp. q_n je nepatrně větší než p_n . Naproti tomu, veličiny m_n a z_n závisejí hlavně na zdravotním stavu populace, resp. úrovni lékařské péče.

Předpokládejme pro přehlednost, že $p_n = q_n = 0$ a $m_n = z_n = 1$ pro všechna $n \geq 100$. Necht' $\{x_n(t), y_n(t); n = 0, 1, \dots, 100\}$ je stav populace v roce t . Veličiny $x_n(t)$ a $y_n(t)$ označují počet v zadaných jednotkách (třeba v miliónech), mužů a žen, které v daném kalendářním roce oslaví n -té narozeniny.

Otázka. Jak se bude v průběhu let měnit vektor

$$\{x_n(t), y_n(t); n = 0, 1, \dots, 100\} ?$$

Řešení. Označme symbolem

$$A = \begin{pmatrix} M & S \\ D & Z \end{pmatrix} \quad (294)$$

matici, jejíž bloky vypadají následovně. Matice M („mužská“ část A , je to nilpotentní matice!) popisuje úmrtnost mužů a všechny její prvky kromě prvků

$$M_{i,i-1} \equiv 1 - m_i \quad (295)$$

jsou nulové.

Obdobně matice Z má nenulové pouze prvky

$$Z_{i,i-1} = 1 - z_i. \quad (296)$$

Matice S (synů) má nenulové prvky pouze v prvním řádku, jsou rovny

$$S_{1,i} = p_i \quad (297)$$

a podobně matice D (dcer) má v prvním řádku prvky

$$D_{i,i+1} = q_i \quad (298)$$

a jinde též nuly. Je patrné, že populační vektor $\{x_n(t), y_n(t)\}$ bude v následujícím roce $t + 1$ splňovat vztah

$$\begin{pmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad (299)$$

kde

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ \vdots \\ x_{100}(t) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ \vdots \\ y_{100}(t) \end{pmatrix} \quad (300)$$

označují stav populace v roce t , $x(t)$ její mužskou část, $y(t)$ její ženskou část.

Zdůrazněme ještě jednou podmínku stacionárnosti matice A , tzn. podmínku setrvalosti „společenského vědomí“ (nikoliv společenského bytí; populace bude buď expandovat nebo vymírat; viz dále). Jinak bychom nemohli napsat vztah pro jakékoliv přirozené n

$$\begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}. \quad (301)$$

Nyní odkazujeme na podrobnější analýzu chování vektoru

$$x^{(n)} = A^n x, \quad (302)$$

z příkladu o hledání „největšího“ vlastního vektoru matice.

Zde uvedeme pouze to nejdůležitější. Matice A je pozitivní a podle Frobeniovy věty je její největší vlastní číslo kladné. Označme jej μ (na počest Malthuse). Platí potom obecný vztah (odůvodněte podrobněji)

$$\begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix} = C\mu^n \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + O\left(\left|\frac{\lambda}{\mu}\right|^n\right), \quad (303)$$

kde λ označuje druhé největší (v absolutní hodnotě) vlastní číslo matice A . Tedy populace vymírá, či expanduje v závislosti na tom, zda $\mu < 1$, či $\mu > 1$. Podrobnější studium $\begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix}$ vede k závěru, že tento populační vektor je násobkem *vlastního vektoru* příslušejícího vlastnímu číslu μ . Tedy vlastní vektory lze i experimentálně pozorovat (a to platí nejen v populačních modelech)!

20.12 Resolventa matice a operátoru

Nechť $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ je operátor na (komplexním) prostoru \mathbb{V} a necht' A je jeho matice (v nějaké bázi). Uvažujme operátorhodnotovou, resp. maticehodnotovou funkci komplexní proměnné

$$\{z \rightarrow (zJ - f)^{-1}\} : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}(V, V), \quad (304)$$

resp.

$$\{z \rightarrow (zJ - A)^{-1}\} : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}(n \times n), \quad (305)$$

kde $\mathcal{L}(V, V)$ je prostor operátorů na \mathbb{V} , resp. prostor matic příslušného rozměru $n \times n$. J znamená identický operátor, resp. jednotkovou matici. Tuto funkci budeme v dalším označovat symbolem $R(\lambda, f)$, resp. $R(\lambda, A)$. Jde o tzv. *resolventu* operátoru f , resp. matice A .

Funkce $R(\lambda, f)$ je zřejmě holomorfní ve všech bodech \mathbb{C} vyjma bodů *spektra* $\varrho(f)$. To se snadno ověří pomocí tzv. *resolventní rovnice*

$$(zJ - f)^{-1} - (\tilde{z}J - f)^{-1} = (z - \tilde{z})(zJ - f)^{-1}(\tilde{z}J - f)^{-1}, \quad (306)$$

což je snadná analogie (ověřte, že všechny výrazy komutují!) vztahu

$$\frac{1}{x - f} - \frac{1}{\tilde{x} - f} = -\frac{x - \tilde{x}}{(x - f)(\tilde{x} - f)}. \quad (307)$$

Z této rovnice totiž dále plyne limitním přechodem

$$\frac{d}{dz}(zJ - f)^{-1} = -(zJ - f)^{-2} \quad (308)$$

a podobně odvodíme i pro vyšší derivace vztahy

$$\frac{d^k}{dz^k} R(z, f) = k!(-1)^k (R(z, f))^{-k+1}. \quad (309)$$

Ke zkoumání chování $R(z, f)$ v okolí spektra $\varrho(f)$ použijeme základní větu teorie Jordanova tvaru matice, totiž rozklad (invariantní vůči f)

$$\mathbb{V} = \bigoplus_{\lambda} \text{Ker}_{\lambda} f \quad (310)$$

na kořenové podprostory takové, že $(f - \lambda J) : \text{Ker}_{\lambda} f \rightarrow \text{Ker}_{\lambda} f$ je nilpotentní.

Připomeňme, že

$$f = \sum_{\lambda \in \varrho(f)} fp_\lambda, \quad (311)$$

kde $p_\lambda : \mathbb{V} \rightarrow \text{Ker}_\lambda f$ je projekce na příslušný kořenový podprostor. Je snadné ověřit vztah

$$R(z, f) = \sum_{\lambda} R(\lambda, fp_\lambda), \quad (312)$$

kde operátor $fp_\lambda : \text{Ker}_\lambda f \rightarrow \text{Ker}_\lambda f$ má jediné vlastní číslo λ .

Podívejme se nyní blíže na operátory fp_λ . Zvolme nějaké $\lambda \in \varrho(f)$, přepokládejme, že zvolené $\lambda = 0$ pro jednoduchost značení a podívejme se na Laurentův rozvoj funkce $R(0, fp_0)$ v okolí takového kořene $0 \in \varrho(f)$.

Tím jsme problém převedli na zkoumání Laurentova rozvoje $R(z, f)$ nilpotentního operátoru f . Ověřte nyní platnost následujícího tvrzení:

Věta. Necht' $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ je nilpotentní. Pak lze resolventu $R(z, f)$ vyjádřit vzorcem

$$R(z, f) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{z^{k+1}} f^k, \quad (313)$$

kde n je takové, že $f^{n+1} \equiv 0$.

Důkaz dostanete ihned ze vzorce pro součet geometrické řady

$$(zJ - f)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} f^k. \quad (314)$$

Vraťme se nyní ještě k studiu obecného operátoru f . Funkce

$$R(z, f) = \sum_{\lambda \in \varrho(f)} \sum_{k=0}^{n_\lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^{k+1}} (f - \lambda J)^k p_\lambda \quad (315)$$

je holomorfní dokonce i v bodech spektra $\varrho(f)$, jak plyne z předešlé věty. (Je totiž holomorfní, pokud ji omezíme na $\text{Ker}_\lambda f$ — díky odečtení hlavní části Laurentovy řady. Na ostatních $\text{Ker}_\mu f$ je holomorfnost funkce $R(z, f)$ v bodě λ zřejmá.)

Jelikož však limita této funkce v nekonečnu je rovna nule (odůvodněte!), platí (použijeme-li známou větu z teorie holomorfních funkcí, „princip maxima“) následující

Věta. Platí rovnost

$$R(z, f) = \sum_{\lambda \in \rho(f)} \sum_{k=0}^{n_\lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^{k+1}} (f - \lambda J)^k p_\lambda, \quad (316)$$

kde n_λ je zvolené tak, aby platilo $(f - \lambda J)^{n_\lambda+1} \equiv 0$ na $\text{Ker}_\lambda(f)$. (Délka nejdelšího Jordanova řetězce příslušejícího vlastnímu číslu λ .)

Cvičení. Je-li dána Jordanova báze f , zjistěte matici $R(z, f)$ vůči této bázi a diskutujte též Jordanův tvar $R(z, f)$.

20.13 Signatura kvadratické formy

Určete signaturu kvadratické formy

$$Q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_1 + \cdots + x_{n-1}x_n. \quad (317)$$

(Pozor, neplést s maticí tvaru cirkulantu. Toto je mnohem jednodušší úloha!)

Řešení. Jelikož je

$$2Q(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (318)$$

zdálo by se, že „substituce“ $y_i = x_i$, $i = 0, \dots, n$ a $y_{n+1} = x_0 + \cdots + x_n$ řeší problém okamžitě. Potíž je v tom, že souřadnice y_0, \dots, y_{n+1} „nejsou nezávislé“. Avšak na $(n-1)$ -rozměrném prostoru $\{(x_1, \dots, x_n) : \sum x_i = 0\}$ (ortogonální doplněk k vektoru $(1, \dots, 1)$) je forma zřetelně *negativně* definitní. Na podprostoru $\{(t, \dots, t), t \in \mathbb{R}\}$ je naopak zřetelně *pozitivně* definitní.

Jak nyní dojít k závěru co nejpohodlněji? V prostoru $W = u^\perp$, kde $u = (1, \dots, 1)$ je Q negativně definitní (ověřte také, že W je invariantní podprostor matice Q). Diagonalizujeme Q na prostoru W a příslušnou bázi rozšíříme vektorem u na bázi celého \mathbb{R}^n (diagonalizující Q se signaturou $(n-1, 1)$).

20.14 Rozsazení u kulatého stolu

Uvedená metoda pochází ze statistické fyziky (tzv. metoda „transfer matice“). Používá se i ke studiu vícerozměrných „krystalických mříží“, kde je ovšem technicky značně komplikovanější. My se omezíme na jednorozměrný případ:

Okolo kulatého stolu majícího N židlí (očíslovíme je $0, 1, \dots, N-1$ a identifikujeme jako prvky cyklické grupy) chceme rozsadit N jedinců (atomů) příslušících některé z k různých tříd (muži, ženy, prázdno; atomy různých více či méně se snášejících prvků apod.)

Předpokládejme pro jednoduchost, že „interagují“ pouze nejbližší sousedé u stolu. Máme tedy zadánu jistou $(k \times k)$ symetrickou matici „snášenlivosti“ $A = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = a_{ji} = 1$, resp. $= 0$ pokud se prvky tříd i a j snášejí vedle sebe či nikoliv.

Ptáme se nyní: kolik existuje *přípustných rozsazení* okolo stolu, tzn. zobrazení

$$F : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \quad (319)$$

takových, že $a_{\{F(i), F(j)\}} = 1$ pro každý pár nejbližších sousedů (i, j) , kde $j = (i+1) \bmod N$? Stačí spočítat

$$Z = \sum_F \prod_{i=1}^N a_{F(i), F(i+1)}, \quad (320)$$

kde sumace je přes všechna zobrazení F . Stejný výsledek platí i v obecnějším případě $a_{ij} = \exp[-E_{ij}]$, kde $E = (E_{ij})$ je energetická matice jejíž prvky vyjadřují „energie“ — stupeň (ne)libosti, kterou blízkost sousedů typu i a j produkuje. Z se pak nazývá partiční funkce.

Věta Platí rovnost

$$Z = \text{Tr } A^N. \quad (321)$$

Dokažte!

Důsledek: Necht' $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou (reálná!) vlastní čísla matice A . Pak je

$$Z = \sum_{i=1}^k \lambda_i^N = \lambda_1^N \left(1 + \sum_{i=2}^k (\lambda_i/\lambda_1)^N\right). \quad (322)$$

Poslední tvar je vhodný v případě, že λ_1 je největší vlastní číslo. Pak platí přibližná formule

$$Z \doteq \lambda_1^N. \quad (323)$$

Příklad. Kolika způsoby lze rozsadit muže a ženy kolem kulatého stolu, aby

- a) žádné dvě osoby neseděly těsně vedle sebe?
- b) žádný muž a žena neseděli těsně vedle osoby druhého pohlaví?
- c) žádná osoba nebyla obklopena jenom osobami stejného pohlaví, resp. prázdnem?

Řešení. a) situaci odpovídá matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$Z = \tau^N + \frac{1}{\tau^N} = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \binom{N}{2k} 5^{\frac{N}{2}-k}, \quad \tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \quad (324)$$

První řádek A odpovídá osobě a druhý prázdnou.

b) situaci odpovídá matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$Z = (\sqrt{2}+1)^N + (-\sqrt{2}+1)^N + 1^N = 1 + \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \binom{N}{2k} 2^{k+1}. \quad (325)$$

Řádky a sloupce matice A odpovídají mužům, ženám a prázdnou (v tomto pořadí).

c) To je početně trochu složitější problém.

Je třeba ho formulovat v řeči trojic sousedů (a jak se snášejí se sousedními, je protínajícími, trojicemi). Příslušná matice je rozměrů (27×27) — počet možných trojic je $3^3 = 27$, kde jednotlivá židle je obsazena buď ženou, mužem, nebo je prázdná. (Trojice typu (muž, muž, muž), či (muž, muž, prázdnou), či (prázdnou, muž, prázdnou) jsou zakázány. Kompatibilita sousedících trojic je dána jejich společným průnikem).

20.15 Signatura cyklické kvadratické formy

a) Určete signaturu a diagonalizujte kvadratickou formu

$$Q(x) = x_0x_1 + x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_0, \quad (326)$$

kde $x_k \in \mathbb{R}$ pro $k = 0, 1, \dots, n-1$.

b) Obecněji diagonalizujte Hermitovskou formu

$$Q(x, y) = \sum_{k, l=0}^{n-1} a_{|k-l|} x^k \bar{y}^l, \quad (327)$$

kde koeficienty $a_{|k|}$ jsou reálné, množinu indexů $\{0, 1, \dots, n-1\} \equiv \mathbb{Z}_n$ identifikujeme jako cyklickou grupu a vzdálenost $|k-l| = \min(|k-l|, n-|k-l|)$.

Řešení. Jde o symetrický (Hermitovský) cirkulant, a diagonalizace Q bude založena na metodě podobné té, která se používá pro výpočet determinantu (i nesymetrického) cirkulantu. Reprezentujeme formu Q operátorem konvoluce (s jádrem $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_n\}$)

$$(Tx)_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}_n} a_{k-l} x_l, \quad (328)$$

kde $a_k = a_{-k} (= a_{|k|})$. Potom je pro libovolné $x \in \mathbb{C}_n^{\mathbb{Z}}$, $y \in \mathbb{C}_n^{\mathbb{Z}}$

$$Q(x, y) = (x, Ty), \quad (329)$$

kde (x, y) označuje obyčejný, translačně invariantní skalární součin na \mathbb{Z}_n

$$(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \bar{y}_k. \quad (330)$$

Jde tedy v zásadě o diagonalizaci konvolučního operátoru T (viz skripta, strana 256). Specifické na této úloze je fakt, že operátor T je navíc symetrický (jeho jádro splňuje vztah $a_k = a_{-k}$). Obecná teorie říká (a my můžeme snadno ověřit), že vektory

$$\varphi_\xi = \{(\varphi_\xi)_k, k = 0, 1, \dots, n-1\}, \quad (331)$$

kde $(\varphi_\xi)_k = e^{2\pi i \xi k}$ a ξ je tvaru $\xi = \frac{m}{n}$, $m = 0, 1, \dots, n-1$ jsou vlastními vektory operátoru posunu

$$(Px)_k = x_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (332)$$

Tento operátor komutuje s operátorem T , takže φ_ξ jsou také vlastními vektory T a platí zřejmě

$$\begin{aligned} (T\varphi_\xi)_k &= \sum_{l \in \mathbb{Z}_n} e^{2\pi i \xi l} a_{k-l} \\ &= e^{2\pi i \xi k} \hat{a}(\xi) = (\varphi_\xi)_k \hat{a}(\xi), \end{aligned} \quad (333)$$

kde

$$\hat{a}(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} e^{2\pi i \xi j} a_j \quad (334)$$

je reálné číslo, protože $a_j = a_{-j}$.

Shrneme. V bázi dané komplexními vektory φ_ξ má operátor vlastní čísla $\hat{a}(\xi)$ — ta jsou dvojnásobná pro $\xi \notin \mathbb{R}$. Vezmeme-li nyní reálnou bazi $\mathbb{R}_n^{\mathbb{Z}}$ složenou z dvojic vektorů

$$((\cos 2\pi \xi k), (\sin 2\pi \xi k)), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (335)$$

vidíme, že spektrum T je dáno prvky

$$\hat{a}(\xi) (= \hat{a}(-\xi)) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \cos(2\pi j \xi) a_j.$$

Ve speciálním případě a) je $a_{|1|} = 1$, $a_{|k|} = 0$ pro $|k| \neq 1$ a tedy

$$\hat{a}(\xi) = \cos 2\pi \frac{m}{n} \quad (336)$$

pro $\xi = \frac{m}{n}$, $m = 0, 1, \dots, n-1$.

