Kapitola 4

Lineární transformace

A. Geometrické aplikace

Vyřešením problému diagonalizace symetrických matic, tj. problému nalezení diagonální reprezentace symetrických lineárních transformací v $\mathbb{E}_n$, získáváme velmi účinný aparát pro klasifikaci ploch 2. stupně v $\mathbb{R}^3$ (tzv. kvadrik) a křivek 2. stupně v $\mathbb{R}^2$ (kuželoseček). Pro typ těchto ploch a křivek je totiž rozhodující kvadratická část jejich kartézské rovnice, již lze v dané bázi jednoznačně reprezentovat symetrickou maticí. Nalezení odpovídající diagonální reprezentace je ekvivalentní určení takové ortonormální báze v $\mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^2$, v níž má kvadrika resp. kuželosečka zvláště jednoduchý (kanonický) tvar.

4.1 Kanonický tvar kvadratických forem na $\mathbb{U}_n$

Nechť $\mathbb{U}_n$ je unitární prostor, $\varphi \in (\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ samoadjungovaná transformace (vzhledem ke zvolenému skalárnímu součinu), tj. pro libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{U}_n$ platí $(\varphi(\mathbf{a}), \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \varphi(\mathbf{b}))$. V ortonormální bázi $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je tato rovnost vyjádřena ve tvaru $(\alpha)\mathbf{A}(\beta)^{\mathbf{T}*} = (\alpha)\mathbf{A}^{\mathbf{T}*}(\beta)^{\mathbf{T}*}$, kde (α), (β) jsou n-tice složek vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ v dané bázi, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}*}$ je matice samoadjungované transformace φ v téže bázi. *Kvadratickou formou na* $\mathbb{U}_n$*, příslušnou dané samoadjungované transformaci* φ rozumíme zobrazení

$$\kappa : \mathbb{U}_n \ni \mathbf{a} \to \kappa(\mathbf{a}) = (\varphi(\mathbf{a}), \mathbf{a}) \in \mathbb{C}$$

Kvadratickou formu lze chápat jako funkci n proměnných, jimiž jsou složky $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ vektoru $\mathbf{a} \in \mathbb{U}_n$ vzhledem k určité bázi $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v $\mathbb{U}_n$. Je-li $\mathbf{G}$ matice skalárního součinu v dané bázi, pak podle (4.3) platí

$$\kappa(\mathbf{a}) = (\alpha)\mathbf{AG}(\alpha)^{\mathbf{T}*} \tag{4.1}$$

a po rozepsání

$$\kappa(\mathbf{a}) = \sum_{i,k,j=1}^{n} \alpha_i^k g_{kj} \alpha^i \alpha^{j*} \tag{4.2}$$

s použitím obvyklého označení pro prvky matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{G}$ a složky vektoru $\mathbf{a}$. Matici $\mathbf{K} = \mathbf{AG}$ nazýváme *maticí kvadratické formy v dané bázi.* Zjednodušení zápisu dosáhneme volbou ortonormální báze, v níž $\mathbf{G} = \mathbf{E}$ a $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}*}$. Pak

$$\kappa(\mathbf{a}) = (\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^{\mathbf{T}*} = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i^j \alpha^i \alpha^{j*} \tag{4.3}$$

nebo

$$\kappa(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^i |\alpha^i|^2 + \sum_{i,j=1,i<j}^{n} 2\Re(\alpha_i^j \alpha^i \alpha^{j*}) \tag{4.4}$$

s využitím samoadjungovanosti matice $\mathbf{A}$. Z 4.4 vyplývá, že kvadratická forma jakožto funkce proměnných $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ nabývá výhradně reálných hodnot.

Nechť $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ jsou dvě různé báze, $\mathbf{T}$ nechť je matice přechodu od první z nich ke druhé. Podle vztahu 4.1 dostaneme:

$$\kappa(\mathbf{a}) = (\alpha)\mathbf{AG}(\alpha)^{\mathbf{T}*} = (\alpha')\mathbf{TAG}((\alpha')\mathbf{T})^{\mathbf{T}*} = (\alpha')\mathbf{TAGT}^{\mathbf{T}*}(\alpha')^{\mathbf{T}*}.$$

V bázi $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ má tedy kvadratická forma κ matici

$$\mathbf{K}' = \mathbf{TAGT}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{TKT}^{\mathbf{T}*}. \tag{4.5}$$

Ve speciálním případě, kdy obě báze jsou ortonormální, je matice přechodu unitární, tj. $\mathbf{T}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{T}^{-1}$ a vztah 4.5 lze psát ve tvaru

$$\mathbf{K}' = \mathbf{A}' = \mathbf{TAT}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{TAT}^{-1},$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{TAT}^{-1}. \tag{4.6}$$

Z důkazu věty (4.20) vyplývá, že pro každou samoadjungovanou matici $\mathbf{A}$ lze podobnostní transformaci s unitární maticí volit tak, aby $\mathbf{A}' = \mathbf{TAT}^{-1}$ byla maticí diagonální. Diagonální prvky matice $\mathbf{A}'$ jsou vlastními hodnotami transformace φ a báze $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ je tvořena vlastními vektory transformace φ (věty (4.13), (4.20)). Získaný závěr můžeme shrnout v následujícím teorému:

Věta 4.1 *Nechť κ je kvadratická forma na $\mathbb{U}_n$. Existuje ortonormální báze $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v $\mathbb{U}_n$ taková, že v ní má forma κ tvar*

$$\kappa(\mathbf{a}) = \lambda_1|\alpha^1|^2 + \lambda_n|\alpha^2|^2 + \ldots + \lambda_n|\alpha^n|^2. \tag{4.7}$$

Zápis 4.7 představuje tzv. *kanonický tvar kvadratické formy.*

Poznámka: Kvadratické formy se obvykle zadávají v ortonormální bázi buď zadáním příslušné samoadjungované matice $\mathbf{A}$, nebo (což je častější případ) přímo zápisem 4.3, z nehož lze matici **A** určit. Tuto úmluvu budeme v dalších kapitolách rovněž dodržovat.

V případě kvadratických forem na euklidovském prostoru $\mathbb{E}_n$ (resp. $\mathbb{R}_n$), který vede k významným geometrickým aplikacím v $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$, mívá zadání formy κ obvykle tvar

$$\kappa(\mathbf{a}) = \sum_{i,j=1,i<j}^{n} \gamma_{ij} x^i x^j. \tag{4.8}$$

Pak pro matici **A** (symetrickou) platí $\alpha_i^i = \gamma_{ii}$ pro $i \in \{1,\dots,n\}$, $\alpha_j^i = \alpha_i^j = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ pro $i,j \in \{1,\dots,n\}, i<j$. Namísto označení $\mathbf{a} = (\alpha^1,\dots,\alpha^n)$ zde figurují kartézské složky vektoru **a**, jež jsou obvykle označovány $(x^1,\dots,x^n)$, příp. $(y^1,\dots,y^n)$, v $\mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^2$ pak (x,y,x) resp. (x,y).