Závěr (pro případ a) tedy zní, že příslušná reálná forma se diagonalizuje v bázi dané vektory $\{\cos 2\pi \xi k\}$, $\{\sin 2\pi \xi k\}$ s vlastními čísly danými (336).

Obecně, v případě b), potom tabulkou čísel $\hat{a}(\xi)$ z (334).

20.16 Přibližný výpočet $A^n x$

Zjistěte přibližnou hodnotu vektoru $A^n x$, kde A je matice rozměru $m \times m$ a x je sloupcový vektor.

Předpoklad. Omezíme se zde pouze na případ matic splňujících požadavek, že největší prvek spektra $\varrho(A)$ matice A je reálný, tzn. přesněji $\max_{\lambda \in \varrho(A)} |\lambda|$ se nabývá pro nějaká reálné λ a pro ostatní (i komplexní) $\mu \in \varrho(A)$, $\mu \neq \lambda$ platí $|\mu| < |\lambda|$.

Tento předpoklad je splněn dle Frobeniovy věty například pro matice s nezápornými prvky. V takovém případě je „největší vlastní číslo“ λ dokonce kladné a jednoduché. My však budeme obecněji předpokládat, že Jordanovy buňky odpovídající takovému $\lambda \in \varrho(A)$ jsou obecně netriviální, tzn. existuje vektor v takový, že posloupnost $v, (f - \lambda J)v, (f - \lambda J)^2 v, \dots$ má popřípadě i více než jeden netriviální prvek. Tedy

$$(f - \lambda J)^{k-1} v \neq 0, \quad (f - \lambda J)^k v = 0 \quad (337)$$

platí pro nějaké $k \geq 1$, ne nutně $k = 1$. Předpokládejme pro jednoduchost zápisu, že řetězec příslušející vlastnímu číslu λ je jenom jeden.

Nechť x je nějaký vektor z \mathbb{R}^m . Tedy platí

$$x = \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l (A - \lambda J)^l v + \sum_{\mu \neq \lambda} \sum_m \sum_{l=0}^{k_{m,\mu}} \beta_l^{m,\mu} (A - \mu J)^l w_{\mu,m}, \quad (338)$$

kde $w_{\mu,m}$ jsou počáteční vektory Jordanových řetězců příslušících vlastním číslům $|\mu| < |\lambda|$. Přiložme zleva matici

$$A^n = (A - \lambda J + \lambda J)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (A - \lambda J)^p \lambda^{n-p} \quad (339)$$

k výrazům rovnosti uvedené výše. Je patrné, že nejdůležitějšími členy napravo budou

$$A^n x = \alpha_0 \binom{n}{k-1} \lambda^{n-k+1} (A - \lambda J)^{k-1} v + \\ + \alpha_0 \binom{n}{k-2} \lambda^{n-k+2} (A - \lambda J)^{k-2} v + \dots,$$

kde další členy typu

$$\alpha_l \binom{n}{p} \lambda^{n-p} (A - \lambda J)^{l+p} v \quad (340)$$

nebo dokonce

$$\beta_l^{m,\mu} (A - \mu J)^{l+p} \binom{n}{p} \mu^{n-p} w_{\mu,m} \quad (341)$$

jsou již asymptoticky *mnohem menší* (řádově n -krát), ovšem za předpokladu $\alpha_0 \neq 0$.

Tedy platí

$$A^n x = A^{n-1} \frac{n}{n-k} \lambda (x + \dots) \quad (342)$$

z čehož dostáváme vztah

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n x}{A^{n-1} x}. \quad (343)$$

(Co rozumíme „dělením“ vektorů? Objasněte! — Dělíme mezi sebou příslušné souřadnice; limita výrazu vyjde stejná.) A při troše další snahy spočteme i hodnotu k , tedy délku nejdelšího Jordanova řetězce odpovídajícího vlastnímu číslu λ . Aplikujeme zde variantu „Raabeho kriteria“ z teorie řad (podrobnosti necháváme čtenáři):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A^n x - \lambda A^{n-1} x)}{A^n x} = k. \quad (344)$$

20.17 Ortogonalizace posloupnosti

Ortogonalizujte posloupnost (délka všech řádků je rovna nějakému pevnému číslu N) ve standardním skalárním součinu na \mathbb{R}^N .

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, -1, 0, 0, \dots) \\ v_2 &= (0, 1, -1, 0, \dots) \\ v_3 &= (0, 0, 1, -1, \dots) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (345)$$

Řešení. Není těžké si uvědomit, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé (například Gaussovou eliminací). Uvědomme si dále, že

vektory v_1, \dots, v_k generují prostor \mathbb{V}_k všech vektorů typu

$$(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}, 0, 0, \dots), \quad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 0. \quad (346)$$

Jakýkoliv vektor typu $(x_1, \dots, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots)$ kolmý na \mathbb{V}_k musí mít tvar $(x_1 = x_2 = \dots = x_{k+1} = c)$

$$w = (c, c, \dots, c, x_{k+2}, \dots) \quad (347)$$

a odtud pro $(k+1)$ -ní prvek Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu vychází

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+1}, -1, 0, \dots \right) = \\ &= v_{k+1} + z_{k+1}, \quad \text{kde} \quad z_{k+1} \in \mathbb{V}_k. \end{aligned} \quad (348)$$

Úloha připouští následující *zobecnění*:

Volíme-li posloupnost

$$\begin{aligned} v_1 &= (a_{11}, -a_{11}, 0, 0, 0, \dots), \\ v_2 &= (a_{21}, a_{22}, -a_{21} - a_{22}, 0, 0, \dots), \\ v_3 &= (a_{31}, a_{32}, a_{33}, -a_{31} - a_{32} - a_{33}, 0, \dots), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (349)$$

vychází ortogonalizovaná posloupnost *stejně* jako nahoře.

20.18 Ortogonalizace posloupnosti funkcí

Ortogonalizujte posloupnost funkcí $1, \cos x, \cos^2 x, \dots$ v skalárním součinu

$$(f, g) = \int_0^\infty f(x)g(x) dx. \quad (350)$$

Řešení. Na funkce $v_0(x) = 1, v_1(x) = \cos x, v_2(x) = \cos^2 x, \dots, v_n(x) = \cos^n x$ chceme tedy aplikovat Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces.

Funkce v_0 a v_1 jsou na sebe zřejmě již kolmé, začneme tedy s hledáním konstant a, b tak, aby funkce

$$w_2(x) = v_2(x) + av_1(x) + bv_0(x) \quad (351)$$

byla kolmá na $w_2 \equiv v_2$ a $w_1 \equiv v_1$. Vyjde (proved'te detailně)

$$w_2(x) = \cos^2 x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos 2x. \quad (352)$$

To vede k hypotéze, že by mohlo platit $w_n(x) = c_n \cos nx$ pro ortogonalizovanou funkci $w_n(x)$ odpovídající $v_n(x)$. Vskutku

$$\cos^n x = \frac{1}{2^n} (e^{ix} + e^{-ix})^n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{l} \cos(n-2l)x \quad (353)$$

Víme podle indukčního předpokladu, že být kolmý na soubor funkcí $\{1, \cos x, \dots, \cos^{n-1} x\}$ je to samé jako být kolmý na soubor funkcí $\{1, \cos 2x, \dots, \cos(n-1)x\}$ a to dává důkaz indukčního kroku a tedy i ohlašovaný výsledek.

Kolik vyjde c_n ?

20.19 Goniometrický Vandermondův determinant

Vypočtete determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \cos \alpha_0 & \dots & \cos \alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos n\alpha_0 & \dots & \cos n\alpha_n \end{pmatrix}. \quad (354)$$

Řešení. Úlohu převedeme na výpočet (Vandermondova) determinantu matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \cos \alpha_0 & \dots & \cos \alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos^n \alpha_0 & \dots & \cos^n \alpha_n \end{pmatrix}. \quad (355)$$

Připomínáme, že je

$$\det B = \prod_{i < j} (\cos \alpha_j - \cos \alpha_i). \quad (356)$$

Použitím vzorce $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, tedy

$$\cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}} \cos nx + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cos(n-2k)x, \quad (357)$$

můžeme hledaný determinant $\det A$ vyjádřit z rovnice

$$\det B = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \det A = 2^{-\frac{1}{2}n(n-1)} \det A. \quad (358)$$

(proved'te příslušné řádkové úpravy matice B detailně).

20.20 Jednoduchý příklad na spektrum

Spočtete spektrum matice $A = (a_{ji})$ složené ze samých jedniček.

Řešení. Charakteristická rovnice je $\det(A - \lambda J) = 0$. Uvedený determinant nejvýhodněji spočteme tak, že přičteme k prvnímu řádku součet všech ostatních, vytkneme člen $(n - \lambda)$ z prvního řádku, a poté tento první řádek (obsahuje již jen samé jedničky) odečteme od ostatních řádků. Vyjde rovnice $\lambda^{n-1}(n - \lambda) = 0$.

Tedy spektrum A obsahuje $(n - 1)$ -násobnou nulu a dále bod $\lambda = n$.

20.21 Systémy oscilátorů s vnější silou typu δ -funkce

Toto je cvičení na pojem δ -funkce (distribuce) a jeho užití při řešení rovnice oscilátoru. Představme si třeba rovnici jednoho oscilátoru

$$\ddot{y} + ay = \delta_0 \quad (359)$$

nebo

$$\ddot{y} + ay = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_k, \quad (360)$$

tedy situaci, kdy do oscilátoru „kopneme“ v čase $t = 0$, resp. podrobujeme oscilátor periodické sérii takovýchto nárazů.

Obecněji prozkoumáme řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic (pouze prvního typu nahoře)

$$\dot{x} = Ax + \delta_0(t)v, \quad (361)$$

kde $v \in \mathbb{R}^n$ a A je matice rozměrů $n \times n$. Předpokládejme zde pro přehlednost, že A je diagonalizovatelná, tzn. existují vlastní vektory $Av_\lambda = \lambda v_\lambda$ tvořící basi \mathbb{R}^n . (Případ vícenásobných kořenů vyžaduje jen malou modifikaci značení; případ netriviálních Jordánových buněk je v zásadě obdobný, ale s poněkud komplikovanější diskusí.)

Řešení. Jakékoliv řešení soustavy (361) se musí pro $t \neq 0$ chovat jako řešení homogenní soustavy $\dot{x} = Ax$. Tedy existují koeficienty c_λ^\pm takové, že

$$x(t) = \sum_{\lambda} c_\lambda^+ v_\lambda e^{\lambda t}, \quad t > 0, \quad (362)$$

$$x(t) = \sum_{\lambda} c_\lambda^- v_\lambda e^{\lambda t}, \quad t < 0. \quad (363)$$

Odečtením homogenního řešení $\sum_{\lambda} c_\lambda^- v_\lambda e^{\lambda t}$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$ redukuje problém na případ $c_\lambda^- \equiv 0$.

Z teorie distribucí je potom známo (obvykle se zkoumají pouze skalární funkce a jejich zobecněné derivace, případ *vektorových* funkcí je však snadnou analogií), že

$$\frac{d}{dt} \sum_{\lambda} c_\lambda^+ v_\lambda e^{\lambda t} \Big|_{t>0} = \sum_{\lambda} c_\lambda^+ v_\lambda \delta_0. \quad (364)$$

Tedy stačí zvolit koeficienty tak, aby

$$\sum_{\lambda} c_\lambda^+ v_\lambda = v \quad (365)$$

a řešením soustavy (361) je nalezeno.

20.22 Resonance v soustavách lineárních diferenciálních rovnic

Zkoumejme řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic.

$$\dot{x} = Ax + \cos(\omega t)v, \quad \text{resp } \dot{x} = Ax + e^{i\omega t}v, \quad (366)$$

kde $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, je vektorová funkce s hodnotami v \mathbb{R}^n , resp. \mathbb{C}^n a A je reálná matice rozměrů $n \times n$. (Jako příklad lze vzít rovnici jednoho oscilátoru $\ddot{y} = ay + \cos(\omega t)$. Zopakujte, jak převést takovou rovnici na systém dvou rovnic 1. řádu.)

Řešení. Použijeme metodu „variace konstanty“, tzn. budeme hledat řešení ve tvaru $\exp(tA) \cdot c(t)$, kde $c(t) \in \mathbb{C}^n$ je nějaká vektorová funkce. Dosazením do druhé rovnice (366) máme

$$\dot{c}(t) = \exp(-tA)e^{i\omega t}v. \quad (367)$$

Rozložme vektor v do Jordanovy báze matice A . Pro jednoduchost zápisu předpokládejme, že vektor v je již přímo roven nějakému prvku Jordanovy báze, takovému, že pro jisté $k \in \mathbb{N}$ platí

$$(A - \lambda J)^k v = 0. \quad (368)$$

Počítejme

$$\begin{aligned} c(t) &= \int \dot{c}(t) dt = \int \exp(-tA)e^{i\omega t}v dt = \\ &= \int e^{i\omega t}e^{-\lambda t} \exp(-t(A - \lambda J))v dt. \end{aligned} \quad (369)$$

Zvláště jednoduchý a důležitý je případ $k = 1$, omezme se v dalším na něj. To zahrnuje situaci, kdy všechna vlastní čísla A jsou jednoduchá.

Potom je

$$c(t) = \int e^{i\omega t}e^{-\lambda t}v dt = \frac{1}{i\omega - \lambda}e^{(i\omega - \lambda)t}v, \quad (370)$$

tedy

$$x(t) = \exp(tA)c(t) = \frac{1}{i\omega - \lambda}e^{i\omega t}v, \quad (371)$$

tedy amplituda řešení je $\frac{1}{|i\omega - \lambda|}$. (Čím blíže je $i\omega$ spektru A , tím silnější je odpověď daného systému na vnější sílu o kruhové frekvenci ω .)

Tomuto jevu (když $i\omega \doteq \lambda$) se říká *resonance* a objevuje se i pro obecnější pravé strany rovnice $\dot{x} = Ax + f(t)$. Přesněji řečeno jde pak o studium Fourierova rozkladu (periodické) funkce $f(t)$ a o to, zda frekvence některých členů tohoto rozkladu neleží „nebezpečně blízko“ spektru A . Znáte-li již něco z teorie Fourierových řad, proveďte příslušnou analýzu rovnice $\dot{x} = Ax + f(t)$ podrobněji!

Dodatek. Pro případ netriviální Jordanovy buňky řešme soustavu

$$\dot{x} = Ax + e^{\omega t}v, \quad (372)$$

kde $(A - \lambda E)^k v = 0$. Analogicky, jako nahoře, dostaneme

$$\dot{c}(t) = \exp(-At)e^{\omega t}v, \quad (373)$$

tedy

$$c(t) = \int e^{(\omega - \lambda)t} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(A - \lambda E)^l t^l}{l!} v dt = \frac{1}{\omega - \lambda} e^{(\omega - \lambda)t} \frac{(A - \lambda E)^{k-1} v t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots,$$

píšeme-li pouze vedoucí člen s nejvyšší mocninou t . Tedy máme

$$x(t) = \frac{1}{\omega - \lambda} e^{\omega t} t^{k-1} (1 + o(t)) (A - \lambda E)^{k-1} v, \quad (374)$$

kde $(A - \lambda E)^{k-1} v$ je vlastní vektor A .

20.23 Několik číselných příkladů na řešení lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu s konstantními koeficienty

Výsledky zde neuvádíme, k cíli vždy vede standardní postup, tzn. rozklad počáteční podmínky do Jordanovy báze (matice dané soustavy).

Pro pohodlí čtenáře však u většiny příkladů uvádíme zmínku o hodnotách spektra matice soustavy. To mu umožní koncentrovat se na výpočty hodnotí matic $(A - \lambda J)^k$ a na nalezení příslušné Jordanovy báze.

Příklad. 1. Řešte soustavu $\dot{x} = Ax$ s maticemi

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{(1,1,2)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}_{(0,?,?)}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{(-1,-1,1)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}_{(0,?,?)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(0,0,3)} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{(1,-1,?)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{(1,1,1)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(1,?,?)}$$

2. Řešte soustavy druhého řádu

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2x - 3y, \\ \dot{y} &= x - 2y \quad (1,i,?); \end{aligned} \quad (375)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 3x + 4y, \\ \dot{y} &= -x - y \quad (1,-1,?). \end{aligned} \quad (376)$$

3. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 5\dot{x} + 2\dot{y} + y &= 0, \\ 3\ddot{x} + 5\dot{x} + \dot{y} + 3y &= 0 \quad (1,-1,?). \end{aligned} \quad (377)$$

20.24 Převedení obdélníkové matice $(A|B)$ na tvar $(. |A^{-1}B)$. Co všechno z toho plyne.

Cílem této úlohy je upozornit na širokou použitelnost jednoho ze základních algoritmů „elementární lineární algebry“: jde o metodu řádkových úprav obdélníkové matice typu $(A|B)$ s „pivotním“ (řídícím) členem (což je nějaká čtvercová regulární matice) A .