Příklad 1: Kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$ zadaná vztahem $\kappa(a) = \kappa(x,y,z) = x^2 - 5xy + 6xz - 7z^2 + 8yz$ (v ortonormální, tj. standardní bázi v $\mathbb{R}^3$) má matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & 3 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2: Kvadratická forma $\kappa(a) = \kappa(x^1,x^2,x^3,x^4)$ v $\mathbb{R}^4$ je zadána takto:

$$\kappa(x^1,x^2,x^3,x^4) = 2x^1x^2 + 2x^1x^3 - 2x^1x^4 - 2x^2x^3 + 2x^2x^4 + 2x^3x^4.$$

Její matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

reprezentuje v dané ortonormální bázi symetrickou lineární transformaci φ, jejíž vlastní hodnoty, určené rovnicí $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -3$. Ortonormální bází tvořenou vlastními vektory této transformace je například systém vektorů $\mathbf{e}'_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$, $\mathbf{e}'_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$, $\mathbf{e}'_3 = (-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\mathbf{e}'_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Složky vektorů $\mathbf{e}'_1,\dots,\mathbf{e}'_4$ jsou zadány v původní ortonormální bázi $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4)$. Kanonický tvar kvadratické formy je:

$$\kappa(a) = \kappa(y^1,y^2,y^3,y^4) = (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 - 3(y^4)^2,$$

kde

$$(y^1,y^2,y^3,y^4) = (x^1,x^2,x^3,x^4)\cdot\mathbf{T}^{-1} = (x^1,x^2,x^3,x^4)\cdot\mathbf{T}^{\mathbf{T}},$$

tj.

$$
\begin{aligned}
y^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}x^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \\
y^2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}x^1 - \frac{1}{\sqrt{6}}x^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}x^3, \\
y^3 &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}x^1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^4, \\
y^4 &= \frac{1}{2}x^1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4.
\end{aligned}
$$

Na základě hodnot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, určujících kanonický tvar 4.7 kvadratické formy, definujeme její další charakteristiky. Z věty (4.21) vyplývá, že hodnoty $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou reálné. *Hodností kvadratické formy* κ nazveme číslo $\mathrm{h} = \mathrm{h}(\mathbf{A})$, udávající hodnost její matice (v libovolné bázi). Označme k počet kladných a z počet záporných charakteristických kořenů z množiny $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ (včetně násobnosti). Rozdíl $s = k - z$ nazýváme *signaturou kvadratické formy* κ. Je-li $s = n = \dim \mathbb{U}_n$, nazýváme kvadratickou formu *pozitivně definitní*. (Platí pro ni zřejmě $k = h = n$, $z = 0$.) Forma se nazývá *negativně definitní* pro $s = -n$ ($k = 0$, $z = n = h$), *pozitivně semidefinitní* pro $s = h < n$ ($k = h < n$, $z = 0$), *negativně semidefinitní* pro $s - h > -n$ ($k = 0$, $z = h < n$) a *indefinitní* pro $|s| < h$. Klasifikace kvadratických forem podle předchozí definice souvisí bezprostředně s vlastnostmi množiny hodnot, jichž mohou kvadratické formy nabývat.

Věta 4.2 *Kvadratická forma κ na $\mathbb{U}_n$ je pozitivně resp. negativně definitní právě tehdy, když pro každý vektor $a = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \in \mathbb{U}_n$ je $\kappa(\mathbf{a}) \geq 0$ resp. $\kappa(\mathbf{a}) \leq 0$, přičemž rovnost $\kappa(\mathbf{a}) = 0$ nastává právě tehdy, je-li $\mathbf{a} = \mathbf{o}$. Forma κ je pozitivně resp. negativně semidefinitní právě tehdy, když pro libovoný vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{U}_n$ platí $\kappa(\mathbf{a}) \geq 0$ resp. $\kappa(\mathbf{a}) \leq 0$, přičemž rovnost $\kappa(\mathbf{a}) = 0$ nastane i v jiných případech než pro $\mathbf{a} = \mathbf{o}$. Forma κ je indefinitní právě tehdy, když nabývá hodnot kladných, záporných i nulových.*

Důkaz: Důkaz plyne bezprostředně z kanonického tvaru 4.7 kvadratické formy.

$\diamondsuit$

Cvičení 4.1

(1) Proveďte důkaz věty 4.2 zvlášť pro každý z pěti typů kvadratických forem. Prošetřete zvlášť případy, kdy $\kappa(\mathbf{a}) = 0$. Dokažte, že pro semidefinitní formu κ je $\kappa(\mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \in N(\varphi)$, kde φ je samoadjungovaná transformace příslušná formě κ.

Návod: Vyjděte z kanonického tvaru kvadratické formy 4.7: $\kappa(\mathbf{a}) = \lambda_1|\alpha^1|^2 + \ldots + \lambda_n|\alpha^n|^2$ a uvědomte si, že $|\alpha^i|^2 \geq 0$, přičemž rovnost nastane právě pro $\alpha^i = 0$. Pro semidefinitní formy o hodnosti $h < n$ určete tvar všech n-tic $(\alpha^1, \ldots \alpha^n)$, pro něž je $\kappa(\mathbf{a}) = 0$. Ukažte, že pro každou takovou n-tici je $(\alpha)\mathbf{D} = 0$, kde $\mathbf{D} = (\lambda_i \delta_i^j)$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ je matice kvadratické formy v diagonálním tvaru. Je tedy $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{o}$, tj. $\mathbf{a} \in N(\varphi)$. Za předpokladu $\mathbf{a} \in N(\varphi)$ vyplývá rovnost $\kappa(\mathbf{a}) = 0$ automaticky z definice kvadratické formy jakožto skalárního součinu $(\varphi(\mathbf{a}), \mathbf{a})$.

(2) Pro samoadjungované transformace zadané v úloze (10) cvičení (4.15) zapište odpovídající souřadnicové vyjádření kvadratických forem a určete kanonický tvar, hodnost a signaturu těchto forem. Proveďte jejich klasifikaci z hlediska vztahu signatury a hodnosti.

Výsledek:
a)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{1*} + \mathbf{i}\alpha^{1*}\alpha^2 - \mathbf{i}\alpha^1\alpha^{2*} - \alpha^2\alpha^{2*} \\ \mathrm{KT}: \kappa(\mathbf{a}) &= 2\alpha'^2\alpha'^{2*};\ n = 2, h = 1, s = 1 \end{aligned}$$

Forma je pozitivně semidefinitní.
b)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{1*} - \mathbf{i}\alpha^1\alpha^{3*} + \alpha^2\alpha^{2*} + \mathbf{i}\alpha^3\alpha^{1*} + \alpha^3\alpha^{3*} \\ \mathrm{KT}: \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha'^2\alpha'^{2*} + 2\alpha'^3\alpha'^{3*};\ n = 3, h = 2, s = 2 \end{aligned}$$

Forma je pozitivně semidefinitní.
c)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= 9\alpha^1\alpha^{1*} - 2\alpha^1\alpha^{2*} - 2\alpha^{1*}\alpha^2 + 6\alpha^2\alpha^{2*} \\ \mathrm{KT}: \kappa(\mathbf{a}) &= 5\alpha'^1\alpha'^{1*} + 10\alpha'^2\alpha'^{2*};\ n = 2, h = 2, s = 2 \end{aligned}$$

Forma je pozitivně definitní.
d)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{1*} + \alpha^1\alpha^{2*} + 3\alpha^1\alpha^{3*} + \alpha^{1*}\alpha^2 + 5\alpha^2\alpha^{2*} + \\ &\quad +\alpha^2\alpha^{3*} + 3\alpha^3\alpha^{1*} + \alpha^2\alpha^{3*} + \alpha^3\alpha^{3*} \\ \mathrm{KT}: \kappa(\mathbf{a}) &= -2\alpha'^1\alpha'^{1*} + 3\alpha'^2\alpha'^{2*} + 6\alpha'^3\alpha'^{3*};\ n = 3, h = 3, s = 1 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
e)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{2*} + \alpha^{1*}\alpha^2 + i\alpha^3\alpha^{4*} - i\alpha^{3*}\alpha^4 \\ \mathrm{KT}: \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha'^1\alpha'^{1*} + \alpha'^2\alpha'^{2*} + -\alpha'^3\alpha'^{3*} - \alpha'^4\alpha'^{4*};\ n = 4, h = 4, s = 0 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
f)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{2*} + \alpha^1\alpha^{3*} - \alpha^1\alpha^{4*} + \alpha^2\alpha^{1*} - \alpha^2\alpha^{3*} + \alpha^2\alpha^{4*} + \\ &\quad +\alpha^3\alpha^{1*} - \alpha^3\alpha^{2*} + \alpha^3\alpha^{4*} - \alpha^4\alpha^{1*} + \alpha^4\alpha^{2*} + \alpha^4\alpha^{3*} \\ \mathrm{KT}: \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha'^1\alpha'^{1*} + \alpha'^2\alpha'^{2*} + +\alpha'^3\alpha'^{3*} - 3\alpha'^4\alpha'^{4*};\ n = 4, h = 4, s = 2 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
g)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{1*} - \alpha^1\alpha^{2*} - \alpha^2\alpha^{1*} + \alpha^2\alpha^{2*} - \\ &\quad -\alpha^3\alpha^{3*} + \alpha^3\alpha^{4*} + \alpha^4\alpha^{3*} - \alpha^4\alpha^{4*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= -2\alpha'^3\alpha'^{3*} + 2\alpha'^4\alpha'^{4*};\ n=4, h=2, s=0 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
h)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= 4\alpha^1\alpha^{3*} + \alpha^1\alpha^{4*} + \alpha^2\alpha^{3*} + 4\alpha^2\alpha^{4*} + \\ &\quad +4\alpha^3\alpha^{1*} + \alpha^3\alpha^{2*} + 2\alpha^4\alpha^{1*} + 4\alpha^4\alpha^{2*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= 5\alpha'^1\alpha'^{1*} - 5\alpha'^2\alpha'^{2*} + 3\alpha'^3\alpha'^{3*} - 3\alpha'^4\alpha'^{4*};\ n=4, h=4, s=0 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
i)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{2*} + \alpha^2\alpha^{1*} + \alpha^3\alpha^{4*} + \alpha^4\alpha^{3*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha'^1\alpha'^{1*} + \alpha'^2\alpha'^{2*} - \alpha'^3\alpha'^{3*} - \alpha'^4\alpha'^{4*};\ n=4, h=4, s=0 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
j)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{1*} + \alpha^1\alpha^{2*} - \alpha^1\alpha^{4*} + \alpha^2\alpha^{1*} + \alpha^2\alpha^{2*} - \alpha^2\alpha^{3*} - \\ &\quad -\alpha^3\alpha^{2*} + \alpha^3\alpha^{3*} + \alpha^3\alpha^{4*} - \alpha^4\alpha^{1*} + \alpha^4\alpha^{3*} + \alpha^4\alpha^{4*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha'^1\alpha'^{1*} + \alpha'^2\alpha'^{2*} - \alpha'^3\alpha'^{3*} + 3\alpha'^4\alpha'^{4*};\ n=4, h=4, s=2 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
k)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= 2\alpha^1\alpha^{1*} - 2\alpha^1\alpha^{2*} - 2\alpha^2\alpha^{1*} + \alpha^2\alpha^{2*} - 2\alpha^2\alpha^{3*} - 2\alpha^3\alpha^{2*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha'^1\alpha'^{1*} - 2\alpha'^2\alpha'^{2*} + 4\alpha'^3\alpha'^{3*};\ n=3, h=3, s=1 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
l)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{1*} - 2\alpha^1\alpha^{2*} - 2\alpha^2\alpha^{1*} + 2\alpha^2\alpha^{2*} - \\ &\quad -2\alpha^2\alpha^{3*} - 2\alpha^3\alpha^{2*} + 3\alpha^3\alpha^{3*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= -\alpha'^1\alpha'^{1*} + 2\alpha'^2\alpha'^{2*} + 5\alpha'^3\alpha'^{3*};\ n=3, h=3, s=1 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
m)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= 2\alpha^1\alpha^{1*} - 2\alpha^1\alpha^{2*} + \alpha^1\alpha^{4*} - 2\alpha^2\alpha^{1*} + 2\alpha^2\alpha^{2*} + \alpha^2\alpha^{3*} + \\ &\quad +\alpha^3\alpha^{2*} + 2\alpha^3\alpha^{3*} - 2\alpha^3\alpha^{4*} + \alpha^4\alpha^{1*} - 2\alpha^4\alpha^{3*} + 2\alpha^4\alpha^{4*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha'^1\alpha'^{1*} - \alpha'^2\alpha'^{2*} + 5\alpha'^3\alpha'^{3*} + 3\alpha'^4\alpha'^{4*};\ n=4, h=4, s=2 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
n)

$$\begin{aligned}\kappa(\mathbf{a}) &= 3\alpha^1\alpha^{1*} + 2\alpha^1\alpha^{2*} + 2\alpha^2\alpha^{1*} + 4\alpha^2\alpha^{2*} - \\ &\quad -2\alpha^2\alpha^{3*} - 2\alpha^3\alpha^{2*} + 5\alpha^3\alpha^{3*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha'^1\alpha'^{1*} + 4\alpha'^2\alpha'^{2*} + 7\alpha'^3\alpha'^{3*};\ n=3, h=3, s=3\end{aligned}$$

Forma je pozitivně definitní.
o)

$$\begin{aligned}\kappa(\mathbf{a}) &= 5\alpha^1\alpha^{1*} - 2\alpha^1\alpha^{2*} - 2\alpha^1\alpha^{3*} - 2\alpha^2\alpha^{1*} + \\ &\quad +6\alpha^2\alpha^{2*} - 2\alpha^3\alpha^{1*} + 4\alpha^3\alpha^{3*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= 2\alpha'^1\alpha'^{1*} + 5\alpha'^2\alpha'^{2*} + 8\alpha'^3\alpha'^{3*};\ n=3, h=3, s=3\end{aligned}$$

Forma je pozitivně definitní.
p)

$$\begin{aligned}\kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{1*} - 2\alpha^1\alpha^{2*} + 2\alpha^1\alpha^{3*} - 2\alpha^2\alpha^{1*} - 2\alpha^2\alpha^{2*} + \\ &\quad +4\alpha^2\alpha^{3*} + 2\alpha^3\alpha^{1*} + 4\alpha^3\alpha^{2*} - 2\alpha^3\alpha^{3*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= 2\alpha'^1\alpha'^{1*} + 2\alpha'^2\alpha'^{2*} - 7\alpha'^3\alpha'^{3*};\ n=3, h=3, s=1\end{aligned}$$

Forma je indefinitní.

(3) Nechť κ, λ jsou kvadratické formy na $\mathbb{U}_n$ a nechť forma λ je pozitivně definitní. Ukažte, že existuje báze $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v $\mathbb{U}_n$ taková, že v ní obě zadané formy mají kanonický tvar. (Báze $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ nemusí být nutně ortonormální.)

Návod: Je-li λ pozitivně definitní kvadratická forma, pak existuje taková ortonormální báze $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, že v ní platí $\lambda(\mathbf{a}) = \lambda_1|\alpha_1|^2 + \ldots + \lambda_n|\alpha_n|^2$, kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$. V této bázi má kvadratická forma κ tvar $\kappa(\mathbf{a}) = (\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^{\mathbf{T}*}$, kde $\mathbf{A}$ je samoadjungovaná matice. Zvolte nyní bázi $(\mathbf{e}''_1, \ldots, \mathbf{e}''_n)$ tak, aby v ní forma λ byla dána zápisem $\lambda(\mathbf{a}) = |\alpha''_1|^2 + \ldots + |\alpha''_n|^2$. Jaká je odpovídající matice přechodu $\mathbf{T}$? Ukažte, že v bázi $(\mathbf{e}''_1, \ldots, \mathbf{e}''_n)$ je matice $\mathbf{A}'' = \mathbf{TAT}^{\mathbf{T}*}$ formy κ rovněž samoadjungovaná. Existuje tedy unitární matice $\mathbf{Q}$ taková, že $\mathbf{QA}''\mathbf{Q}^{\mathbf{T}*}$ je diagonální matice, takže v bázi $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$, pro niž $\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^n q_i^j \mathbf{e}''_j$ má forma κ kanonický tvar. Určete matici formy λ v bázi $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ a zjistíte, že λ je v uvedené bázi rovněž v kanonickém tvaru.