Úkol: Necht' A je čtvercová regulární matice rozměru $n \times n$. Necht' B je další matice rozměru $n \times m$. Napíšeme si obdélníkovou matici $(A|B)$ a najdeme posloupnost řádkových úprav takovéto „rozšířené“ matice tak, abychom dostali matici tvaru

$$(A|B) \xrightarrow{\text{řádkové úpravy}} (. |C) = (. |A^{-1}B). \quad (378)$$

Vysvětlete, proč platí $C = A^{-1}B$ a ukažte, jak lze tento postup použít v následujících úlohách:

1. nalezení inverzní matice
2. řešení soustavy rovnic $Ax = b$
3. nalezení podobné matice $A^{-1}DA$ a obecněji řešení maticové rovnice $AX = B$ pro regulární matici A
4. nalezení matice A zobrazení f , které je určeno nejrůznějšími předpisy (obvykle zadanými, pro „náležité zmatení řešitele“, ve zcela jiných bazích, než vůči kterým hledáme matici A)

Řešení: Připomeňme, že pokud nasměrujeme řádkové úpravy matice $(A|B)$ tak, abychom časem dostali matici $(. |C)$ musí platit $C = A^{-1}B$. Skutečně, představíme-li si prováděné řádkové úpravy jako násobení vhodnými maticemi M_1, M_2, \dots, M_n (v tomto pořadí zleva musí potom být

$$(. |C) = M_n \cdots M_1(A|B) = (M_n \cdots M_1 A | M_n \cdots M_1 B),$$

tedy $M_n \cdots M_1 = A^{-1}$ a $M_n \cdots M_1 B = A^{-1}B$.

1-3. Nyní je možné diskutovat případy $B = .$ (bod 1), $B = b$ (bod 2), obecné obdélníkové matice B (bod 3), speciálně pak výpočet podobné matice $A^{-1}DA$ (pro $B = DA$).

Řešíme-li několik úloh typu 2,3 najednou, je vhodné všechny uvažované matice B napsat do jednoho dlouhého obdélníku tvaru $(A|B_1, B_2, \dots, B_n)$. Zdůrazněme, že „aktivní“ částí této tabulky je matice A , která „řídí“ proces postupných řádkových úprav, zatímco části B_1, \dots, B_n se pak již pouze „opičí“ po tom, jaké řádkové úpravy dělá matice A .

4. Nejobecněji může být takováto úloha formulována asi následujícím způsobem. Necht' (a_1, \dots, a_n) a (b_1, \dots, b_n) jsou různé báze prostoru V . Necht' operátor $f : V \rightarrow V$ je vůči bazím (a_1, \dots, a_n) a (b_1, \dots, b_n) popsán následujícími vztahy:

- **Zadání operátoru f** : Obrazy jistých vektorů $\tilde{a}_i = \sum_j \lambda_{ji} a_j$ jsou určeny předpisy $f(\tilde{a}_i) = \sum_j \mu_{ij} b_j$, kde $L = (\lambda_{ij})$ a $M = (\mu_{ji})$ jsou nějaké čtvercové matice (matice L musí být regulární).
- **Úkol**: Jak určit matici X takového operátoru f vůči nějaké další zadané volbě bazí (c_1, \dots, c_n) a (d_1, \dots, d_n) ? Tzn. jak najít koeficienty $x_{i,j}$ ve vztahu

$$f(c_i) = \sum_j x_{ji} d_j?$$

Ve všech těchto úpravách je výhodné pro vyjasnění zápisu používat následující konvenci zápisu transformačních vztahů¹¹³: Vztahy $\tilde{a}_i = \sum_j \lambda_{ji} a_j$ a $f(\tilde{a}_i) = \sum_j \mu_{ij} b_j$ zapisujeme ve tvaru

$$(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) = (a_1, \dots, a_n)L$$

a

$$(f(\tilde{a}_1), \dots, f(\tilde{a}_n)) = (b_1, \dots, b_n)M.$$

Obdobně píšeme

$$(c_1, \dots, c_n) = (a_1, \dots, a_n)A$$

$$(d_1, \dots, d_n) = (b_1, \dots, b_n)D$$

¹¹³Je to, jako bychom násobili řádek maticí.

s příslušnými „maticemi přechodu“ A , D . Píšeme nyní dále (odůvodněte, proč ty vztahy platí)

$$\begin{aligned}(f(c_1), \dots, f(c_n)) &= (f(a_1), \dots, f(a_n))A = (f(\tilde{a}_1), \dots, f(\tilde{a}_n))L^{-1}A \\ &= (b_1, \dots, b_n)ML^{-1}A = (d_1, \dots, d_n)D^{-1}ML^{-1}A,\end{aligned}$$

takže dostáváme vztah $X = D^{-1}ML^{-1}A$.

Konkrétně X vypočteme takto: Matici $(L|A)$ řádkově upravíme do tvaru $(. |L^{-1}A)$. Vzniklou matici $L^{-1}A$ zleva vynásobíme M a nakonec matici $(D|ML^{-1}A)$ řádkově upravíme na $(. |D^{-1}ML^{-1}A)$.

Shrnutí: K výpočtu součinu čtvercových matic tvaru $X = A_1A_2 \cdot \dots \cdot A_n$, kde pro každé $k = 1, \dots, n$ máme zadánu buď matici A_k , nebo matici A_k^{-1} , potřebujeme právě n operací typu buď i) vynásobení dvou matic nebo ii) převedení obdélníku $(A|B)$ na tvar $(. , A^{-1}B)$.

Poznamenejme na závěr, že alternativně můžeme používat samozřejmě i odpovídajících sloupcových úprav: V případě $D = .$ (baze $\{b_i\}$ a $\{d_i\}$ jsou totožné) můžeme například vzít matici $\begin{pmatrix} M \\ L \end{pmatrix}$, sloupcově ji upravit do tvaru $\begin{pmatrix} Y \\ \cdot \end{pmatrix}$, kde $Y = LM^{-1}$, a nakonec vzít matici $YA = LM^{-1}A$.

20.25 Minima kvadratických forem a systémy mnoha spřažených harmonických oscilátorů

Úkol: Úlohu najít minimum funkce $F(x) = ax^2 + bx$, $a > 0$ umí vyřešit jistě každý, kdo otevře tuto knihu. Chceme zde upozornit, že tato zdánlivě triviální úloha sice zůstává triviální i ve vícerozměrném případě, tam už ale má docela zajímavé, ba netriviální aplikace!

Ve vícerozměrném případě máme pochopitelně zadánu symetrickou pozitivně (semi)definitní matici A rozměru $n \times n$, dále máme zadán nějaký vektor $b = (b_1, \dots, b_n)$ a zkoumáme absolutní či podmíněná minima kvadratické formy

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j \quad (379)$$

respektive obecněji lineárně kvadratické formy

$$(Ax, x) + (b, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i \quad (380)$$

jakožto funkce proměnných $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Řešení: Taková úloha vzniká v mnoha situacích, třeba hledáme-li tečnou (nad)rovinu k zadané kvadrice (řekněme elipsoidu nebo paraboloidu) rovnoběžnou se zadanou nadrovinou. Mnohem zajímavější interpretace ale dostaneme později při zkoumání minim energie systému *spřažených oscilátorů* (viz níže, takové modely pocházejí z kvantové teorie pole). Nejprve však úlohu (380) vyřešme.

Tak jako v jednorozměrném případě, je možno použít dvou metod:

První metoda: Derivace výrazu $(Ax, x) + (b, x)$ podle zvolené proměnné x_{i_0} je rovna

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{i_0}}((Ax, x) + (b, x)) &= \frac{\partial}{\partial x_{i_0}} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i \right) = \\ &= 2 \sum_{j=i_0}^n a_{i_0 j} x_j + 2a_{i_0 i_0} x_{i_0} + b_{i_0}; \end{aligned}$$

pozor na ty dvojky, objevují se zde z různých důvodů: $a_{ij} + a_{ji} = 2a_{ij}$ resp. $((x_{i_0})^2)' = 2x_{i_0}$.

Takže minimum výrazu $(Ax, x) + (b, x)$ nastane v bodě $x = (x_1, \dots, x_n)$, kde platí $2Ax + b = 0$, neboli pro vektor $x = -\frac{1}{2}A^{-1}b$.

Druhá metoda: Stejný výsledek dostaneme i metodou "doplnění na čtverec". Označme symbolem $B = \sqrt{A}$ odmocninu z matice A . Připomeňme, že matici B definujeme pomocí spektrálního rozkladu $A = ODO^T$, kde matice O je ortogonální, $O^T = O^{-1}$, a matice D je diagonální (s kladnými prvky na diagonále v případě pozitivní definitnosti A). Položíme potom $B = O\sqrt{D}O^T$, přičemž je jasné, jak definujeme \sqrt{D} .

A nyní již pokračujeme téměř doslovně tak jako v jednorozměrném případě:

$$(Ax, x) + (b, x) = (Bx, Bx) + (B^{-1}b, Bx),$$

využíváme zde symetrie matice B ,

$$\begin{aligned} &= (Bx + \frac{1}{2}B^{-1}b, Bx + \frac{1}{2}B^{-1}b) - \frac{1}{4}(B^{-1}b, B^{-1}b) = \\ &= \|Bx + \frac{1}{2}B^{-1}b\|^2 - \frac{1}{4}(A^{-1}b, b), \end{aligned}$$

Minimum tedy nastává, pokud $Bx + \frac{1}{2}B^{-1}b = 0$, neboli $x = -\frac{1}{2}A^{-1}b$. Takto jsme spočetli nejen, kde se minimum nachází, ale i jeho hodnotu: $-\frac{1}{4}(A^{-1}b, b)$.

20.26 Interpretace výsledku úlohy 20.25 pro systém spřažených oscilátorů. Feynman–Kacova formule.

Kvadratická forma (Ax, x) bývá v konkrétních úlohách zadána např. ve tvaru, kde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $p_{ij} \geq 0$

$$\sum_{i=1}^n p_{ii}x_i^2 + \sum_{i,j=1}^n p_{ij}(x_i - x_j)^2 = E(x),$$

připomínáme, že předpokládáme symetrii ($p_{ij} = p_{ji}$) a pozitivní definitnost ($E(x) > 0$ pro $x \neq 0$). Veličinu $E(x)$ lze interpretovat jako energii systému spřažených oscilátorů (kuliček na pružinkách): Přitom chápeme veličinu $x_i \in \mathbb{R}$ (popř. $x_i \in \mathbb{R}^2$ či $x_i \in \mathbb{R}^3$) jako výchylku i -tého oscilátoru od své rovnovážné polohy $x_i = 0$, a jednotlivé oscilátory jsou pospojované gumičkami či pružinkami tuhosti p_{ij} , které spojují sousední prvky (i, j) daného systému. Veličiny¹¹⁴ p_{ii} popisují sílu ukotvení jednotlivých oscilátorů vůči klidovému stavu $x_i = 0$. Lze si představovat konstrukci třeba drátěnky staré postele, ale tento model hraje důležitou roli i v kvantové teorii pole či ve statistické fyzice. Potom je ovšem počet oscilátorů $n \approx 10^{27}$ (či ještě mnohem větší) a vzoreček

$$x = -\frac{1}{2}A^{-1}b$$

¹¹⁴Případu $p_{ii} \equiv 0$ „žádné ukotvení pružinek“ se říká „pole s nulovou hmotou“. Uvedená terminologie je původem z kvantové teorie pole (QFT).

odvozený výše je v takovéto holé formě zcela bezcenný, neboť počítat inverzi tak velké matice standardními metodami nevede k rozumnému výsledku v rozumném čase.

Energii $E(x)$ lze napsat ve tvaru

$$E(x) = \sum_i d_{ii}(x_i)^2 - (Qx, x),$$

kde matice $Q = \{q_{ij}\}$ má již *nuly* na diagonále a jinak prvky

$$q_{ij} = 2p_{ij}, \quad i \neq j; \quad \text{a k tomu je } d_{ii} = p_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (p_{ij} + p_{ji}).$$

Všimněte si, že platí $d_{ii} \geq \sum_{j \neq i} q_{ij}$ („tzv. diagonální dominance“) a rovnost (nejzajímavější případ!) nastane pro případ nulové hmoty tzn. pro případ $p_{ii} \equiv 0$.

V dalším označujeme množinu všech indexů symbolem Λ , třeba $\Lambda = \{1, \dots, n\}$. V konkrétních případech (ať již v případě té drátěnky, či v případě QFT) mívá vždy Λ pravidelnou strukturu dvoj, troj či čtyřrozměrné mříže. Nejvhodnější je si představovat, že Λ je konečnou cyklickou grupou (ať již jednorozměrnou – pak položíme $n \equiv 0$ – nebo vícerozměrnou). Potom bývají veličiny p_{ij} , a tedy i q_{ij} obvykle invariální vůči translacím té mříže, a lze pro pohodlnost předpokládat například i vztah $d_{ii} \equiv 1$ tedy $E(x) = (x, x) - (Qx, x)$.

Fixujme nyní nějakou „okrajovou podmínku“ $\{x_i = \bar{x}_i, i \in M^c\}$ na doplňku $M^c \equiv \Lambda \setminus M$ nějaké podmnožiny $M \subset \Lambda$ mříže Λ a ptejme se, v jaké poloze se ustálí klidové polohy ostatních oscilátorů. Příklad: Slápneme doprostřed drátěnky upevněné na krajích. Jak se vychýlí polohy okolních uzlů té drátěnky?

Klidová poloha systému nyní odpovídá konfiguraci $x \equiv x_\Lambda = \{x_i, i \in \Lambda\} = x_M \cup x_{M^c}$, pro kterou je minimální veličina

$$E(x_\Lambda) = E(x_M \cup x_{M^c}) = (x_\Lambda, x_\Lambda) - (Qx_\Lambda, x_\Lambda)$$

při fixované volbě veličin („výchylek“) $\{x_i = \bar{x}_i, i \in M^c\}$ vně námi zkoumaného objemu M .

V aplikacích se ve vzorcích

$$E(x_\Lambda) = \sum_{i \in \Lambda} d_{ii}(x_i)^2 - (Qx_\Lambda, x_\Lambda) = \sum_{i \in \Lambda} p_{ii}x_i^2 + \sum_{i, j \in \Lambda} p_{ij}(x_i - x_j)^2$$

vyskytují obvykle jen páry dostatečně blízkých sousedů (i, j) ; jinak tedy bývá $p_{ij} \equiv 0$ a $q_{ij} \equiv 0$.

„Aktivní“ páry oscilátorů (tedy takové, že platí $p_{ij} > 0$, a tedy i $q_{ij} > 0$) tvoří na indexové množině $\Lambda = \{1, \dots, n\}$ jistý neuspořádaný graf G pravidelné struktury. Označujeme dále žebra tohoto grafu symbolicky $b = \{i, j\}$ a jejich „váhy“ jako

$$q_b = q_{ij}.$$

V dalším zápisu již pro pohodlnost předpokládejme, že platí vztah $d_{ii} \equiv 1$. Tento předpoklad není nijak na újmu obecnosti v případech translačně invariantních systémů oscilátorů na toru.

Zkoumejme nyní minimum našeho kvadratického výrazu $E(x_\Lambda) = (x_\Lambda, x_\Lambda) - (Qx_\Lambda, x_\Lambda)$ za podmínky $x_{M^c} = \bar{x}_{M^c}$. Jde tedy o minimum lineárně kvadratické formy typu $(Ax, x) + (b, x)$ přesněji o minimum funkce

$$\sum_{i \in M} (x_i)^2 - \sum_{i, j \in M: i \neq j} q_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{\substack{j \in M^c \\ i \in M}} q_{ij} x_i \bar{x}_j \quad (381)$$

za podmínky fixace \bar{x}_{M^c} . Člen $\sum_{i, j \in M^c} q_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j$ zde již nepíšeme, neboť je pro zadanou okrajovou podmínku $\{x_i = \bar{x}_i, i \in M^c\}$ stejně konstantní. Vztah $2Ax = -b$ nyní znamená následující: označíme-li symbolem $\bar{x}_M = \{\bar{x}_i, i \in M\}$ řešení úlohy (381) máme rovnosti (připomínáme, že pro jednoduchost značení uvažujeme již pouze případ $d_{ii} \equiv 1$, proved'te podrobně příslušnou aritmetiku)

$$\bar{x}_i = \sum_{j \neq i} q_{ij} \bar{x}_j \quad \forall i \in M. \quad (382)$$

Vidíme, že \bar{x}_i je jistým váženým průměrem „okolních veličin \bar{x}_j “ (v grafu G). V souladu s terminologií obvyklou v analýze bychom mohli říci, že funkce \bar{x}_M je harmonickou funkcí proměnné $i \in M$. Nyní použijeme Feynman–Kacovy metody. Vztah (382) totiž můžeme iterovat, dosazovat znovu a znovu do sebe sama. Dosazování ukončíme vždy v momentě, kdy příslušné j ze vztahu

$$\bar{x}_i = \sum_{j \neq i} q_{ij} \bar{x}_j$$

dosáhne množiny M^c , $j \in M^c$.

Definice: Náhodnou procházkou „z bodu $i \in M$ na okraj M “ nazveme libovolnou posloupnost P indexů tvaru $P = (i = i_0, i_1, \dots, i_n = j)$ takovou, že $i_k \in M \forall k = 0, 1, \dots, n-1$ a přitom platí $i_n = j \in M^c \equiv \Lambda \setminus M$. Vahou procházky P rozumíme veličinu (součin přes všechna žebra $b = (i_k, i_{k+1})$ procházky P)

$$q_P = \prod_{b \in P} q_b.$$

Stačí se tedy omezit na procházky „skrz žebra grafu G “, jiné procházky mají váhu nula. Nyní platí důležitá

Věta (Feynman–Kacova formule): Konfigurace \bar{x}_M minimalizující kvadratickou energii $E(x_\Lambda)$ za podmínky $x_{M^c} \equiv \bar{x}_{M^c}$ splňuje $\forall j \in M$ podmínku

$$\bar{x}_j = \sum_P q_P \bar{x}_{k(P)},$$

kde sumace je přes všechny procházky P startující v bodě $j \in M$ a kde $k(P)$ označuje „konec“ procházky $P = (j = i_0, \dots, i_n = k_P)$ tzn. moment dosažení M^c ; zatímco platí $i_k \in M$ pro $k < n$ tak je již $i_n = k(P) \in M^c$.

Cvičení 1. Promyslete důkaz této věty, není to již obtížné.

Cvičení 2. Spočtete hodnotu veličiny

$$E(\bar{x}_M \cup \bar{x}_{M^c}) = \min_{X_M} E(x_M \cup \bar{x}_{M^c})$$

pro \bar{x}_M z předchozí věty, dosazením Feynman–Kacovy formule do vzorce pro energii $E(\bar{x}_M \cup \bar{x}_{M^c})$! Řešení vyjde ve velmi elegantním tvaru, kvadratické členy v něm budou indexovány všemi možnými procházkami (po grafu G s nenulovými žebry $q_{i,j} \neq 0$) z množiny M^c přes M zpět do M^c :

Věta: Platí vztah

$$E(\bar{x}_M \cup \bar{x}_{M^c}) = - \sum_C q_C \bar{x}_{z(C)} \bar{x}_{k(C)} + \sum_{i \in M^c} (\bar{x}_i)^2,$$

kde první sumace je přes všechny (orientované) procházky typu $C = (i_0, i_1, \dots, i_n)$ takové, že

$$i_0 = z(C) \in M^c, \wedge i_n = k(C) \in M^c, \wedge i_k \in M; 1 \leq k \leq n-1.$$

Indexy $z(C)$ resp. $k(C)$ označují počáteční resp. koncové body těchto procházek C . Váhou procházky C míníme opět veličinu (součin přes všechna žebra $b = (i_j, i_{j+1})$ kde $j = 0, 1, \dots, m - 1$)

$$q_C = \prod_{b \in C} q_b$$

a opět platí, že s nenulovými příspěvky jsou pouze ty procházky, které jsou podgrafy grafu G .

Aplikace uvedené Feynman–Kacovy formule při detailnějším studiu Coulombovských potenciálů, při řešení problému návratnosti náhodné procházky a při studiu rozptylu příslušných gaussovských měř viz v další úloze věnované tomuto tématu.

20.27 Anihilační a kreační operátor na konečně-rozměrném prostoru se skalárním součinem

Zdůrazněme, že skutečnou důležitost a eleganci mají tyto operátory pouze na nekonečněrozměrném prostoru, viz skripta [PLA], strana 243. Jsme ale v lineární algebře — a tak níže zformulujeme co možná nejvěrnější karikaturu těchto důležitých pojmů i v prostorech konečné dimenze. Výhodou jest, že toto zavedení bude zcela rigorózní (i když se ztratí hodně z elegance původní konstrukce) zatímco fyzikální situace se bez rozvinutí alespoň částí teorie nekonečněrozměrných operátorů neobejde. Pokládáme zde pro jednoduchost zápisu všechny fyzikální konstanty (jako Planckovu) rovny jedné. (Čtenáři samozřejmě doporučujeme podrobně se seznámit i s nekonečněrozměrnou verzí, speciálně se všemi příslušnými důležitými komutačními vztahy.)

Úkol: *Nechť je tedy V_n prostor funkcí typu*

$$f(x) = P(x)e^{-\frac{x^2}{2}},$$

kde P je polynom stupně nejvýše n . Skalární součin na tomto prostoru bereme

$$b(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\bar{g}(x) dx.$$

Spočtete adjunkci k anihilačnímu operátoru

$$A = \left(x + \frac{d}{dx} \right) : V_n \rightarrow V_n$$

Řešení: Nejprve je dobré si uvědomit, že A zobrazuje V_n skutečně do V_n , tedy že i pro polynom P stupně n obsahuje $A(Pe^{-\frac{x^2}{2}})$ polynom stupně nejvýše n (totiž stupně $n - 1$).

Pro polynom P stupně menšího než n bude zřejmě opravdu platit $A^*(Pe^{-\frac{x^2}{2}}) = (x - \frac{d}{dx})(Pe^{-\frac{x^2}{2}})$, viz níže. Je-li ovšem P stupně n , je $(x - \frac{d}{dx})Pe^{-\frac{x^2}{2}} = Qe^{-\frac{x^2}{2}}$ kde Q je polynom stupně $n + 1$ (vyzkoušejte). Označme symbolem π_n ortogonální projekci z prostoru V_m , $m > n$ (třeba $m = n + 1$) do podprostoru V_n . Potom pro $P(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \in V_m$ a $Q(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \in V_n$ platí

$$b(\pi_n(P(x)e^{-\frac{x^2}{2}}), Q(x)e^{-\frac{x^2}{2}}) = b(P(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, Q(x)e^{-\frac{x^2}{2}}),$$

tedy označíme-li $f(x) = P(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, $g(x) = Q(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, kde stupně P a Q jsou $\leq n$, máme vztah (ověřte podrobněji, místo funkce $P(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ bereme nyní funkci $\pi_n(x - \frac{d}{dx})P(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$)

$$b(\pi_n(x - \frac{d}{dx})f, g) = b(x - \frac{d}{dx})f, g) = b(f, (x + \frac{d}{dx})g)$$

pro všechna $g \in V_n$ s použitím vzorce per partes. Jinými slovy platí:

$$\left(x + \frac{d}{dx} \right)^* = \pi_n \cdot \left(x - \frac{d}{dx} \right)$$

na každém takovémto prostoru V_n .

20.28 Projekce ortogonální báze

Úkol: V euklidovské rovině \mathbb{R}^2 máme tři vektory v_1, v_2, v_3 . Jak poznáme, že to jsou ortogonální projekce nějaké ortonormální báze w_1, w_2, w_3 z euklidovského nadprostoru $\mathbb{R}^3 \supset \mathbb{R}^2$?

Řešení: Jde o to, zda lze přidat k matici A (typu dvakrát tři) složené ze souřadnic vektorů v_1, v_2, v_3 ještě jeden, třetí řádek, aby

vznikla ortogonální matice se vzájemně ortogonálními *sloupci* velikosti jedna. To je zřejmě možné právě tehdy, pokud jsou *řádky* matice A navzájem kolmé a mají velikost jedna. Pak je lze totiž doplnit (v tomto konkrétním případě jednoznačně) třetím řádkem velikosti jedna, ortogonálním k prvním dvěma. A jsme hotovi. (Proč?)

Úloha má zobecnění pro k -rozměrné projekce z n -rozměrného prostoru, zformulujte a dokažte jej. *RB

20.29 Translačně invariantní kvadratické formy a náhodné procházky na mříži

V tomto příspěvku se podíváme na podmíněná minima takovýchto kvadratických forem na nekonečné mříži („Coulombovy potenciály“) a prostudujeme jejich chování. Odvodíme vyjádření hodnot příslušných energetických minim jako vhodných sum přes náhodné „smyčky“ na dané mříži a ukážeme zajímavé souvislosti jednak s chováním (vratnost či nevratnost) odpovídajících náhodných procházek na zvolené mříži, jednak s chováním gaussovské Gibbsovské míry příslušející zvolené kvadratické formě.

Klíčovým slovem níže diskutované problematiky je kvadratická forma (Hamiltonián) typu

$$\mathbf{H}_\varepsilon(x_\Lambda) = \sum_{\{i,j\} \in \Lambda: |i-j|=1} (x_i - x_j)^2 + \varepsilon \sum_{i \in \Lambda} x_i^2 \quad (383)$$

na konfiguračním prostoru \mathbb{R}^Λ , kde Λ je konečný diskretní torus (dimenze d) tvaru

$$\Lambda = \{0, 1, \dots, n-1\}^d,$$

tedy součin cyklických grup $\{0, 1, \dots, n \equiv 0\}$.

Formálně vzato, chtěli bychom Hamiltonián 383 a výše nadhozenou problematiku (náhodné procházky, Gaussovské míry) studovat na \mathbb{Z}^d . Z technických důvodů je výhodné pracovat na konečné grupě Λ a teprve na závěr udělat limitní přechod (termodynamickou limitu) $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$, čímž míníme limitu pro $n \rightarrow \infty$.

Co se hodnoty ε týče, nejzajímavější interpretace budou právě pro $\varepsilon = 0$. I zde bude ale z technických důvodů (požadavek regularity kvadratické formy 383 apod.) vhodné pracovat většinou s hodnotou

$\varepsilon > 0$ a teprve potom (obvykle až po provedení termodynamické limity $\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d$) zkoumat limitu pro $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Poznamenejme, že místo 383 lze obecněji (a vcelku analogicky) zkoumat kvadratickou formu typu (b_i jsou *translačně invariantní koeficienty*)

$$\mathbf{H}_\varepsilon(x_\Lambda) = \sum_{\{i,j\} \in \Lambda} b_{i-j}(x_i - x_j)^2 + \varepsilon \sum_i x_i^2 \quad (384)$$

s vhodnými koeficienty (třeba nezápornými) tak, aby tato forma byla pro $\varepsilon > 0$ pozitivně definitní. Úplně nejobecněji můžeme zkoumat pozitivně definitní formu typu

$$\mathbf{H}(x_\Lambda) = \sum_{i,j \in \Lambda} a_{i-j} x_i x_j = (a_\Lambda * x_\Lambda, x_\Lambda) = (Ax_\Lambda, x_\Lambda), \quad (385)$$

kde (x_Λ, y_Λ) označuje běžný skalární součin na \mathbb{R}^Λ a matice A má prvky $a_{ij} \equiv a_{i-j}$. Konvolucí $y_\Lambda = a_\Lambda * x_\Lambda$ rozumíme konfiguraci $y_i = \sum_{j \in \Lambda} a_{i-j} x_j$. Uvažované konvoluční jádro $a_\Lambda = \{a_i : i \in \Lambda\}$ bude obvykle symetrické ($a_i = a_{-i}$) a omezeného dosahu ($a_i = 0$ pro libovolné $|i| > R$). V takovém případě budeme R nazývat *dosahem interakcí* v Hamiltoniánu 385.

Píšeme-li Hamiltonián 384 ve tvaru 385, máme

$$a_i = -2b_i \text{ (pro } i \neq 0), \quad a_0 = \varepsilon + 2 \sum_{i \in \Lambda} b_i,$$

neboli $A = a_0(J - W)$, $w_{ij} \equiv w_{i-j}$, kde $w_i = \frac{2b_i}{a_0}$, čili můžeme vztah 385 (a tedy i 383, 384) psát ve tvaru

$$\mathbf{H}_\varepsilon(x_\Lambda) = a_0((J - W)x_\Lambda, x_\Lambda),$$

kde W je matice s prvky $w_{ij} \equiv w_{i-j}$ taková, že platí $w_0 \equiv 0$ a

$$\sum_{i \neq 0} |w_i| \leq 1, \text{ resp } < 1$$

podle toho, zda $\varepsilon = 0$, nebo $\varepsilon > 0$.

V případě potřeby budeme níže zavádět označení $W \equiv W^\varepsilon$ zdůrazňující nenulovou hodnotu $\varepsilon > 0$. Speciálně pro Hamiltonián 383 máme

$$w_{ij}^\varepsilon = \begin{cases} \frac{2}{4d+\varepsilon}, & |i-j| = 1 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

a

$$\sum_j w_{ij}^\varepsilon = \frac{4d}{4d+\varepsilon} < 1.$$

Plán dalšího postupu je následující. Nejprve se krátce zmíníme o gaussovských mírách na \mathbb{R}^Λ odpovídajících kvadratickému Hamiltoniánu 383–385. Vyjasníme roli náhodných procházek při vyjadřování hodnot inverzní matice $(J - W)^{-1}$ a interpretujeme rozptyl příslušných Gaussovských veličin v termínech pravděpodobnosti návratu náhodné procházky do počátku. Na závěr zanalyzujeme chování „Coulombových potenciálů“ formy $((J - W)x_\Lambda, x_\Lambda)$, tedy chování podmíněných minim této funkce při fixované *okrajové podmínce* (zadané třeba jen v jednom bodě), ukáže se totiž (s použitím Feynman-Kacovy formule), že energie Coulombova potenciálu je vyjádřena veličinou úzce související právě se zmiňovanou *pravděpodobností návratu* náhodné procházky (po mříži, na níž příslušný potenciál studujeme).

Studujme tedy nejprve Gaussovské míry odpovídající Hamiltoniánu $\mathbf{H}_\varepsilon(x_\Lambda)$. Uvažujme

$$\mathbf{H}_\varepsilon(x_\Lambda) = a_0((J - W)x_\Lambda, x_\Lambda),$$

kde $W = \{w_{ij} \equiv w_{i-j}\}$, pro které platí $\sum_i |w_i| < 1$. Tomuto Hamiltoniánu odpovídá následující gaussovská míra, která je daná hustotou pravděpodobnosti

$$\frac{d\mu(x_\Lambda)}{dx_\Lambda} = \frac{e^{-H_\varepsilon(x_\Lambda)}}{Z(\Lambda)},$$

kde

$$Z(\Lambda) = \int_{\mathbb{R}^\Lambda} e^{-H_\varepsilon(x_\Lambda)} dx_\Lambda = a_0^{-\frac{|\Lambda|}{2}} \int_{\mathbb{R}^\Lambda} e^{-((J-W)x_\Lambda, x_\Lambda)} dx_\Lambda.$$

V dalších výpočtech budeme pro jednoduchost počítat s $a_0 \equiv 1$. Případné zakomponování obecného a_0 do formulí, které budou

následovat, je celkem triviální. Víme, že $Z(\Lambda)$ je potom vyjádřeno vzorcem

$$Z(\Lambda) = \sqrt{\frac{\pi^{|\Lambda|}}{\det(J - W)}}.$$

Jde tedy o výpočet determinantu $\det(J - W)$, jemuž jsme výše věnovali samostatný příklad 11.9. Výsledkem je

$$\det(J - W) = \exp\left(\sum_C \ln(1 - w_C)\right),$$

kde se sčítá přes všechny „nerozložitelné smyčky“ v Λ a $w_C = \prod_{(i,j) \in C} w_{ij}$, kde součin je přes všechna žebra (i, j) smyčky C .

Podívejme se nyní na rozptyl veličin daných gaussovskou pravděpodobností zadanou výše, tedy v první řadě na veličinu (x_0) zde označuje hodnotu x_Λ v bodě $i = 0$)

$$V_\varepsilon^\Lambda = \int_{\mathbb{R}^\Lambda} x_0^2 d\mu(x_\Lambda).$$

Píšeme $V \equiv V_\varepsilon^\Lambda$, abychom zdůraznili roli parametru $\varepsilon > 0$ v Hamiltoniánu $((J - W)x_\Lambda, x_\Lambda)$, popřípadě i roli mřížky Λ . Důležitá (pro následné interpretace ve statistické fyzice) je dvojná limita

$$V = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} V_\varepsilon^\Lambda \right).$$

Tu můžeme interpretovat jako „rozptyl (varianci) veličiny x_0 “ v případě, že „konfiguraci x_Λ držíme, pro $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$, v nekonečnu na hodnotách $x_i = 0$, $i \rightarrow \infty$ “. Zatímco role konečné mřížky Λ v těchto úvahách bude vcelku triviální (pouhá potřeba konečnosti sum v $\mathbf{H}(x_\Lambda)$), chování veličiny V_ε v okolí $\varepsilon = 0$ bude zajímavé, a uvidíme zásadní rozdíl mezi dvoj a vícerozměrnou situací.

Věta 1: Platí $V = \infty$ respektive $V < \infty$ podle toho, zda $d = 2$ nebo $d \geq 3$. (Pro pozitivně semidefinitní formu 383 nebo obecněji 385.)