4.2 Klasifikace kvadrik a kuželoseček

Výsledky získané v odstavci 4.1 pro kvadratické formy na $\mathbb{U}_n$ nyní aplikujeme na případ euklidových prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ a využijeme jich při klasifikaci ploch a křivek druhého supně (tzv. kvadrik a kuželoseček). Budeme pracovat výhradně v ortonormálních bázích v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ (v tzv. kartézských soustavách souřadnic

$(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ zadaných počátkem P a ortonormální bází $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$). Skalární součin v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ je zaveden v souhlasu s euklidovskou geometrií, tj. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \prec (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ pro libovolné vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Množina $\mathcal{K}$ všech bodů X v $\mathbb{R}^3$ resp. ($\mathbb{R}^2$), jejichž kartézské (též standardní) souřadnice x, y, z resp. (x, y) vyhovují rovnici

$$k(X) = k(x,y,z) = \alpha_1^1 x^2 + 2\alpha_1^2 xy + 2\alpha_1^3 xz + \alpha_2^2 y^2 + 2\alpha_2^3 yz +$$

$$+\alpha_3^3 z^2 + \beta_2 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \gamma = 0 \qquad (4.9)$$

$$\text{resp.} \quad k(X) = k(x,y) = \alpha_1^1 x^2 + 2\alpha_1^2 xy \alpha_2^2 y^2 + \beta_1 x + \beta_2 y + \gamma = 0$$

V níž alespoň jedno z čísel $\alpha_i^j \neq 0$, se nazývá *kvadrika* resp. *kuželosečka.*

Poznámka: Rovnice 4.9 mohou zahrnovat i tzv. degenerované případy, například v $\mathbb{R}^2$: $x^2 = 0$ (rovnice osy y), $x^2 + y^2 = 0$ (této rovnici vyhovuje jen pořátek soustavy souřadnic, $x^2 + y^2 + 1 = 0$ (této rovnici nevyhovuje žádný bod v $\mathbb{R}^2$).

Chápejme nyní souřadnice $(\alpha) = (x, y, z)$ resp. (x, y) jako složky vektoru $\mathbf{a} = X - P$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^2$ (přičemž prostor $\mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^2$ je pevně umístěn v počátku soustavy souřadnic P). Další úvahy povedeme pro kvadriku. Rovnici kvadriky 4.9 přepíšeme takto:

$$k(x,y,z) = k(\mathbf{a}) = (\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^{\mathbf{T}} + (\alpha)\mathbf{B} + \gamma = \kappa(\mathbf{a}) + \eta(\mathbf{a}) + \gamma = 0 \qquad (4.10)$$

V tomto vztahu je κ kvadratická forma na $\mathbb{R}^3$, reprezentovaná v dané standardní bázi symetrickou maticí $\mathbf{A} = (\alpha_i^j)$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, η je lineární forma na $\mathbb{R}^3$, reprezentovaná maticí $\mathbf{B} = (\beta_j)$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Poznámka: Lineární formou na vektorovém prostoru V_n rozumíme zobrazení $\eta : \mathrm{V}_n \ni \mathbf{a} \to \eta(\mathbf{a}) \in \mathbb{C}$ resp. ($\mathbb{R}$) s vlastnostmi $\eta(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \eta(\mathbf{a}) + \eta(\mathbf{b})$, $\eta(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\eta(\mathbf{a})$ pro libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathrm{V}_n$ a libovolné číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ resp. $\mathbb{R}$. V našem případě je $\mathrm{V}_n = \mathbb{R}^3$. Ve zvolené bázi $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ ve V_n je $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \alpha^i \mathbf{e}_i$ a $\eta(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \eta(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \eta_i = (\alpha)(\eta)$, kde (η) je sloupcová matice reprezentující lineární formu v dané bázi. Podrobněji viz odstavec (5.1)

Abychom získali názornou geometrickou představu o tom, jak vypadá plocha v $\mathbb{R}^3$ (resp. křivka v $\mathbb{R}^2$) reprezentovaná rovnicí 4.10, potřebujeme najít takovou ortonormální bázi v $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$), v níž má levá strana rovnice 4.10 co nejjednodušší tvar. Výrazné zjednodušení nabízí věta 4.7, podle níž existuje v $\mathbb{R}^3$ taková ortonormální báze $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, že v ní má kvadratická forma κ kanonický tvar. V kartézské soustavě souřadnic $(P; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, spojené s bodem P, má tedy rovnice kvadriky tzv. *seminormální tvar*

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + \beta'_1 x' + \beta'_2 y' + \beta'_3 z' + \gamma = 0 \qquad (4.11)$$

Skutečně, je-li $\mathbf{T}$ matice přechodu od původní báze $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ k bázi $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, pak

$$k(\mathbf{a}) = (\alpha')\mathbf{TAT^T}(\alpha')^{\mathbf{T}} + (\alpha')\mathbf{TB} + \gamma,$$

$$\text{kde } \mathbf{TAT^T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{B}' = \mathbf{TB} = \begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \\ \beta_2' \end{pmatrix}.$$

Další zjednodušení rovnice 4.11 se může týkat již jen lineární formy s absolutním členem. Připadají tedy v úvahu pouze takové transformace soustavy souřadnic, které ponechávají kvadratickou formu κ v kanonické tvaru, tj. mění pouze počátek soustavy souřadnic při zachování vektorů báze. Těmito transformacemi jsou *translace (posunutí)*. Přechod od soustavy souřadnic $(P; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ k $(P'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ je algebraicky popsán rovnicemi

$$a = t + b,$$

kde $a = X - P = (\alpha') = (X', Y', Z')$, $b = X - P' = (\alpha'') = (X'', Y'', Z'')$, $t = P' - P = (x_0, y_0, z_0) = (\alpha_0)$.

Všimněme si nyní obecně transformačních vlastností kvadratické a lineární formy při translaci. Využijeme toho, že definice kvadratické formy svazuje tuto formu s určitou symetrickou lineární transformací v $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\kappa(a) &= (\varphi(a), a) = (\varphi(t+b), t+b) = (\varphi(b), b) + (\varphi(t), t) + 2(\varphi(b), t) \\
\eta(a) &= \eta(t+b) = \eta(t) + \eta(b) \\
\kappa(a) &= (\alpha')\mathbf{A}'(\alpha')^{\mathbf{T}} = (\alpha'')\mathbf{A}'(\alpha'')^{\mathbf{T}} + (\alpha_0)\mathbf{A}'(\alpha_0)^{\mathbf{T}} + 2(\alpha'')\mathbf{A}'(\alpha_0)^{\mathbf{T}} = \\
&= (\alpha'')\mathbf{A}'(\alpha'')^{\mathbf{T}} + (\alpha'')2\mathbf{A}'(\alpha_0)^{\mathbf{T}} + (\alpha_0)\mathbf{A}'(\alpha_0)^{\mathbf{T}} \\
\eta(a) &= (\alpha')\mathbf{B}' = (\alpha'')\mathbf{B}' + (\alpha_0)\mathbf{B}'
\end{aligned}$$

Jestliže je trojice souřadnic $(\alpha'') = (X'', Y'', Z'')$ považována za proměnné a trojice (α_0), zadávající translační vektor t, za konstanty, pak vidíme, že při translaci přejde kvadratická forma v součet kvadratické formy, lineární formy a čísla, zatímco lineární forma v součet lineární formy a čísla.