Důkaz: a) Víme, že $V_\varepsilon^\Lambda = C_{00}$, kde $C = (J - W_\varepsilon)^{-1}$. Píšeme podrobněji W_ε namísto W , abychom zdůraznili roli ε (viz příklad o gaussovském integrování výše, konkrétně vyjádření variance

gaussovské míry $c_{ij} = \int x_i x_j d\mu(x)$, kde μ odpovídá matici A pomocí inverzní matice $C = A^{-1}$). Tedy $C = \sum_{n=0}^{\infty} (W_\varepsilon)^n$ a

$$V_\varepsilon^\Lambda = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\substack{P: \\ |P|=k}} w_p^\varepsilon,$$

kde $w_p^\varepsilon = \prod_{(i,j) \in P} w_{i,j}^\varepsilon$ a sčítáme všechny P – procházky po mříži Λ , jejichž počáteční a koncový bod je $0 \in \Lambda$. Ve vzorci pro váhu procházky w_p^ε násobíme maticové elementy $w_{i,j}^\varepsilon$ přes všechna žebra (i, j) procházky P . Délkou $|P|$ procházky P nazýváme počet jejích žebor.

b) Nazvěme smyčkou takovou uzavřenou procházku, která se do svého počátečního bodu vrátí až v posledním kroku. Položme

$$P_\varepsilon^\Lambda = \sum_S w_S^\varepsilon,$$

kde sumace je přes všechny smyčky začínající a končící v 0. Potom platí vzorec

$$V_\varepsilon^\Lambda = 1 + \sum_P w_P^\varepsilon = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (P_\varepsilon^\Lambda)^m,$$

neboť každou procházku P s počátkem a koncem v 0 lze rozložit na uspořádanou m -tici smyček.

c) Takže konečnost respektive nekonečnost veličiny V_ε^Λ v limitě

$$V = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} V_\varepsilon^\Lambda$$

skutečně závisí na tom, zda veličina

$$p = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} p_\varepsilon^\Lambda$$

je rovna jedné či nikoliv. Pokud je $p < 1$ máme totiž vztah

$$V = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} p^m = \frac{1}{1-p}.$$

Naopak, je-li $p = 1$ je zřejmě $V = \infty$.

d) Důkaz věty dokončíme později, až dokážeme, že (pro $\varepsilon = 0$) $p = 1 \Leftrightarrow d = 2$.

Poznámka (o interpretaci věty): Setkali jsme se právě s popisem vratnosti či nevratnosti náhodné procházky definované na \mathbb{Z}^d tak, že pravděpodobnost přechodu z bodu i do „sousedního“ bodu j je dána jakousi nezápornou veličinou $w_{ij} = w_{i-j}$ takovou, že

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} w_i = 1 - \varepsilon.$$

kde ε je pravděpodobnost „zániku poutníka“. Ptáme se (samozřejmě hlavně pro $\varepsilon \rightarrow 0$) na pravděpodobnost té události, že poutník se někdy vrátí do počátečního bodu své cesty (Tedy ani cestou nezanimkne – to je zajištěno podmínkou $\varepsilon = 0$, ani se časem nevzdálí někam do nekonečných končin). Lepší otázkou (s výraznou odpovědí) ale je: „Jaká je pravděpodobnost Q toho, že se poutník vrátí do svého počátečního bodu nekonečněkrát?“ Odpověď na takovouto otázku jest (pro $\varepsilon = 0$): „ $Q = 0$ pro $D \geq 3$, $Q = 1$ pro $d = 2$ “.

Takže zbývá vyjasnit chování veličiny

$$p_\varepsilon^\Lambda = \sum_S w_S^\varepsilon, \quad w_S^\varepsilon = \prod_{(i,j) \in S} w_{ij}$$

sčítáme-li přes všechny smyčky v Λ s počátečním a koncovým bodem 0. Zde bude účelné vrátit se k případu konečného toru Λ a $\varepsilon > 0$; teprve po nalezení příslušných formulí provedeme limitní přechod

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} p_\varepsilon^\Lambda.$$

Odpověď na otázku „Jak získat užitečné vyjádření veličin p_ε^Λ ?“ dává studium Coulombových (Newtonových) potenciálů příslušných dané kvadratické formě. Definujeme je takto:

Definice: Nechť $M \subset \Lambda$, píšeme v dalším M^c místo $\Lambda \setminus M$. Fixujeme nějakou konfiguraci $\bar{x}_{M^c} \in \mathbb{R}^{M^c}$. Označme symbolem \bar{x}_{M^c} konfiguraci na M minimalizující kvadratickou formu (W je matice diskutovaná v předchozím textu, $w_{ij} \equiv w_{i-j}$, $\sum_i |w_i| < 1$, $\mathbf{H}(x_\Lambda) = ((I - W)x_\Lambda, x_\Lambda)$ za podmínky $x_{M^c} = \bar{x}_{M^c}$.)

V jiném příkladě této sbírky dokazujeme následující větu, tzv. Feymann-Kacovu formuli:

Věta 2: Pro minimalizující konfiguraci \bar{x}_{M^c} a pro libovolný bod $i \in M$ platí vztah

$$\bar{x}_i = \sum_P w_P \bar{x}_{k(P)}, \quad (386)$$

kde součet se bere přes všechny procházky P začínající v bodě i a končící v M^c . (Konec procházky je definován jako okamžik, kdy se procházka poprvé octne v množině $M^c \equiv \Lambda \setminus M$.) Váha procházky je opět dána formulí

$$w_P = \prod_{(i,j) \in P} w_{ij}$$

kde součin je přes všechna žebra P .

Viz předchozí příklad (o minimech kvadratických forem), kde podrobněji diskutujeme i formuli 387. Základem je elementární pozorování, že funkce $H(\bar{x}_{M^c} \cup x_M)$ má podle předpokladu minimum v bodě $x_M = \bar{x}_M$. Tedy parciální derivace H podle x_i , $i \in M$ jsou rovny nule, což dává vyjádření (zopakujte si jej)

$$\bar{x}_i = \sum_j w_{ij} \bar{x}_j, \quad (387)$$

kde sumujeme přes všechna „sousední“ j (taková, že $w_{ij} \neq 0$) a \bar{x}_j je buď hodnota minimalizující konfigurace \bar{x}_M v bodě $j \in M$ nebo, v případě $j \in M^c$, hodnota příslušné okrajové podmínky. Nyní stačí iterovat použitou formuli 387 (dosazovat ji samu do sebe znova a znova, dokud neplatí $j \in M^c$) a dostaneme kýžený vztah 386.

Dosaďme nyní formuli 386 do vzorce pro minimalizující Hamiltonián

$$\mathbf{H}(\bar{x}_\Lambda) = ((J - W)x_\Lambda, x_\Lambda) = \sum_{i \in \Lambda} \bar{x}_i^2 - \sum_{i,j \in \Lambda} w_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j.$$

Dostaneme potom následující elegantní výsledek.

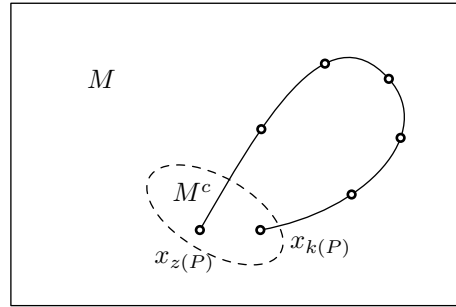
Věta 3: Nechť konfigurace \bar{x}_M minimalizuje Hamiltonián $\mathbf{H}(x_M \cup x_{M^c})$ při fixované podmínce \bar{x}_{M^c} . Potom platí vzorec, pro $\bar{x}_\Lambda =$

$$\bar{x}_{M^c} \cup \bar{x}_M \quad \mathbf{H}(\bar{x}_\Lambda) = \sum_{i \in M^c} \bar{x}_i^2 - \sum_P w_P \bar{x}_{z(P)} \bar{x}_{k(P)}, \quad (388)$$

kde sčítáme přes všechny procházky $(i_0 = z(P), i_1, \dots, i_n = k(P))$ takové, že začátek $z(P)$ i konec $k(P)$ leží v M^c , ale $x_i \in M$ pro $i = 1, \dots, n-1$. Váha procházky P je dána, jako obvykle, součinem přes všechna žebra $(i_k, i_{k+1}), k = 0, 1, \dots, n-1$

$$w_P = \prod_{k=1}^{n-1} w_{i_k, i_{k+1}}$$

(Všimněte si, že pro $M = \emptyset$ dostáváme obvyklý tvar $\mathbf{H}(\bar{x}_\Lambda)$.)



Důkaz: Je vcelku jasné, že dosazením formule 386 do a) první i b) druhé sumy ve vzorci 388 vznikají výrazy typu $w_P \bar{x}_{z(P)} \bar{x}_{k(P)}$. Rozdíl je v tom, jak ty procházky vznikají: v případě a) jako „slepence“ dvou procházek P_1, P_2 z jistého bodu $i \in M$ ven z M^c , v případě b) jako slepence dvou procházek (jedné začínající v i a druhé v j a jdoucí ven z M) a jedné příčky (i, j) dodávající k vahám w_{P_1} a w_{P_2} ještě jeden multiplikativní faktor $w_{(i,j)}$. Rozdíl je ve znaménkách, slepence $P_1 \& P_2$ vznikají se znaménkem 1, slepence $P_1 \cup \{i, j\} \cup P_2$ se znaménkem -2 (resp. -1 , uspořádáme-li dvojici $\{i, j\}$).

Poznámka (k terminologii a k přechodu do kontinua $\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$): Konfiguraci \bar{x}_Λ minimalizující $\mathbf{H}(x_\Lambda)$ za podmínky $x_{M^c} \equiv \bar{x}_{M^c}$ nazýváme Coulombovým resp. Newtonovým potenciálem (odpovídajícím hraniční podmínce \bar{x}_{M^c}). Představme si totiž $\Lambda = \mathbb{Z}^d$,

$M^c = \{0\} \cup \Lambda_\infty$, kde Λ_∞ je „okolí nekonečna“. Položme $\bar{x}_0 = 1$ a $\bar{x}_i = 0$ pro všechna $i \in \Lambda_\infty$. Dá se potom ukázat (není to ale triviální) že pro $1 \ll |i| \ll D = \text{dist}(0, \Lambda_\infty)$ platí (uvažujme pro konkrétnost pouze dimenzi $d \geq 3$)

$$\bar{x}_i = CV(i)(1 + \eta_i),$$

kde $\eta_i \rightarrow 0$ pro $D \rightarrow \infty$ a $|i| \rightarrow \infty$ (nebudeme zde přesně specifikovat v jakém smyslu), C je konstanta a V je obvyklý Coulombův potenciál z \mathbb{R}^d , tzn. funkce minimalizující integrál

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus K} |\text{grad } V|^2 dy$$

za podmínky $V(y) \equiv 1$ na hranici ∂K jednotkové koule $K = \{y : |y| \leq 1\}$. Zdůrazněme, že zde je již řeč o *euklidovské* normě na \mathbb{R}^d , tedy $V(y)$ (a přibližně i $V(i)$) je *centrálně symetrická funkce*, jejíž hodnoty závisí pouze na (euklidovské) vzdálenosti od počátku. $V(y) = 1/|y|$ pro $d = 3$.

Nyní uděláme ještě několik důležitých, byť elementárních a hrubých, odhadů veličiny $\mathbf{H}(x_\Lambda)$ pro dimenze $d = 2$ a $d = 3$. Nebudeme se pokoušet optimalizovat tyto odhady, ani ukazovat jejich vztah k odhadům pro energie harmonických funkcí v kontinuu (tedy v \mathbb{R}^d místo \mathbb{Z}^d). Tyto odhady umožní rozřešit problém o (ne)návratnosti procházek a tedy konečně uzavřít důkaz věty 1. Bude pohodlnější přejít z konečného toru Λ na celou mříž \mathbb{Z}^d .

Volme hraniční podmínku $\bar{x}_0 = 1$, $\bar{x}_i = 0$ pro $|i| \geq N$, $i \in \mathbb{Z}^d$. Situaci lze samozřejmě namodelovat i na dostatečně velikém toru Λ . Nechť

$$\bar{x}^{(N)} = \left\{ \bar{x}_i^{(N)}; |i| < N \right\}$$

označuje konfiguraci minimalizující $\mathbf{H}(x_\Lambda)$ za této podmínky. Položme $\bar{x}_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x}_i^{(N)}$. Předpokládejme, že pro každé N je torus Λ zvolen tak veliký, že množinu $M_N = \{i, |i| < N\}$ i její hranici $M_N^c = \{i, \text{dist}(i, M) \leq R\}$, kde R je „dosah interakce“ v Hamiltoniánu $\mathbf{H}(x_\Lambda)$ (tedy $a_{ij} \equiv 0$ pro $|i - j| \geq R$), lze do Λ izometricky vnořit. Potom zřejmě veličina $\mathbf{H}(\bar{x}_\Lambda^{(N)})$ nezávisí na volbě takového toru, označme ji prostě $\mathbf{H}(\bar{x}^{(N)})$. Máme potom zřejmě

$$\mathbf{H}(\bar{x}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{H}(\bar{x}^{(N)}),$$

kde levá strana je podle vztahu 388 s uvážením výše zmíněné okrajové podmínky dána nekonečnou sumou přes všechny procházky z počátku 0 dorazivší nakonec zpět do počátku (jejíž konvergence snadno plyne z předchozích úvah)

$$\mathbf{H}(\bar{x}) = 1 - \sum_p w_p^\epsilon.$$

Máme zde samozřejmě na mysli hlavně případ $\epsilon = 0$, pro opatrnost (hlavně v dimenzi $d = 2$) si představujeme, že $\epsilon > 0$ a limitní přechod $\epsilon \rightarrow 0$ uděláme až v úplném závěru. Z následující věty již plyne dokončení důkazu věty 1, neboť $\mathbf{H}(\bar{x}) = 1 - p$.

Věta 4: Pro $d = 2$ je $\mathbf{H}(\bar{x}) = 0$, zatímco pro $d \geq 3$ platí $\mathbf{H}(\bar{x}) > 0$.

Důkaz: a) Případ $d = 2$. Sestrojme pro každou posloupnost $\{a_n\}$ takovou, že $a_n \geq 0$ a $\sum_{n=1}^\infty a_n = 1$ konfiguraci danou předpisem

$$\tilde{x}_i = 1 - \sum_{j=1}^n a_j \quad \text{pokud } |i| = n.$$

Jsme stále na mříži, výrazem $|i| = \sum_{k=1}^d |i_k|$ rozumíme vzdálenost „typu l^1 “, množina $i : |i| = n$ je kosočtvercem o délce přepony $2n$. Předpokládáme-li interakci pouze nejbližších sousedů, je jasné podle vztahu 383, že energie takovéto konfigurace je rovna sumě (přispívají pouze páry nejbližších sousedů z různých „vrstevnic“)

$$\mathbf{H}(\tilde{x}) = \sum_{n=1}^\infty a_n^2 c(n),$$

kde $c(n)$ je počet nejbližších sousedů mezi body z kosočtverců $K(n) = \{i, |i| = n\}$ a $K(n-1)$. Nebudeme zde přesně odhadovat číslo $c(n)$, je jasné, že platí $\lim_{n \rightarrow \infty} c(n)/n = 4$. Takže

$$\mathbf{H}(\tilde{x}) = \sum a_n^2 c(n) = \sum (a_n n)^2 \frac{c(n)}{n^2}.$$

Volme nyní $a_n = K_N/n$, $n = 1, \dots, N$ a jinak $a_n = 0$ pro $n > N$. Necht' $K_N = (\sum_{n=1}^N \frac{1}{n})^{-1}$ tzn. $K_N \approx (\log N)^{-1}$. Počítejme, s touto

volbou a_n , hodnotu $\mathbf{H}(\tilde{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 c(n) = K_N^2 \sum c(n)/n^2 \approx K_N = (\log N)^{-1}$. Tedy vidíme, že $\mathbf{H}(\tilde{x}) = \inf \mathbf{H}(x) = 0$.

b) Příklad $d \geq 3$. Tento odhad je komplikovanější a fakt, že pracujeme v \mathbb{Z}^d (místo \mathbb{R}^d) situaci neulehčuje, ba právě naopak. Rozšíříme konfiguraci $x \in \mathbb{Z}^d$ lineárně (po částech, v každé buňce $\prod_{i=1}^d (n_i, n_i + 1)$) na funkci v celém \mathbb{R}^d . Označme tuto funkci symbolem $V(y)$. Platí, pro jistou minimální konstantu $c > 0$, vztah

$$\mathbf{H}(x) > cG(V), \quad \text{kde} \quad G(V) \equiv \int_{\mathbb{R}^d \setminus K(0)} |\text{grad } V|^2 dy$$

(tuto nerovnost stačí dokázat v každé jednotlivé buňce, ověřte). Při odhadu $G(V)$ lze použít symetrie funkce minimalizující $G(V)$ (takové symetrie na \mathbb{Z}^d nemáme!) Vskutku, je-li T ortogonální transformace na \mathbb{R}^d , tak je jistě $G(V) = G(V \circ T)$ a trochu (funkcionální) analýzy ukazuje, že minimum funkce G , při okrajové podmínce na V řekněme $V = 1$ na hranici koule $\{y : |y| = 1\}$ a $V = 0$ v nekonečnu, je nutno hledat mezi „centrálně symetrickými“ funkcemi V , jejichž hodnoty závisí pouze na vzdálenosti od počátku. To je známý Coulombův potenciál, pro $d = 3$ roven $V(y) = 1/|y|$ a máme též odhad

$$\mathbf{H}(x) > c \int_{\mathbb{R}^d \setminus K(0)} \left| \text{grad } \frac{1}{|y|} \right|^2 dy.$$

20.30 Lorentzovy transformace

Definice. (Minkowskiho kvadratické formy) Na prostoru \mathbb{R}^4 zavedme Minkowskiho pseudoskalární součin $(\cdot, \cdot)_M : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, definovaný $(v, w)_M := v_0 w_0 - v_1 w_1 - v_2 w_2 - v_3 w_3$, kde v_i resp. w_i jsou složky v resp. w vůči kanonické bázi \mathbb{R}^4 . Kvadratická forma $(\mathbb{R}^4, (\cdot, \cdot)_M) =: \mathbb{R}^{1,3}$ se nazývá (reálný) *Minkowskiho prostor*.

Definice. (Lorentzovy grupy) $O(1, 3) := \{A \in M(4, \mathbb{R}); (Ax, Ax)_M = (x, x)_M\}$, $SO(1, 3) := SL(4, \mathbb{R}) \cap O(1, 3)$. Grupa $O(1, 3)$ se nazývá *Lorentzova grupa*, $SO(1, 3)$ se nazývá *Lorentzova grupa orientaci zachovávajících prvků*.

Úkol. Dokažte, že výše definované množiny jsou grupy.

Řešení. Stačí ověřit uzavřenost na násobení a na inverzi.

Úkol. Dokažte, že prostor všech hermitovských matic typu 2×2 je vektorový prostor nad tělesem \mathbb{R} dimenze 4. Nalezněte jeho bázi. Tento prostor budeme značit $H(2)$.

Řešení. Každá hermitovská matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \overline{A}^t =: A^\dagger \quad (389)$$

má na diagonále reálná čísla. Prvky a_{12} a a_{21} jsou navzájem komplexně sdružené, tj. pokud $a_{12} = x_1 - ix_2$, potom $a_{21} = x_1 + ix_2$. Pro další výpočty bude vhodné napsat diagonální členy ve tvaru $a_{11} = x_0 + x_3$, $a_{22} = x_0 - x_3$, což lze právě jedním způsobem pro libovolná dvě reálná čísla a_{11}, a_{22} . Každou hermitovskou matici lze tedy psát ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}, \quad (390)$$

kde $x_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Naopak platí, že každá matice tohoto tvaru je hermitovská. Zvolme bázi $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ prostoru všech hermitovských matic ve tvaru:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (391)$$

tyto matice se nazývají *Pauliho matice*. Lze snadno ověřit, že prvky σ_α jsou lineárně nezávislé nad \mathbb{R} .

Dále je zřejmé, že pro libovolná reálná x^α platí, že $x^\alpha \sigma_\alpha$ je hermitovská matice. Libovolnou hermitovskou matici je možné psát ve tvaru matice A výše. Příným výpočtem se lze přesvědčit o tom, že $A = x^\alpha \sigma_\alpha$, tj. že σ_α generují prostor $H(2)$.

Tím jsme ověřili, že $\{\sigma_\alpha\}$ tvoří bázi reálného vektorového prostoru $H(2)$, a tak i dokázali, že $\dim_{\mathbb{R}} H(2) = 4$.

Úmluva. Definujme reálný izomorfismus vektorového prostoru $H(2)$ na prostor \mathbb{R}^4 a označme $j : H(2) \rightarrow \mathbb{R}^4$, $j^{-1}(x) = x^\alpha \sigma_\alpha$, kde $x = (x_0, \dots, x_3)^t$.

Úkol. Dokažte, že $(x, x)_M = \det(j^{-1}(x))$, $x \in \mathbb{R}^4$.

Řešení. O výše uvedeném vztahu se lze přesvědčit přímým výpočtem.

Úkol. Dokažte, že $J : M(2, \mathbb{C}) \rightarrow M(4, \mathbb{C})$, definovaný $J(A)x := j(Aj^{-1}(x)A^\dagger)$, $A \in H(2)$, $x \in \mathbb{R}^4$, je homomorfismus semigrup. Komentář: $J(A)$ je matice 4×4 , a proto ji lze vyčíslit na vektoru $x \in \mathbb{R}^4$, $j^{-1}(x)$ je matice 2×2 .

Řešení. Nejprve ověříme, že výše definované zobrazení má smysl, tj. že matice $Aj^{-1}(x)A^\dagger$ je hermitovská, a proto na ni lze aplikovat izomorfismus

$$j : H(2) \rightarrow \mathbb{R}^4 : (Aj(x)A^\dagger)^\dagger = Aj^{-1}(x)^\dagger A^\dagger = Aj^{-1}(x)A^\dagger, \quad (392)$$

neboť hermitovské sdružení je antiinvoluce (obrací pořadí a $\dagger \circ \dagger = id$) a $j^{-1}(x) \in H(2)$ pro každý vektor $x \in \mathbb{R}^4$.

Nyní ukážeme, že J je homomorfismem semigrup, tj. ověříme, že platí $J(AB) = J(A)J(B)$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^4$ platí

$$\begin{aligned} J(AB)x &= j(ABj^{-1}(x)(AB)^\dagger) = j(A(Bj^{-1}(x)B^\dagger)A^\dagger) = \\ &= j\{Aj^{-1}[j(Bj^{-1}(x)B^\dagger)]A^\dagger\} = J(A)[j(Bj^{-1}(x)B^\dagger)] = \\ &= J(A)[J(B)x] = (J(A)J(B))x, \end{aligned} \quad (393)$$

což bylo dokázat.

Úkol. Vypočtete J -obrazy následujících matic

$$K_1(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (394)$$

kde $\phi \in [0, 2\pi)$, a

$$A(r) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}, \quad (395)$$

kde $r \in \mathbb{C}$. V tomto případě dosad'te volbu $r = e^t$ a $r = e^{i\theta}$. Budeme označovat $A(r = e^{i\theta}) =: K_2(\theta)$, $A(r = e^t) =: M(t)$.

Řešení. Přímým výpočtem (vyčíslením $J(A)$ na prvcích kanonické báze, $J(A)e_i$) obdržíte následující výsledek

$$J(K_1(\phi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\phi & 0 & \sin 2\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin 2\phi & 0 & \cos 2\phi \end{pmatrix}, \quad (396)$$

$$J(M(t)) = \begin{pmatrix} \cosh 2t & 0 & 0 & \sinh 2t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh 2t & 0 & 0 & \cosh 2t \end{pmatrix}, \quad (397)$$

$$J(K_2(\theta)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (398)$$

Pozn. Výše definované matice $K_1(\phi)$, $A(r)$ spolu s maticí

$$N(k) := \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (399)$$

představují komponenty rozkladu libovolné matice z grupy $SL(2, \mathbb{C})$ na tzv. kompaktní, abelovskou a nilpotentní část. Tento rozklad je známý v teorii Lieových grup (pro libovolnou komplexní Lieovu grupu) jako *Iwasawův* nebo *KAN-rozklad*.

Umíte v tomto konkrétním případě podat geometrickou interpretaci matic v reálné verzi, tj. v $SL(2, \mathbb{R})$? Uvědomte si, že matice z $SL(2, \mathbb{R})$ jsou prvky zachovávající objem v \mathbb{R}^2 - tj. obsah v rovině. Nakreslete, na co příslušné matice $K(\phi)$, $A(r)$, $r \in \mathbb{R}$, $N(k)$, $k \in \mathbb{R}$ zobrazí obdélník, jehož střed koinciduje se středem souřadnic.

Úkol. Dokažte, že $J|_{SL(2, \mathbb{C})}$ je homomorfismus grupy $SL(2, \mathbb{C})$ na grupu

$$Im(J|_{SL(2, \mathbb{C})}).$$

Řešení. Zúžíme-li J na $SL(2, \mathbb{C})$, jeho obraz je podgrupou $O(1, 3)$. Tento fakt dokážeme následovně.

Dík předchozímu víme, že

$$\begin{aligned} (J(A)x, J(A)x)_M &= \det[j^{-1}(J(A)x)] = \det(Aj^{-1}(x)A^\dagger) = \\ &= \det(A) \det j^{-1}(x) \det A^\dagger = \\ &= 1 \cdot (x, x)_M \cdot 1 = (x, x)_M, \end{aligned} \quad (400)$$

neboť $A \in SL(2, \mathbb{C})$. Odtud plyne, že $J(A) \in O(1, 3)$. Zjistili jsme, že obraz zúženého zobrazení je podmnožinou grupy $O(1, 3)$.

Dík tomu, že J není jen homomorfizmem semigrup, ale i grup (stačí ověřit, že $J(A)^{-1} = J(A^{-1})$, což nyní dává smysl, neboť jsme právě zjistili, že $J(SL(2, \mathbb{C})) \subseteq O(1, 3) \subseteq GL(4, \mathbb{R})$, tj. invertibilnost elementů z $J(SL(2, \mathbb{C}))$), je jeho homomorfní obraz také grupou.

Definice. (Boost¹¹⁵) Matici $A \in O(1, 3)$ nazveme *boost*, pokud existuje matice $Q \in O(3)$, že

$$QAQ^{-1} = L_u^z := \begin{pmatrix} \cosh u & 0 & 0 & \sinh u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh u & 0 & 0 & \cosh u \end{pmatrix}. \quad (401)$$

Pozn. Matici Q , která je typu 3×3 , si představujeme jako matici 4×4 , která vznikne z A doplněním nultého řádku a nultého sloupce (nahoru a doleva), které až na svůj průnik, kde se nachází jednotka, jsou nulové. Q je tedy blokově diagonální matice s bloky: 1 a A . Takovouto matici již umíme násobit s Lorentzovou transformací A .

Úkol. Všimněte si, že L_u^z (nazývaný *boost podél osy z s rapiditou u*) souvisí s běžnými Lorentzovými transformacemi ze „střední školy“. Určete vztah mezi faktory $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $\beta := \frac{v}{c}$, rychlostí v na jedné straně a rapiditou u na straně druhé.

Řešení. Uvažujme, že transformace

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \frac{\beta}{c}x) \\ x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= \gamma(z - vt) \end{aligned} \quad (402)$$

¹¹⁵V češtině anglickému termínu boost odpovídá *posouvání*.

„odpovídá“ transformaci L_u^z . Napišme výše uvedenou Lorentzovu transformaci (402) pomocí matice a srovnáme její koeficienty s koeficienty matice L_u^z .

Od „pasivní“ transformace souřadnic dané rovnicemi (402) přejdeme k „aktivní“ transformaci vektorů A (tj. k matici přechodu), která je její inverzí. Zjistíme, že

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & v\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\beta}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (403)$$

Rychlost světla jsme považovali za jednotkovou, neboť jsme tento fakt již předpokládali, když jsme definovali Minkowskiho kvadratickou formu, která se od „fyzikální“ lišila právě faktorem c^2 u nulté (časové) souřadnice. Použijeme-li tuto konvenci, dostaneme, že platí: $v = \text{ath} u$. Pomocí součtových vzorců pro hyperbolický tangens lze snadno odvodit vzorec pro sčítání (bezrozměrných) rychlostí. Proved'te.

Pozn. V rámci elementární diferenciální topologie lze dokázat, že prvky Lorentzovy grupy, $O(1, 3)$, tvoří šestiřozměrnou plochu (hladkou diferencovatelnou varietu) vnořenou do šestnáctiřozměrného vektorového prostoru všech matic 4×4 . Tato plocha sestává ze čtyř komponent souvislosti.

Úkol. Dokažte, že obraz homomorfizmu J , zúženého na $SL(2, \mathbb{C})$ je roven té komponentě souvislosti grupy $O(1, 3)$, která obsahuje neutrální prvek. Tato souvislá komponenta se značí $SO(1, 3)_+$ a nazývá *vlastní Lorentzovou grupou*.

Řešení. Nejdříve dokážeme, že $\text{Im} J|_{SL(2, \mathbb{C})} \subseteq SO(1, 3)_+$, opačnou inkluzi později.

Fakt plyne z tvrzení, že obraz souvislé množiny spojitým zobrazením je souvislý. Nyní již stačí dokázat souvislost $SL(2, \mathbb{C})$. Každý element $SL(2, \mathbb{C})$ můžeme spojit hladkou křivkou s elementem $id \in SL(2, \mathbb{C})$. Tento fakt plyne z toho, že Jordanova matice J_A

k matici $A \in SL(2, \mathbb{C})$ (s jednotkovým determinanem) je tvaru

$$J_A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad J_A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}. \quad (404)$$

Tyto matice lze spojit s identitou pomocí křivek

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} (1-t) + ta & 0 \\ 0 & [(1-t) + ta]^{-1} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1] \quad (405)$$

resp.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} (1-t) + ta & t \\ 0 & [(1-t) + ta]^{-1} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]. \quad (406)$$

Obojí pokud je $a > 0$.

Pro případ $a < 0$ stačí provést drobnou modifikaci. K tomu, abychom dokázali i opačnou inkluzi, je potřeba si uvědomit, že každou vlastní Lorentzovu transformaci $B \in SO(1, 3)_+$ lze psát ve tvaru $B = R_1 L_u^z R_2$, kde R_i jsou (vlastní) rotace v třírozměrném podprostoru \mathbb{R}^3 v Minkowskioho časoprostoru \mathbb{R}^4 a L_u^z je boost ve směru z a rapiditou u .

Označme generátor časové souřadnice $e_0 := (1, 0, 0, 0)^t$. Definujme vztahem $Be_0 =: (x_0, \vec{x})^t$ reálné číslo x_0 a vektor \vec{x} , jehož složky označme $\vec{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, kde e_i jsou prvky kanonické báze $\mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$.

Jelikož B je Lorentzova transformace zachovává Minkowskioho pseudoskalární součin, platí, že $x_0^2 - (\vec{x}, \vec{x}) = 1^2 - (\vec{0}, \vec{0}) = 1$. Zřejmě existuje rotace R_1 , která zobrazí \vec{x} do osy z , tj. $R_1 B e_0 = (x_0, 0, 0, (\vec{x}, \vec{x})^{\frac{1}{2}})^t$.

Nyní použijeme boost, jehož tvar vypočteme v J -obrazech. Snažíme se vektor $R_1 B e_0$ převést opět do toho řezu časoprostorem, který je určen rovnicí $t = 1$, tj. do výchozího času. Chceme užít boost ve směru osy z , ansatz je

$$M = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}, \quad (407)$$

kde $rs = 1$. Požadujeme, aby

$$M j^{-1} (R_1 B e_0) M = \begin{pmatrix} 1+z & 0 \\ 0 & 1-z \end{pmatrix} = j^{-1} ((1, 0, 0, z)^t). \quad (408)$$

Tuto rovnici lze splnit pro $z = 0$, $r = [x_0 + (\vec{x}, \vec{x})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$, $s = [x_0 - (\vec{x}, \vec{x})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$. Díky tomu, že $(x, x)_M = 1$, je podmínka $rs = 1$ splněna.

Označme $L^z = J(M)$. Celkem dostáváme $L^z R_1 B e_0 = e_0$. Je-li $L^z R_1 B$ Lorentzova transformace, a díky předchozímu víme, že zachovává „časový“ podprostor $\mathbb{R}e_0$, musí být („pouhou“ vlastní prostorovou) rotací. Označme ji R_2 . Z rovnosti $L^z R_1 B = R_2$ plyne, že $B = R_2 (L^z)^{-1} R_1^{-1}$, což je požadovaný vztah, uvědomíme-li si, že inverze rotace je opět rotace, tentokrát s opačným úhlem, a inverze boostu je boost s opačnou rapiditou.

Tvrzení, které máme dokázat, plyne z Eulerovy věty která tvrdí, že každou rotaci lze napsat ve tvaru $R = R_\phi^z R_\theta^y R_\psi^z$, kde R_α^n je rotace kolem osy n o úhel α . Rotaci kolem osy y resp. z nagenerujem pomocí K_1 resp. K_2 – viz úloha výše. Boost kolem osy z jsme spočetli jako $L^z = J(M)$, viz tamtéž.

Celkem tedy

$$\begin{aligned} A &= J(K_2)J(K_1)J(K_2)J(M)J(K_2)J(K_1)J(K_2) = \\ &= J(K_2 K_1 K_2 M K_2 K_1 K_2), \end{aligned} \quad (409)$$

a proto J je surjekce obsahující $SO(1, 3)_+$, což spolu s výše dokázanou inkluzí implikuje $Im(J|_{SL(2, \mathbb{C})}) = SO(1, 3)_+$.

Úkol. Dokažte, že $J : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(1, 3)_+$ je zobrazení typu $2 : 1$, tj. že $\#J^{-1}(A) = 2$ pro každou $A \in SO(1, 3)_+$.