Levá strana rovnice kvadriky bude mít tedy v souřadnicové soustavě $(P'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ tvar

$$\begin{aligned}
k(X) &= (\alpha'')\mathbf{A}'(\alpha'')^{\mathbf{T}} + (\alpha'')[\mathbf{B}' + 2\mathbf{A}'(\alpha_0)^{\mathbf{T}}] + [4(\alpha_0)\mathbf{B}' + (\alpha_0)\mathbf{A}'(\alpha_0)^{\mathbf{T}}] = \\
&= \kappa(b) + \eta'(b) + \gamma' \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Tento vztah platí obecně. Je-li však výchozím tvarem tvar seminormální, pak kvadratická forma κ je reprezentována maticí

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}' = \mathbf{TAT^T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = (\lambda_i \delta_{ij}), \quad i, j = \{1, 2, 3\}.$$

Pro lineární formu η' je $\eta'(b) = \eta(b) + 2(\varphi(b), t)$ a forma η' je reprezentována maticí

$$\mathbf{B}'' = \mathbf{B}' + 2\mathbf{A}'(\alpha_0)^{\mathbf{T}} = \mathbf{TB} + 2\mathbf{TAT^T}(\alpha_0)^{\mathbf{T}} = \mathbf{TB} + 2\begin{pmatrix} \lambda_1 x_0 \\ \lambda_2 y_0 \\ \lambda_3 z_0 \end{pmatrix}.$$

Číslo $\gamma' = \sqrt{\gamma + (\alpha_0)\mathbf{B}' + (\alpha_0)\mathbf{A}'(\alpha_0)^{\mathbf{T}}} = \gamma + (\alpha_0)\mathbf{TB} + \lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 + \lambda_3 z_0^2$.
Podle 4.11 je $\gamma' = k(t)$. Rovnici kvadriky po translaci tedy zapíšeme jako

$$\begin{aligned} k(X) &= (\alpha'')\mathbf{D}(\alpha'')^{\mathbf{T}} + (\alpha'')[\mathbf{TB} + 2\mathbf{D}(\alpha_0)^{\mathbf{T}}] + \\ &\quad +[\gamma + (\alpha_0\mathbf{TB} + (\alpha_0)\mathbf{D}(\alpha_0)^{\mathbf{T}}] = 0 \\ k(X) &= \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + (\beta_1' + 2\lambda_1 x_0)x'' + \\ &\quad +(\beta_2' + 2\lambda_2 y_0)y'' + (\beta_3' + 2\lambda_3 z_0)z'' + k(P') = 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Rozborem tohoto vztahu nyní zjistíme, jak je nutno translaci $t = (x_0, y_0, z_0)$ volit, aby vedla k dalšímu zjednodušení rovnice kvadriky. Výsledky souvisí s hodností formy κ.

(i) Nechť $h = 3$, tj. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$. Pak matice $\mathbf{D}$ je regulární a v rovnici 4.13 lze volbou
$$(\alpha_0)^{\mathbf{T}} = -\frac{1}{2}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{TB} = -\frac{1}{2}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}' \tag{4.14}$$
dosáhnout anulování lineární formy ve vztahu 4.13 a rovnice kvadriky má pak v soustavě souřadnic $(P'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ tvar

$$\begin{aligned} k(X) &= (\alpha'')\mathbf{D}(\alpha'')^{\mathbf{T}} + k(P') = 0 \\ \text{tj. } k(X) &= \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + \mu = 0, \end{aligned} \tag{4.15}$$

kde $\mu = \gamma - \lambda_1 x_0{}^2 - \lambda_2 y_0{}^2 - \lambda_3 z_0{}^2$. Explicitní vyjádření souřadnic x_0, y_0, z_0 bodu P' v soustavě $(P; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$:

$$x_0 = -\frac{1}{2\lambda_1}\sum_{j=1}^{3}\tau_1^j\beta_j = -\frac{\beta_1}{2\lambda_1}, \quad y_0 = -\frac{1}{2\lambda_2}\sum_{j=1}^{3}\tau_2^j\beta_j = -\frac{\beta_2}{2\lambda_2},$$

$$z_0 = -\frac{1}{2\lambda_3}\sum_{j=1}^{3}\tau_3^j\beta_j = -\frac{\beta_3}{2\lambda_3}. \tag{4.16}$$

(ii) Nechť $h = 2$. Očíslujeme hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tak, aby $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Předpokládejme, že $\beta_3' = \sum_{j=1}^{3}\tau_3^j\beta_j \neq 0$. Volbou x_0, y_0 podle vztahu 4.16 dosáhneme vymizení lineárních členů obsahujících x-ovou a y-ovou souřadnici bodu kvadriky, volbou $z_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{3}\tau_3^j\beta_j}(\gamma + \lambda_1 x_0{}^2 + \lambda_2 z_0{}^2) = \frac{1}{\beta_3'}(\gamma + \lambda_1 x_0{}^2 + \lambda_2 y_0{}^2)$ dosáhneme vymizení absolutního člemu. pak v $(P'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ platí
$$k(X) = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \beta_3' z'' = 0. \tag{4.17}$$

(iii) Nechť $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, $\beta_3' = \sum_{j=1}^{3}\tau_3^j\beta_j = 0$. Položíme opět souřadnice x_0, y_0 rovny výrazům ve vztahu 4.16, z_0 je libovolné. Pak

$$k(X) = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \zeta = 0, \tag{4.18}$$

kde jsme označili $\zeta = \gamma - \lambda_1 x_0{}^2 - \lambda_2 y_0{}^2$.

(iv) Nechť $h = 1$, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\beta'_3 \sum_{j=1}^{3} \tau_3^j \beta_j \neq 0$ nebo $\beta'_2 = \sum_{j=1}^{3} \tau_2^j \beta_j \neq 0$. Volíme x_0 opět podle vztahu 4.16. Rovnice kvadriky přejde na tvar

$$k(X) = \lambda_1 x''^2 + \beta'_2 y'' + \beta'_3 z'' + (\gamma - \lambda_1 {x_0}^2 - \beta'_2 y_0 - \beta'_3 z_0) = 0.$$

Je-li alespoň jedno z čísel β'_2, β'_3 různé od nuly, lze volit y_0 nebo z_0 tak, aby absolutní člen v rovnici kvadriky byl nulový, tj. buď $y_0 = \frac{1}{\beta'_2}(\gamma - \lambda_1 {x_0}^2 - \beta'_3 z_0)$, z_0 libovolné, nebo $z_0 = \frac{1}{\beta'_3}(\gamma - \lambda_1 {x_0}^2 - \beta'_2 y_0)$, y_0 libovolné. Po této úpravě přejde rovnice kvadriky na tvar

$$k(X) = \lambda_1 x''^2 + \beta'_2 y'' + \beta'_3 z'' = 0.$$

Dále je možné najít kartézskou soustavu souřadnic $(P'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3)$ tak, aby z rovnice kvadriky vymizel buď člen s y-ovou nebo člen se z-ovou souřadnicí.

Matice $\mathbf{T}'$, která zajišťuje přechod $(P'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) \to (P'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3)$, má tvar

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a kvadrika má v soustavě souřadnic $(P'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3)$ rovnici

$$k(X) = \lambda_2 x'''^2 + y'''(\beta'_2 \cos\alpha + \beta'_3 \sin\alpha) + z'''(-\beta'_2 \sin\alpha + \beta'_3 \cos\alpha) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že alespoň jedno z čísel β'_2, β'_3 je nenulové, lze úhel α zvolit tak, aby jeden z koeficientů u y''', z''' byl roven nule. Je-li například $-\beta'_2 \sin\alpha + \beta'_3 \cos\alpha = 0$, pak

$$k(X) = \lambda_2 x'''^2 + \xi y''' = 0, \tag{4.19}$$

kde $\xi = \beta'_2 \cos\alpha + \beta'_3 \sin\alpha = \sqrt{{\beta'_2}^2 + {\beta'_3}^2}$.