Řešení. Stačí zjistit, že $J^{-1}(id) = \{id, -id\}$, což lze ověřit přímým, byť pracným, výpočtem. *SK

Reference

- [PLA] L. Motl, M. Zahradník: Pěstujeme lineární algebru, Karolinum, Praha 1997
- [MatNeš] J. Matoušek, J. Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky, Skripta MFF UK, Praha 1995.
- [Či] P. Čihák a kol.: Matematická analýza pro fyziky V., Matfyzpress, Praha 2001
- [Prosk] I. V. Proskurjakov: Sběrka příkladů z lineární algebry (Sborník zadač po linejnoj algebre), Nauka, Moskva 1970
- [Tan] C. Cohen–Tannoudji: Quantum Mechanics, Willey, New York 1977
- [Fil] A. F. Filippov: Sběrka úloh z obyčejných diferenciálních rovnic, Moskva, Nauka 1973
- [Kop] J. Kopáček a kol.: Příklady z matematiky pro fyziky I,II, MFF UK, Praha 1996
- [Bic] L. Bican: Lineární algebra v úlohách, SPN, Praha 1979
- [Děm] B. P. Děmidovič: Sběrka úloh a cvičení z matematické analýzy, Moskva, Nauka 1977
- [Lja] I. I. Ljaško: Matematická analýza v příkladech 1: úvod do analýzy, derivace, integrál, Višča škola, Kijev 1974
- [Lang] S. Lang: Undergraduate algebra, 2. vydání, Springer, 1997;
S. Lang: Introduction to Linear Algebra, 3. vydání, Springer, 1987

Stručné popisy příkladů

- 1.1 Soustava 3×3 s komplexními koeficienty.
- 1.2 Soustava 4×4 s parametrem.
- 1.3 Soustava 5 lineárních rovnic s mnoha nulami řešená (nesystematicky) dosazováním rovnic do sebe.
- 1.4 Důkaz regularity diagonálně dominantní matice potažmo jednoznačnosti řešení soustavy rovnic; ukázka fyzikálně motivovaných úprav (zavedení potenciálu).
- 2.1 Příklad grupy symetrií, studium struktury nepřilíš velké grupy, přímé a polopřímé součiny.
- 2.2 Několik příkladů konečných grup.
- 2.3 Řád podgrupy dělí řád grupy, malá Fermatova věta, Eulerova funkce $\varphi(n)$ (počet přirozených čísel nesoudělných s n , menších než n).
- 2.4 Zkonstruování všech grup s nejvýše sedmi prvky.
- 2.5 Generátory grupy.
- 2.6 Konjugované prvky, (třídy) ekvivalence.
- 2.7 Přímé a polopřímé násobení grup a proces obrácený, tedy rozkládání grup.
- 2.8 Výpočet znaménka konkrétní permutace různými způsoby. Skládání permutací. Jednoduchý morfismus, reprezentace.
- 2.9 Permutace, inverze, transpozice, cyklus.
- 2.10 Aplikace pojmu permutace a znak permutace.
- 3.1 \mathbb{Z}_p — příklad jednoduchého komutativního tělesa.
- 3.2 Výpočet inverzní matice nad \mathbb{Z}_{11} .
- 3.3 Určování počtu vektorů v konečném prostoru a jeho podprostoru. Procvičování izomorfizmů mezi různými podprostory.
- 3.4 Příklad složitějšího konečného tělesa — polynomy s koeficienty ze \mathbb{Z}_p a násobením modulo polynom.
- 3.5 Nenápadné cvičení na násobení komplexních čísel.
- 3.6 $\dim \text{Ker} + \dim \text{Im}$ lineárního zobrazení je rovno dimenzi prostoru, na kterém působí.

- 3.7 Viz příklad 3.6.
- 3.8 Viz příklad 3.6.
- 3.9 Hodnost matice AB je menší nebo rovna než hodnost A i hodnost B .
- 4.1 Studium množiny $\sum_i x_i v_i$, $0 \leq x_i \leq 1$ a $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$, $d < n$.
Trénink na lineární kombinace, lineární závislost a nezávislost.
- 4.2 Ověření podmínek definice vektorového prostoru.
- 4.3 Ověření podmínek definice vektorového prostoru, izomorfismus vektorových prostorů.
- 4.4 Zjišťování, zda je podmnožina vektorového prostoru také jeho podprostorem.
- 4.5 Lineární závislost konkrétně zadaných vektorů z \mathbb{R}^4 , lineární kombinace
- 4.6 Dimenze prostoru na jednoduchém případě (s parametrem).
Prostory funkcí.
- 4.7 Dimenze lineárního obalu. Dimenze zobrazení. Lineární zobrazení. Restrikce zobrazení. Nekomutativita skládání zobrazení.
- 4.8 Výpočet složek vektoru v bázi soustavy bez a s pomocí skalárního součinu.
- 4.9 Ověřování lineární nezávislosti vektorů, matice přechodu mezi bázemi, transformace složek vektorů.
- 4.10 Vektorový prostor matic se stejnými řádkovými a sloupcovými součty. Dimenze vektorového prostoru. Afinní prostor.
- 4.11 Teoretická úloha na jádro zobrazení. Vše v prostoru \mathbb{Z}_2^n .
- 4.12 Lineární nezávislost polynomů. Aproximace funkce polynomy.
- 5.1 Určení ortogonálního doplňku ke konkrétnímu dvourozměrnému prostoru v \mathbb{R}^4 .
- 5.2 Popis Grammovy–Schmidtovy ortogonalizace.
- 5.3 Ukázka, jak lze v \mathbb{R}^n sestavit dva navzájem ortogonální prostory o dimenzích k a $n - k$.
- 5.4 Tři různé normy v \mathbb{R}^n ; odpověď na otázku, zda je jim možné přiřadit skalární součin.

- 5.5 Příklady norem na prostorech čtvercových matic.
- 5.6 Souvislost některých norem pro matice s normami pro vektory.
- 5.7 Aproximace metodou nejmenších čtverců: jednou pomocí ortogonální projekce prostor polynomů nejvýše prvního stupně a podruhé nalezením minima funkce dvou proměnných.
- 6.1 Základní vlastnosti matic (hermitičita, unitarita, komutativita, podobnost) předvedené na jednoduchém příkladě. Ukázka výpočtu komutátorů, antikomutátorů, vlastních čísel, exponenciál ve speciálním případě Pauliho matic.
- 6.2 Matice lineárního zobrazení vzhledem k různým bázím. Dimenze obrazu lineárního zobrazení. Invariantní podprostor.
- 6.4 Matice lineárního zobrazení vzhledem k různým bázím.
- 6.5 Výpočet inverzní matice 3×3 dvěma různými standardními způsoby.
- 6.6 Ověření, že je $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ grupa. Generátory grupy, (krystalové) mřížky v rovině a jejich reparametrizace.
- 6.7 Popis systému podmnožin pomocí matic, násobení obecných matic. Dvojitý počítání. Hodnost součinu matic.
- 6.8 Jak lze permutovat matice pod znakem stopy?
- 7.1 Manipulace s obdélníkovými maticemi (násobení). Popis orientovaného grafu pomocí matice.
- 7.2 Manipulace s obdélníkovými maticemi (násobení). Popis orientovaného grafu pomocí matice.
- 7.3 Determinant Laplaceovy matice grafu je roven počtu jeho podgrafů, které jsou stromy. Příklad úplného grafu.
- 7.4 Příklad vektorového podprostoru \mathbb{Z}_2^n a určení jeho dimenze pomocí konstrukce algebraického doplňku.
- 7.5 Určení vlastních čísel a vlastních vektorů u tří speciálních matic $n \times n$. Vlastní čísla a vlastní vektory matic A a A^n . Jak může vypadat například matice incidence?
- 7.6 Tvrzení o vlastních číslech a vlastních vektorech pro matici, která není zadána explicitně, známy jsou jen některé její vlastnosti.

- 7.7 Určení vlastních čísel speciální matice 10×10 , aniž by se počítaly elementy matice. Společné vlastní vektory různých matic.
- 7.8 Prostory vlastních vektorů různých matic.
- 7.9 Různé možnosti definice součinu grafů. Matice incidence těchto součinů, mírná podobnost s tenzorovým součinem.
- 7.10 Jak lze charakterizovat “míru souvislosti” grafu pomocí vlastních čísel jeho matice incidence. Odhady $\|Av\|$ pomocí vlastních čísel matice A .
- 7.11 Další charakteristika grafu pomocí vlastních čísel jeho matice incidence.
- 8.1 Výpočet číselného determinantu 4×4 různými metodami. Úpravy, při nichž se hodnota determinantu nezmění.
- 8.2 Tridiagonální (pásová) matice s obecnými elementy. Jednoduché cvičení na rekurentně zadané posloupnosti.
- 8.3 Výpočet známého determinantu standardní metodou (Gaussova eliminace).
- 8.4 Výpočet determinantu obecné matice $n \times n$ trikem s užitím cyklických vektorů. Jako vedlejší výsledek dostaneme vlastní vektory a vlastní čísla.
- 8.5 Výpočet obecného determinantu $n \times n$ pomocí minorů.
- 8.6 $\det AB = \det A \det B$ a další úpravy s velkou obecnou maticí. Jak rozpoznat vícenásobné kořeny polynomu na počítači.
- 8.7 Geometrický význam determinantu. Afirmní prostor.
- 8.8 Důkaz tvrzení o determinantech pomocí definice determinantu. Tvrzení ke geometrickému významu determinantů.
- 9.1 Nalezení vzorce pro n -tý člen v rekurentně zadané posloupnosti pomocí diagonalizace matice 2×2 .
- 9.2 Rychlý odhad pro hodnoty vlastních čísel zadané matice. Jednoduchý důkaz, proč je ostře diagonálně dominantní matice regulární. Rychlé kritérium pro pozitivní definitnost.
- 9.4 Vlastní čísla konkrétní matice $n \times n$. Determinant je součin vlastních čísel, stopa je součet vlastních čísel.

- 9.5 Determinant konkrétní matice 4×4 počítaný různými způsoby. Jak rozkládat polynomy (zvláště kubické a vyšší) s celočíselnými koeficienty.
- 9.6 Diagonalizace matice 2×2 , počítání funkce matice. Vlastnosti symetrických matic na jednoduchém příkladě.
- 9.7 Diagonalizace nesymetrické matice 2×2 . Výpočet a diskuze počtu řešení odmocniny z matice.
- 9.9 Jednoduchá soustava 4×4 s komplexními koeficienty. Matice lineárního zobrazení na prostoru funkcí. Vlastní čísla a vlastní funkce (vektory). Nediagonalizovatelnost, nilpotence zobrazení.
- 9.10 Charakteristický polynom matice 3×3 vyjádřený pomocí determinantu, stopy a stopy kvadrátu matice.
- 9.11 Konkrétní příklad soustavy n diferenciálních rovnic prvního řádu, která odpovídá jednorozměrné vlnové rovnici. Hledání vlastních čísel a vektorů matice $n \times n$ a jejich souvislost s vlastními kmity krystalové mřížky.
- 10.1 Matice lineárního zobrazení. Grupy $\mathbb{SO}(2)$ a $\mathbb{SO}(3)$. Ortogonální matice jsou matice rotací. Jak poznat pro zadanou ortogonální matici osu a úhel otočení. Vlastní čísla a vlastní vektory ortogonálních matic.
- 10.2 Odvození matice pro obecné otočení v \mathbb{R}^3 kolem zadané osy o daný úhel. Eulerovy úhly. Rozklad prostoru na podprostor a jeho ortogonální doplněk.
- 10.3 Obecný tvar matice Lorentzovy transformace a nesouvislá grupa takových matic. Vlastní Lorentzovy transformace.
- 10.4 Reprezentace konečné grupy. Ireducibilní reprezentace.
- 11.1 Diagonalizace (vlastní čísla a vektory) a exponenciála matice 2×2 . Souvislost s kvantovou mechanikou.
- 11.2 Soustava dvou diferenciálních rovnic prvního řádu, jejíž matice není diagonalizovatelná. Exponenciála takové matice a jak se obejít bez přímého výpočtu této exponenciály.
- 11.3 Soustava dvou diferenciálních rovnic prvního řádu s pravou stranou. Řešení pomocí variace konstant.

- 11.4 Řešení reálné soustavy dvou diferenciálních rovnic prvního řádu, jejíž matice má komplexní vlastní čísla. Jak odstranit komplexní čísla z výsledku.
- 11.5 Soustava tří diferenciálních rovnic prvního řádu, jejíž matici nelze diagonalizovat. Exponenciála této matice.
- 11.6 Wronskián. Derivace determinantu.
- 11.7 Úpravy řad pro exponenciálu a logaritmus. Žonglování s kombinačními čísly.
- 11.8 Výpočet exponenciály trikem pro speciální matici 2×2 . Generátory $SU(2)$, $U(2)$. Torus, rank.
- 11.9 Elegantní přeformulace vzorce pro determinant exponenciály matice. Dostaneme vyjádření logaritmu determinantu matice ve tvaru nekonečné řady, což umožňuje například výpočet volné energie translačně invariantní gaussovské míry (nejjednoduššího to objektu statistické fyziky a QFT).
- 12.1 Jednoduchý příklad vektorového prostoru. Algebra \mathfrak{so}_3 : její generátory, komutační relace mezi nimi. Souvislost s grupou $S\mathbb{O}_3$ pomocí exponenciály (infinitesimální generátory).
- 12.2 Izomorfismus Lieových algeber. Vlastní čísla a vlastní vektory operátoru bez počítání s maticemi. Jak ukázat, že jsou dva operátory totožné, aniž bychom je explicitně počítali.
- 12.3 Řešitelná algebra, komutátory, ideály. Operace s horními trojúhelníkovými maticemi.
- 12.4 Tvzení o ortogonálních doplňcích v jazyce duálních prostorů.
- 12.5 Cvičení na skalární součin. Dynkinovy diagramy a kompaktní Lieovy grupy.
- 13.1 Změna báze v duálním prostoru k \mathbb{R}^2 na jednoduchém početním příkladu. Matice přechodu.
- 13.2 Početní příklad na nalezení duální báze v \mathbb{R}^3 . Souřadnice vektorů a forem vůči různým bázím. Matice přechodu. Indexy dole a indexy nahoře. Ztotožnění prostoru a jeho duálu.
- 13.3 Konkrétní lineární forma na prostoru polynomů, počítání jejích složek. Dualita.
- 14.1 Spektrální rozklad. Chování A^n pro $n \rightarrow \infty$.

- 14.2 Stopa matice hustoty a jejího kvadrátu. Ortogonální projekce.
- 14.4 Důkaz, že polynom spektra matice je spektrum polynomu z matice. Souvislost s Hamilton–Cayleyovou větou.
- 14.5 Výpočet funkce matice 3×3 . Jordanův tvar.
- 14.6 Nerozložitelné matice a obecná věta o poloze vlastních čísel. Kriterium pro pozitivní definitnost u semidefinitních matic.
- 14.7 Konstrukce a studium matic speciálních vlastností (Hadamardových matic). Blokové násobení matic.
- 14.8 Odvození vektorových identit se skalárním a vektorovým součinem pomocí vlastností Levi–Civita symbolu ε_{ijk} .
- 14.10 Komutátory matic. Kdy lze použít binomickou formuli pro matice.
- 14.11 Výpočet Laplaceova operátoru v libovolných ortogonálních souřadnicích v \mathbb{R}^n : trochu vektorové analýzy (derivování maticových výrazů, Laméovy koeficienty).
- 15.1 Důkaz, že lze bistochastické matice zapsat jako konvexní kombinaci permutačních matic. Příklad bipartitního grafu, užití teorie grafů v lineární algebře.
- 15.2 Důkaz, že stochastická matice má jednonásobné vlastní číslo jedna.
- 15.3 Jordanovy řetězce. Převod nilpotentní matice 4×4 na Jordanův tvar.
- 15.4 Jordanův tvar matice 3×3 s jedním vlastním číslem a dvěma řetězci.
- 15.5 Jordanův tvar matice 3×3 s jedním vlastním číslem a jediným řetězcem.
- 15.6 Jordanův tvar matice 4×4 s jedním vlastním číslem a dvěma řetězci různých délek.
- 15.7 Jordanův tvar matice 4×4 s jedním vlastním číslem a dvěma řetězci délky dva.
- 15.8 Jordanův tvar matice 3×3 , která má dvě vlastní čísla a není diagonalizovatelná.
- 15.9 Nalezení matice C tak, aby platilo $CAC^{-1} = B$, kde A, B jsou dvě podobné (nediagonalizovatelné) matice. Jordanův tvar matice 3×3 .

- 16.1 Obecná tvrzení o posloupnostech ortogonálních polynomů. Momentový funkcionál.
- 16.2 Hledání vlastních čísel a vlastních vektorů diferenciálního operátoru na prostoru funkcí jedné proměnné pomocí triku. Fyzikálně: nalezení vlastních stavů a energií speciálního jednorozměrného hamiltoniánu pomocí kreačních a anihilačních operátorů. Diracova notace.
- 16.3 Nalezení spektra diferenciálního operátoru na prostoru funkcí na \mathbb{R}^3 pomocí symetrií. Lieovy algebry $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{su}(2)$; reprezentace $U(n)$, $SU(2)$. Symetrie hamiltoniánu atomu vodíku.
- 16.4 Spektrum diferenciálního operátoru na prostoru funkcí více proměnných pomocí rozkladu na operátory působící na prostorech jedné proměnné; kreační a anihilační operátory. Diagonalizace kvadratické formy. Tensorové součiny (na příkladu funkcí). Fyzikálně: nalezení spektra anizotropního harmonického oscilátoru ve více dimenzích.
- 16.5 Reprezentace algebry operátorů. Nalezení hodnot, jichž může nabývat operátor momentu hybnosti.
- 17.1 Typy kvadrik v \mathbb{R}^3 . Určení typu kvadriky pomocí jejich invariantů (tj. určitých výrazů s determinanty).
- 17.2 Převod kvadriky na kanonický tvar pomocí vlastních čísel: osy kvadriky jsou vlastní vektory a jejich délky vlastní čísla matice kvadratické formy. Ortogonální transformace.
- 17.3 Diagonalizace konkrétní kvadratické formy na \mathbb{R}^3 řádkovými a sloupcovými úpravami. Typ kvadratické plochy.
- 17.4 Diagonalizace konkrétní kvadratické formy na \mathbb{R}^3 pomocí vlastních čísel. Typ kvadratické plochy.
- 17.5 Diagonalizace konkrétní kvadratické formy na \mathbb{R}^3 řádkovými a sloupcovými úpravami. Sylvestrovo kritérium.
- 17.6 Dva rychlé příklady na signaturu a pozitivní definitnost. Spektrální rozklad operátoru. Sylvestrovo kritérium.
- 17.7 Analytická geometrie v \mathbb{R}^n , obecný příklad.
- 17.8 Jak poznat, zda zadaný bod leží uvnitř n -dimenzionální sféry definované $n + 1$ body.
- 17.9 Rovnice všech tečen k jednodílnému hyperboloidu v \mathbb{R}^3 .