(v) Nechť $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\beta'_2 = \beta'_3 = 0$. Při volbě x_0 podle vztahu 4.16 docílíme následujícího tvaru rovnice kvadriky

$$k(X) = \lambda_1 x''^2 + \nu = 0, \tag{4.20}$$

kde $\nu = \gamma - \lambda_1 {x_0}^2$.

Diskuse vztahu 4.13 pro případ kuželoseček je obdobná. Klasifikaci kvadrik a kuželoseček lze tedy v prvé fázi provádět na základě následujícího tvrzení, které bezprostředně vyplývá z výše uvedeného rozboru.

Věta 4.3 *Nechť $\mathcal{K}$ je kvadrika v $\mathbb{R}^3$. Existuje taková kartézská soustava souřadnic v $\mathbb{R}^3$, že v ní má rovnice kvadriky $\mathcal{K}$ právě jeden z následujících tvarů:*

(i) $k(X) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda^3 z^2 + \mu = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu \in \mathbb{R},$

(ii) $k(X) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \beta z = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \beta \neq 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \beta \in \mathbb{R},$

(iii) $k(X) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \zeta = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \zeta \in \mathbb{R},$

(iv) $k(X) = \lambda_1 x^2 + \xi y = 0, \quad \lambda_1, \xi \neq 0,\ \lambda_1, \xi \in \mathbb{R},$

(v) $k(X) = \lambda_1 x^2 + \nu = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_1, \nu \in \mathbb{R}.$

Nechť $\mathcal{K}$ je kuželosečka v $\mathbb{R}^2$. Existuje taková kartézská soustava souřadnic v $\mathbb{R}^2$, že v ní má rovnice kuželosečky $\mathcal{K}$ právě jeden z následujících tvarů:

(i) $k(X) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \mu = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \mu \in \mathbb{R},$

(ii) $k(X) = \lambda_1 x^2 + \beta y = 0 \quad \lambda_1, \beta \neq 0,\ \lambda_1, \beta \in \mathbb{R},$

(iii) $k(X) = \lambda_1 x^2 + \nu = 0 \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_1, \nu \in \mathbb{R}.$

Tvary kuželoseček resp. kvadrik uvedené ve větě 4.3 nazýváme *normálními tvary rovnic kuželoseček* resp. *kvadrik.*

Příklad 3: Pro kuželosečku $\mathcal{K}$ v $\mathbb{R}^2$, zadanou rovnicí $k(X) = 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$ v kartézské soustavě souřadnic $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, určíme soustavu souřadnic $(P'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$, v níž má rovnice kuželosečky normální tvar.

V souhlasu s označením v textu je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \gamma = 2.$$

Vlastní hodnoty symetrické transformace φ reprezentované v dané bázi maticí $\mathbf{A}$ jsou $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$, ortonormální báze tvořená vlastními vektory této transformace je $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$, kde $\mathbf{e}'_1 = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $\mathbf{e}'_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. Matice $\mathbf{T}$ přechodu od báze $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ k bázi $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ je

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Pak $\mathbf{B}' = \mathbf{TB} = \begin{pmatrix} -\frac{20}{\sqrt{5}} \\ -\frac{10}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \mathbf{TAT}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. V soustavě souřadnic $(P; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ má kuželosečka seminormální tvar

$$10x'^2 + 5y'^2 - \frac{20}{\sqrt{5}}x' - \frac{10}{\sqrt{5}}y' + 2 = 0.$$

Poněvadž je $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, lze volit translaci tak, aby nový počátek soustavy souřadni P' měl souřadnice $(\alpha_0) = (x_0, y_0)$ určené vztahem

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{TB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Pak $\mu = \gamma - \lambda_1 {x_0}^2 - \lambda_2 {y_0}^2 = -1$, takže normální tvar kuželosečky je typu (i):

$$10x''^2 + 5y''^2 - 1 = 0$$

v soustavě souřadnic $(P'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$, kde $P' = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}'_1 = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $\mathbf{e}'_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ (vše v bázi $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$).

DOPLNIT OBRAZEK SITUACE!

Konkrétní tvar kvadriky nebo kuželosečky se řídí hodnotami čísel $\mu, b, \zeta, \xi, \gamma$ vystupujících v normálním tvaru a znaménky čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Věta 4.4 *Normální tvary kvadrik zahrnují tyto možnosti:*

(i1)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	*imaginární elipsoid*
(i2)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	*reálný elipsoid*
(i3)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	*dvojdílný hyperboloid*
(i4)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	*jednodílný hyperboloid*
(i5)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	*imaginární kužel*
(i6)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	*reálný kužel*
(ii1)	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0, p, q > 0$	*eliptický paraboloid*
(ii2)	$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0, p, q > 0$	*hyperbolický paraboloid*
(iii1)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	*imaginární eliptický válec*
(iii2)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	*reálný eliptický válec*
(iii3)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	*hyperbolický válec*
(iii4)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	*imaginární dvojice různoběžných rovin*
(iii5)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	*reálná dvojice různoběžných rovin*
(iv1)	$x^2 - 2py = 0, p > 0$	*parabolický válec*
(v1)	$x^2 + a^2 = 0$	*imaginární dvojice rovnoběžných rovin*
(v2)	$x^2 - a^2 = 0$	*reálná dvojice rovnoběžných rovin*
(v3)	$x^2 = 0$	*dvojná rovina*

Normální tvary kuželosečky zahrnují tyto možnosti:

(i1)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	*imaginární elipsa*
(i2)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	*reálná elipsa*
(i3)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	*hyperbla*
(i4)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	*imaginární dvojice různoběžných přímek*
(i5)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	*reálná dvojice různoběžných přímek*
(ii1)	$\frac{x^2}{p} - 2y = 0, p > 0$	*parabola*
(iii1)	$x^2 + a^2 = 0$	*imaginární dvojice rovnoběžných přímek*
(iii2)	$x^2 - a^2 = 0$	*reálná dvojice rovnoběžných přímek*
(iii3)	$x^2 = 0$	*dvojná přímka*

Důkaz: Větu 4.4 snadno dokážeme rozborem všech možností znamének čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a hodnot čísel $\mu, \beta, \zeta, \xi, \nu$.

$\diamondsuit$

Poznámka: Všimněme si, že název „imaginární“ přísluší těm rovnicím kvadrik nebo kuželoseček, jimž nevyhovuje žádný bod v $\mathbb{R}^3$ nebo $\mathbb{R}^2$.

Poznámka: Snadno lze ukázat, že řezy kvadrik souřadnicovými rovinami nebo rovinami s nimi rovnoběžnými jsou kuželosečky. Z tvaru těchto řezů vyplývá názvosloví pro kvadriky.

Poznámka: Názvosloví pro kvadriky uvedené ve větě 4.4 je sice běžně zavedené, správně by se však mělo např. místo reálný elipsoid říkat reálná elipsoidální procha apod., vzhledem k tomu, že jde skutečně o plochy v $\mathbb{R}^3$, nikoli o tělesa.

DOPLNIT OBRÁZKY TĚLES

Cvičení 4.2

(1) Proveďte podrobný rozbor vztahu 4.13 pro případ kuželosečky v $\mathbb{R}^2$ a dokažte tak větu 4.3 pro kuželosečky.

Návod: Sledujte rozbor provedený v textu pro případ kvadriky a aplikujte jej na případ kuželosečky tak, že vypustíte členy obsahující z-ové souřadnice.

(2) Proveďte podrobně důkaz věty 4.4 nejprve pro kuželosečky, potom pro kvadriky. Zjistěte, jaké útvary jsou řezy kvadrik rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami.

Návod: U kuželoseček i kvadrik rozeberte všechny možnosti znamének čísel λ_1, λ_2 (λ_1, λ_2, λ_3) i všechny možnosti znamének μ, β, ν, (μ, β, ζ, ξ, ν) včetně možnosti nulových hodnot pro některé z nich. Za účelem klasifikace řezů kvadrik rovinami rovnoběžnými s rovinami soustavy souřadnic řešte rovnice kvadrik spolu s rovnicemi $x =$kons. resp. $y =$konst., resp $z =$konst.

(3) V následujících případech najděte kartézskou soustavu souřadnic, v níž má kvadrika nebo kuželosečka normální tvar. Určete, o jakou kvadriku nebo kuželosečku se jedná.

a) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$ v $\mathbb{R}^2$
b) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$ v $\mathbb{R}^2$
c) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$ v $\mathbb{R}^3$
d) $4x^2 + 2xy + 2xz - 2y^2 + 5yz - 2z^2 - 22x - 19y + 8z + 1 = 0$ v $\mathbb{R}^3$
e) $x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 1 = 0$ v $\mathbb{R}^2$

f) $2x^2 + 5xy - 3y^2 + x + 10y - 3 = 0$ v $\mathbb{R}^2$

g) $4x^2 + y^2 - 4z^2 - 8x + 4y + 24z - 32 = 0$ v $\mathbb{R}^3$

h) $6x^2 - 4xy - 4xz + 7y^2 + 5z^2 - 36 = 0$ v $\mathbb{R}^3$

i) $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 5z^2 - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$ v $\mathbb{R}^3$

j) $x^2 + 4xy - 10xz - 2y^2 + 4yz + z^2 + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$ v $\mathbb{R}^3$

k) $x^2 + 2xy + 6xz + 5y^2 + 2yz + z^2 - 2x + 6y + 2z = 0$ v $\mathbb{R}^3$

l) $x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0$ v $\mathbb{R}^2$

m) $2x^2 - 3xy - 2y^2 + x + 3y - 1 = 0$ v $\mathbb{R}^3$

n) $4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y - 2 = 0$ v $\mathbb{R}^2$

Výsledek:

a) $9x^2 - y^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{y^2}{3} - 1 = 0$, hyperbola
$\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$, $\mathbf{e}_2' = (-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$, $P' = (2, -1)$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

b) $x^2 + 2\sqrt{2}y = 0$, parabola
$\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_2' = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}})$, $P' = (1, 1)$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e_2})$

c) $3x^2 + 6y^2 - 2z^2 + 1 = 0$, jednodílný hyperboloid
$\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{e}_2' = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $\mathbf{e}_3' = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $P' = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

d) $x^2 - y^2 - 2 = 0$, hyperbolický válec
$\mathbf{e}_1' = (\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}})$ $\mathbf{e}_2' = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_3' = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $P' = (\frac{22}{9}, \frac{8}{9}, \frac{19}{9})$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

e) $9x^2 - 3y^2 + 4 = 0$, hyperbola
$\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_2' = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $P' = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

f) $(5\sqrt{2} - 1)x^2 - (5\sqrt{2} + 1)y^2 = 0$, reálná dvojice různoběžných přímek
$\mathbf{e}_1' = (\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}})$ $\mathbf{e}_2' = (\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}})$, $P' = (-\frac{8}{7}, \frac{5}{7})$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

g) $4x^2 + y^2 - 4z^2 - 4 = 0$, jednodílný hyperboloid
$P' = (1, -2, 3)$ v $(P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, $\mathbf{e}_i' = \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$

h) $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 12 = 0$, reálný elipsoid
$\mathbf{e}_1' = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $\mathbf{e}_2' = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, $\mathbf{e}_3' = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $P' = (0, 0, 0)$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

i) $15x^2 + 5y^2 - 25z^2 + 4 = 0$, dvojdílný hyperboloid
$\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\mathbf{e}_2' = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\mathbf{e}_3' = (0, 0, 1)$, $P' = (0, 1, \frac{2}{5})$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

j) $3x^2 - 3y^2 - 1 = 0$, hyperbolický válec
$\mathbf{e}_1' = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_2' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{e}_3' = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $P' = (-\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, 0)$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

k) $6x^3 + 3y^2 - 2z^2 - 1 = 0$, jednodílný hyperboloid
$\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $\mathbf{e}_2' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{e}_3' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $P' = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

l) $2x^2+2=0$, imaginární dvojice rovnoběžných přímek
$\mathbf{e}_1'=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_2'=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, $P'=(0,0)$ v $(P;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$

m) $x^2-y^2=0$, reálná dvojice různoběžných přímek
$\mathbf{e}_1'=(\frac{3}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}})$, $\mathbf{e}_2'=(\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{1}{\sqrt{10}})$, $P'=(\frac{1}{5},\frac{3}{5})$ v $(P;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$

n) $20x^2-9=0$, reálná dvojice rovnoběžných přímek
$\mathbf{e}_1'=(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$, $\mathbf{e}_2'=(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$, $P'=(-\frac{1}{5},-\frac{1}{10})$ v $(P;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$

4.3 Invarianty kvadrik a kuželoseček

Funkce koeficientů rovnice kvadriky resp. kuželosečky, které se nemění při přechodu od jedné kartézské soustavy souřadnic ke druhé, se nazývají *invarianty kvadriky* resp. *kuželosečky.* Funkce koeficientů rovnice kvadriky resp. kuželosečky, které se nemění při přechodu od jedné kartézské soustavy souřadnic ke druhé nezahrnujícím translaci, se nazývají *semiinvarianty kvadriky* resp. *kuželosečky.* Platí pro ně

$$F(\alpha_1^1,\alpha_1^2,\ldots,\alpha_3^3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\gamma)=F(\alpha_1^{1'},\alpha_1^{2'},\ldots,\alpha_3^{3'},\beta_1',\beta_2',\beta_3',\gamma').$$

Věta 4.5 *Funke*

$$I_1=\alpha_1^1+\alpha_2^2=\mathrm{tr}\mathbf{A},\qquad I_2=\det\mathbf{A},\qquad I_3=\det\begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \frac{1}{2}\beta_1\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \frac{1}{2}\beta_2\\ \frac{1}{2}\beta_1 & \frac{1}{2}\beta_2 & \gamma\end{pmatrix}$$

jsou invarianty kuželosečky, funkce

$$K_1=\det\begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \frac{1}{2}\beta_1\\ \frac{1}{2}\beta_1 & \gamma\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\alpha_2^2 & \frac{1}{2}\beta_2\\ \frac{1}{2}\beta_2 & \gamma\end{pmatrix}$$

je jejím semiinvariantem.

Pro kuželosečky typu (iii) je K_1 rovněž invariantem.

Důkaz: Nechť $k(a)=(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^{\mathbf{T}}+(\alpha)\mathbf{B}+\gamma$ je rovnice kuželosečky.

Při transformaci souřadnic $(P;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\to(P;\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2')$ popsané ortogonální maticí $\mathbf{T}$, platí $k(a)=(\alpha')\mathbf{TAT}^{-1}(\alpha')^{\mathbf{T}}+(\alpha')\mathbf{TB}+\gamma=(\alpha')\mathbf{A}'(\alpha')^{\mathbf{T}}+(\alpha')\mathbf{B}'+\gamma$. Označme $I_1=\sum_{i=1}^{1}\alpha_i^i=\mathrm{tr}\mathbf{A}$ (stopa matice $\mathbf{A}$). Pak $I_1'=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i^{i'}=\sum_{i,j,k=1}^{2}\tau_i^j\alpha_j^k\sigma_k^i=\sum_{j,k=1}^{2}\alpha_j^k\sum_{i=1}^{2}\tau_i^j\sigma_k^i=\sum_{j,k=1}^{2}\alpha_j^k\delta_k^j=\sum_{j=1}^{2}\alpha_j^j=I_1$. (Pozn.: invariantnost stopy matice při podobnostní transformaci je vlastností matic libovolného řádu n.) Funkce I_1 je tedy invariantem kvadriky vzhledem k transformaci souřadnic $(P;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)\to(P;\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2')$.