- 17.10 Rovnice tečen jednodílného hyperboloidu v \mathbb{R}^n . Diagonalizace kvadratické formy v \mathbb{R}^{n-1} .
- 18.1 Polární rozklad konkrétní matice 3×3 dvěma metodami. Význam vlastního vektoru u matice deformace.
- 18.2 Rozšíření věty o polárním rozkladu i na singulární matice.
- 18.3 Nejlepší řešení soustavy s více rovnicemi než proměnnými, která přesné řešení nemá. Teorie. Ortogonální projekce.
- 18.4 Aproximace metodou nejmenších čtverců. Řešení soustavy s více rovnicemi než proměnnými. Konkrétní příklad na pseudoinverzi matice $n \times 2$.
- 19.1 Složky konkrétního tenzoru typu $(2, 1)$. Transformace souřadnic. Symetrie tenzoru.
- 19.2 Příklad tenzoru typu $(0, 2)$ na \mathbb{R}^3 . Symetrie, transformace při změně báze. Duální báze.
- 19.3 Lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ jako tenzor typu $(1, 1)$. Výpočet složek tenzoru setrvačnosti.
- 19.4 Fyzikální příklady tenzorů druhého řádu ze speciální relativity. Spouštění a zvedání indexů. Derivování.
- 19.5 Vzorečky pro Levi-Civitův tenzor ε_{ijk} (ověření transformačních vlastností). Tenzorový součin tenzorů, úžení tenzorů. Práce s determinanty.
- 19.6 Dimenze prostorů totálně symetrických a totálně antisymetrických tenzorů typu $(0, k)$. Symetrizovaný a antisymetrizovaný tenzorový součin.
- 19.7 Tenzorový součin operátorů. Stopa a částečná stopa (úžení tenzorů).
- 19.8 Antisymetrické tenzory, vnější algebra. Anulátor a rozložitelnost tenzorů.
- 20.1 Jak se chovají jednotlivé bloky blokových matic při násobení.
- 20.2 Odvození nejdůležitějších formulí týkajících se gaussovského integrování, nejjednodušší a nejzákladnější úlohy vícerozměrné integrace. Je to instruktivní použití kombinace lineárně algebraických, analytických i kombinatorických úvah, vedoucích m.j. k objasnění role inverzní (korelační) matice.

- 20.4 Jednoduché, (téměř) jen kombinatorické odvození tvaru mocninné řady pro logaritmus.
- 20.5 Upozornění na roli největšího vlastního čísla (a příslušného vlastního vektoru) při výpočtech velkých mocnin matic.
- 20.6 Algebra násobení matic se čtyřmi bloky.
- 20.7 Diskuse, jak souvisí existence tzv. cyklického vektoru s jednoznačností Jordanových buněk. Teorie Jordanova tvaru pro pokročilejší.
- 20.8 Pomocná úloha: Výpočet zobecněného Vandermondova determinantu, kde k původním řádkům přistupují i jejich derivace. Navazuje na úlohu o cyklických vektorech.
- 20.9 Výpočet odmocniny z velmi jednoduché matice.
- 20.10 Pfaffián: vyjádření determinantu antisymetrické matice čtvercem.
- 20.11 Populační dynamika společnosti mužů a žen trochu podrobněji.
- 20.12 Resolventa: vše, co se o tomto důležitém pojmu dá říci v konečné dimenzi.
- 20.14 Rozsazení u kulatého stolu: jak výpočet stopy mocniny matice pomocí spektra pomáhá vyřešit netriviální kombinatorické i fyzikální problémy.
- 20.15 Symetrický cirkulant, tentokrát v převlečení za kvadratickou formu. K tomu jedna zdánlivě podobná, ve skutečnosti mnohem elementárnější úloha.
- 20.16 Přibližný výpočet $A^n x$: opět o roli vlastního vektoru příslušného největšímu vlastnímu číslu.
- 20.17 Ortogonalizace posloupnosti, cvičení na aplikaci Grammovy–Schmidtovy postupné ortogonalizace.
- 20.19 Goniometrický Vandermondův determinat, spočteno převedením na obyčejný Vandermondův determinant.
- 20.21 Systémy oscilátorů s nárazy, procvičení práce s pojmem exponenciála matice a Diracovou delta funkcí.
- 20.22 Studium chování nejjednoduššího vícerozměrného systému poblíž jeho bodu resonance, výpočet amplitudy řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic se sinusovou vnější silou.

- 20.23 Několik vhodných příkladů matic typu 3×3 na procvičení Jordanova tvaru (převzato ze sbírky Filippova).
- 20.24 K čemu všemu mohou sloužit řádkové úpravy matice, pokus o shrnutí typických situací, kde se takovéto úpravy používají.
- 20.25 I zkoumání zdánlivě tak jednoduché funkce, jakou je $ax^2 + bx$, dává zajímavé interpretace ve vícerozměrném případě, pro systémy velmi mnoha spřažených oscilátorů. Kvadratická forma definovaná jako “suma čtverců rozdílů hodnot sousedů” vede ke zkoumání teorie potenciálu na mříži. To má zajímavé souvislosti s pravděpodobností, konkrétně s teorií náhodných procházek.
- 20.27 Jak vypadá adjunkce k nilpotentnímu operátoru v jednom charakteristickém speciálním případě.
- 20.28 Jak poznat, že šestiúhelník v rovině je ortogonální projekcí krychle. Teoretická úloha.
- 20.29 Translačně invariantní kvadratické formy na mříži a jejich podmíněná minima (Coulombovy potenciály). Aplikace na problém (ne)vratnosti náhodné procházky a na otázku existence fázového přechodu příslušné gaussovské míry.

Index

- δ_{ij} , 101
- ε_{ijk} , 101
- úžení tenzoru, 352
- úhly
 - Eulerovy, 187
- úpravy
 - řádkové a sloupcové: pomocí matice, 315
- čtverec
 - magický, 77
- řád grupy, 25
- řád prvku grupy, 32
- řešení
 - partikulární, 12, 15
- algebra
 - řešitelná, 225
 - Lieova, 213, 221, 223, 292, 353
 - vnější, 358
- anihilátor, 225
- anihilace, 288
- antikomutátor, 101
- antisymetrie, 101
- anulátor, 359
- aproximace
 - polynomem, 81
- aproximace (nejlepší), 96
- báze, 78, 79
 - duální, 233, 239
 - Jordanova, 246
- blok
 - Jordanův, 263
- bod
 - hromadný, 242
- boost, 425
- brakety, 226
- cirkulant, 150, 218
- cyklus, 35, 37
- definitnost
 - pozitivní, momentový funkcionál, 286
- determinant
 - multilinearita, 176
 - Vandermondův, 139
 - Vandermondův, zobecněný (s derivovanými sloupci), 377
 - Wronského, 208
- diagonalizace zobrazení, 161
- diagram
 - Dynkinův, 227
- Diracova notace, 226, 304
- direktní součet prostorů, 105
- doména
 - fundamentální, 118
- doplňek
 - algebraický, 45, 125, 144
 - algebraický (matice), 114
 - ortogonální, 83, 89, 186, 226
- dvojí počítání, 119
- Einsteinova sumační konvence, 101
- ekvivalence, 32

elementární cela mřížky, 117
 eliminace
 Gaussova, 67, 113, 146
 elipsoid, 308, 315
 rotační, 313
 Euklidův algoritmus, 116
 expandér, 135

 faktorprostor, 13
 forma
 kvadratická
 pozitivně definitní, 320
 formule
 binomická, 254
 Feynman–Kacova, 408
 funkce
 Eulerova, 28
 po částech konstantní, 63
 schodové, 63
 funkcionál
 momentový, 281

 generátor
 infinitesimální, 214, 221
 generátor grupy, 42
 generátory grupy, 31, 115
 gradient, 255, 323, 347
 graf, 122
 d -regulární, 128
 úplný, 124
 bipartitní, 122
 eulerovský, 124
 orientovaný, 122
 Petersenův, 130
 souvislý, 122
 Gramm–Schmidtova ortogo-
 nalizace, 88
 grupa, 115

 $SU(2)$, 212
 cyklická, 29
 diedrická, 24
 komutativní, 30
 modulární, 114, 118
 nekomutativní, 21
 symetrická, 21, 25, 36
 vlastní Lorentzova, 426

 hamiltonián, 287, 290
 harmonický oscilátor
 izotropní, 301
 hodnota
 zobrazení, 69
 hodnota matice, 50
 homomorfismus, 183
 hrana grafu, 122
 hyperboloid, 308

 ideál, 225
 identita
 bac minus cab, 252
 Jacobiho, 353
 indexy
 nahore a dole, 233
 integrál
 gaussovský, 362
 invarianty matice, 177
 inverze, 36
 v permutaci, 35
 izometrie, 27
 izomorfismus, 25, 45, 61, 65,
 105, 223, 246

 jádro, 173
 jádro zobrazení, 50, 69

 koeficienty
 Laméovy, 256, 258

kombinace
 afinní, 155
 konvexní, 259
 lineární, 17
 s opakováním, 355
 s opakováním, 294
 komponenta
 souvislosti, 122
 komutátor, 101, 220
 komutační relace
 kanonické, 299
 konformní ekvivalence mřížek,
 117
 konstanta
 Planckova, 194
 konvence
 sumační, Einsteinova,
 251, 350
 kostra, 124
 kovektor, 345
 kritérium
 Sylvestrovo, 320
 kvadratika
 středový tvar, 308, 311

 ladder-operátor, 302
 lineární nezávislost
 funkcí, 104
 lineární obal, 96
 lineární regrese, 338
 lineární závislost, 65
 linearita
 obecné příklady, 141
 obecně, 221

 mříž
 reciproká, 236
 mřížka v \mathbb{C} , 115

matice
 antihermitovská, 223
 antisymetrické, 220
 bistochastické, 78, 259
 blokově diagonální, 105,
 175, 184
 diagonálně dominantní,
 19, 128, 162, 214
 Grammova, 85, 158
 Hadamardova, 250
 hermitovská, 94, 100, 223
 Hilbertova, 152
 homomorfizmu, 75
 idempotentní, 101
 incidence, 125, 127
 inverzní, 113
 Jacobiho, 255
 Jordanův kanonický tvar,
 164
 korelační, 366
 Laplaceova, 123
 nerozložitelná, 248
 nilpotentní, 262, 268
 normální, 101, 170
 ortogonální, 168, 183, 331
 přechodu, 73, 75, 106,
 112, 237, 341
 Pauliho, 100, 212, 292,
 422
 permutační, 259
 pozitivně definitní, 94,
 162, 248, 320
 pozitivně semidefinitní,
 162
 regulární, 100
 stochastická, 260
 unitární, 100
 Vandermondova, 150, 153

zobrazení, 107
 minor, 45, 152
 hlavní, 166, 176
 minor matice, 114
 množina
 Gershgorinova, 162
 model
 populační, 383
 moment hybnosti, 290
 morfismus grup, 36, 191
 multilinearita determinantu,
 138

 násobnost vlastních čísel, 128
 nadrovina, 155
 největší společný dělitel
 Euklidův algoritmus, 116
 nerovnost
 Cauchy–Schwarzova, 190
 Fisherova, 119
 Hölderova, 99
 Schwarzova (Cauchyova),
 90
 trojúhelníková, 90
 norma, 89
 euklidovská (kulová), 90
 maximová (kubická), 89
 oktaedrická (man-
 hattanská), 89
 souvislost se skalárním
 součinem, 89
 notace
 Diracova, 241, 242

 okruh, 29, 43
 operátor
 anihilační, 287
 evoluční, 197

 hermitovsky sdružený,
 288
 kreační, 288
 kreační a anihilační, 298
 ladder, 302
 nilpotentní, 305
 ortogonalizace
 Gramm–Schmidtova, 83,
 108
 oscilátory
 harmonické, spřažené,
 404, 411
 otočení
 vlastní, 185

 párování, perfektní, 259
 přechod
 fázový (gaussovské míry),
 414
 paraboloid, 309
 partita, 122
 permutace, 36
 pfaffián, 382
 plocha
 ekviskalární, 323
 podgrupa
 invariantní, 23, 33
 normální, 23, 33
 podprostor
 invariantní, 105, 175, 184
 kořenový, 174
 pole
 vektorové, 323
 poloměr
 spektrální, iterační me-
 toda nalezení, 392
 polynom

charakteristický, 102,
 165, 169, 176
 minimální, 247, 265
 rozklad polynomu
 s celočíselnými
 koeficienty, 166
 polynomy
 Čebyševovy, 286
 Hermiteovy, 286
 Legendreovy, 286
 Legendrovy, 89
 posloupnost
 Fibonacciho, 160
 potenciál
 Coulombův, na mříži, 411
 pravidlo
 Čihákovo, 114
 Cramerovo, 72, 97
 Sarrusovo, 136, 166
 procházky
 náhodné, na mříži, 411
 projekce
 ortogonální, 59, 106, 337
 prostor
 vektorový
 afinní, 13
 afinní, 78, 156
 duální
 ztotožnění s přímým
 prostorem, 236
 Hilbertův, 197
 invariantní, 293
 kořenový, 269, 276
 projektivní, 306
 tečný, 325
 prvek
 pivovní, 69
 prvky grupy
 konjugované, 32
 pseudoinverze, 338
 pseudovektor, 361
 rank grupy, 214
 reflexivita, 32
 rekurentní vztah, 140
 reprezentace, 32, 191, 293, 302
 fundamentální, 293
 ireducibilní, 293, 303
 reducibilní, 192
 reprezentace grupy, 36
 resolventa (matice), 385
 resonance, 399
 restrikce, 276, 296
 zobrazení, 68
 rezultant, 153
 rotace
 vlastní, 332
 rovnice
 charakteristická, 141
 diferenciální, lineární,
 141
 Maxwellovy, 348
 Schrödingerova, 196
 rovnoběžnostěn, 56
 rovnost
 rovnoběžníková, 91
 rozklad
 Iwasawův (též KAN–
 rozklad), 424
 polární, 331
 spektrální, 161, 168, 175,
 241, 320
 vektorového prostoru,
 186
 rozklad identity, 243

schémata, Youngova, 357
 Schurovo lemma, 303
 signatura kvadriky, 327
 součet prostorů
 direktní, 184, 226
 součin
 skalární, 281
 smíšený, 235
 tenzorový, 132, 300, 352
 antisymetrizovaný,
 356, 358
 operátorů, 357
 symetrizovaný, 354
 součin grup, 21
 přímý, 33
 polopřímý, 33
 soustava rovnic
 nehomogenní, 201
 spektrum, 164, 165
 v kvantové mechanice,
 196
 spektrum matice, 164
 stav
 čistý, 243
 stopa, 120
 strom, 122
 stupeň vrcholu, 122
 symbol
 Kroneckerův, 101
 Levi–Civittův, 101
 symetrická část
 tenzoru, 294
 symetrická operace, 32
 symetrie, 21, 27
 soustavy rovnic, 15
 systém polynomů, orto-
 gonální, 281
 tělesa
 duální, 27
 těleso, 29
 konečné, 45, 48
 třída
 levá, 28
 tenzor
 antisymetrický, totálně,
 351
 deformačního gradientu,
 331
 elektromagnetického
 pole, 347
 kontragredientní trans-
 formace, 347
 Levi–Civittův, 350
 nerozložitelný, 359
 rozložitelný, 359
 setrvačnosti, 343
 složky, 341
 tenzory
 symetrické, 294
 torus, 214, 218
 transformace
 Lorentzova, 421
 podobnostní, 167
 transpozice, 26, 36
 v permutaci, 35
 tranzitivita, 32
 věta
 Birkhoffova, 259
 Cauchyova–Binetova, 124
 Gershgorinova, 162
 Hamilton–Cayleyova, 244
 Jacobiho–Sylvestrova,
 99, 333
 Lagrangeova, 28

- malá Fermatova, 28
- o derivování složené funkce na \mathbb{R}^n , 255
- Pythagorova, zobecněná, 159
- variací konstant, 202
- vektor
 - charakteristický, 134
 - cyklický, 375
 - Runge–Lenzův, 290
- vektory
 - lineárně nezávislé, 45
 - vlastní, 314
- vrchol
 - grafu, 122
- vzorci
 - Viètovy, 177
- vzorec
 - Čihákův, 116
 - Wickův, 371
- wronskián, 208
- zlatý řez, 161
- znak permutace, 40
- znaménko permutace, 139
- ztotožnění prostoru a jeho duálu, 236