Dále platí: $I_2'=\det\mathbf{A}'=\det(\mathbf{TAT}^{-1})=\det\mathbf{A}=I_2$. Funkce I_2 je rovněž invariantem kuželosečky vzhledem k uvažované transformaci souřadnic.

Dokážeme nyní invariantnost funkce I_3. Zaveďme následující označení, pomocí něhož přejdeme k úvahám v $\mathbb{R}^3$: $(\chi)=(x,y,1)$ pro $(\alpha)=(x,y)$,

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \alpha_1^2 & 0\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \mathcal{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{1}{2}\beta_1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\beta_2\\ \frac{1}{2}\beta_1 & \frac{1}{2}\beta_2 & 0\end{pmatrix},\quad \mathcal{G}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\gamma\end{pmatrix}.$$

Přímým výpočtem snadno ověříme, že platí $(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^{\mathbf{T}} = (\chi)\mathcal{A}(\chi)^{\mathbf{T}}$, $(\alpha)\mathbf{B} = (\chi)\mathcal{B}(\chi)^{\mathbf{T}}$, $\gamma = (\chi)\mathcal{G}(\chi)^{\mathbf{T}}$. Proto lze psát

$$k(a) = (\chi)(\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{G})(\chi)^{\mathbf{T}} = 0, \qquad \mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \frac{1}{2}\beta_1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_1^2 & \frac{1}{2}\beta_2 \\ \frac{1}{2}\beta_1 & \frac{1}{2}\beta_2 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Definujme transformaci mezi kartézskými soustavami souřadnic $(P;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) \to (P;\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3)$ v $\mathbb{R}^3$ pomocí ortogonální matice

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \tau_1^1 & \tau_1^2 & 0 \\ \tau_2^1 & \tau_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opět přímým výpočtem zjistíme, že $\mathcal{A}' = \mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{T}\mathcal{B}\mathcal{T}^{-1}$, $\mathcal{G}' = \mathcal{T}\mathcal{G}\mathcal{T}^{-1}$. Pak $k(a) = (\chi')\mathcal{T}(\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{G})\mathcal{T}^{-1}(\chi')^{\mathbf{T}} = 0$. Z rovnosti $\det(\mathcal{T}(\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{G})\mathcal{T}^{-1}) = \det(\mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{G})$ vyplývá invariantnost funkce I_3 vzhledem k přechodu $(P;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) \to (P;\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2)$.

Zbývá dokázat invariantnost funkce K_1 vzhledem k uvažované transformaci soustavy souřadnic. Funkce K_1 je dána součtem algebraických doplňků prvků α_2^2 resp. α_1^1 v matici $\mathcal{M} = \mathcal{A}+\mathcal{B}+\mathcal{G}$. Algebraickým doplňkem prvku γ je invariant I_2. K důkazu invariantnosti funkce K_1 tedy postačí důkaz invariantnosti funkce $K_1 + I_2$, která je, jak vyplývá z výše uvedených úvah, stopou matice adjungované k matici $\mathcal{M}$. Vzhledem k podobnosti matic $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}'$ při transformaci $(P;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3) \to (P,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ jsou také matice $\mathrm{adj}\mathcal{M}$, $\mathrm{adj}\mathcal{M}'$ podobné (viz definice a vlastnosti adjungovaných matic v odstavci 1.3). Platí tedy $\mathrm{tr}\mathcal{M}' = \mathrm{tr}(\mathcal{T}\mathcal{M}\mathcal{T}^{-1}) = \mathrm{tr}\mathcal{M} \Rightarrow K'_1 + I'_2 = K_1 + I_2$ a vzhledem k $I'_2 = I_2$ je i $K'_1 = K_1$.

Uvažujme nyní translaci soustavy souřadnic $(P;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) \to (P';\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$, kde $\mathbf{t} = P' - P = (\alpha_0)$. Použitím vztahu 4.12 dostaneme při označení $(\alpha') = (\alpha) - (\alpha_0)$

$$k(X) = (\alpha')\mathbf{A}(\alpha')^{\mathbf{T}} + (\alpha')[\mathbf{B} + 2\mathbf{A}(\alpha_0)^{\mathbf{T}}] + k(P') = 0.$$

Invariantnost funkcí I_1 a I_2 je zřejmá okamžitě z invariantnosti matice kvadratické formy při translaci, invariantnost I_3 se prověří například přímým výpočtem determinantů matic $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$.

◇

Věta 4.6 *Kuželosečku $\mathcal{K}$ v $\mathbb{R}^2$ lze převést transformací $(P;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) \to (P';\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2)$ kartézských soustav souřadnic na normální tvar $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \mu = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ resp. $\lambda_1 x^2 + \beta y = 0$, $\lambda_1, \beta \neq 0$ resp. $\lambda_1 x^2 + \nu = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ právě tehdy, když $I_2 \neq 0$ resp. $I_2 = 0 \wedge I_3 \neq 0$ resp. $I_2 = I_3 = 0$.*

Důkaz: Vzhledem k invariantnosti funkcí I_1, I_2, I_3 stačí určit jejich hodnoty právě z normálních tvarů:

(i) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \mu = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$,

$$I_2 = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2, \quad I_3 = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \mu.$$

Odtud je zřejmé, že $I_2 \neq 0$, $\mu = I_3/I_2$. Je-li naopak $I_2 \neq 0$, musí být $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ a kuželosečka má tvar:

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 y^2 + (I_3/I_2) = 0. \tag{4.21}$$

(ii) $\lambda_1 x^2 + \beta y = 0$, $\lambda_1, \beta \neq 0$,

$$I_2 = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad I_3 = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\beta \\ 0 & \frac{1}{2}\beta & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\lambda_1 \beta^2 \neq 0$$

Přitom $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 = I_1$, takže $\beta^2 = -4I_3/I_1$ a kuželosečka má tvar:

$$\lambda_1 x^2 \pm 2\sqrt{|I_3/I_1|}y = 0. \tag{4.22}$$

(iii) $\lambda_1 x^2 + \nu = 0$, $\lambda_1 \neq 0$,

$$I_2 = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad I_3 = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} = 0,$$

$$K_1 = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} = \lambda_1 \nu,$$

tedy $\nu = K_1/I_1$ a kuželosečka má tvar:

$$\lambda_1 x^2 + K_1/I_1 = 0. \tag{4.23}$$

$\diamondsuit$

Jako důsledek věty 4.6 a jejího důkazu dostáváme následující tabulku klasifikace kuželoseček podle invariantů:

Rovnice	Kuželosečka	Invarianty	Normální tvar
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$	imaginární elipsa	$I_2>0,\ I_1\cdot I_3>0$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$	reálná elipsa	$I_2>0,\ I_1\cdot I_3<0$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	dvojice imag. různob.	$I_2>0,\ I_3=0$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$	hyperbola	$I_2<0,\ I_3\neq 0$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	dvojice reál. různob.	$I_2<0,\ I_3=0$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$
$x^2-2py=0$	parabola	$I_2=0,\ I_3\neq 0$	$\lambda_1x^2\pm 2\sqrt{\lvert\frac{I_3}{I_1}\rvert}y=0$
$x^2+a^2=0$	dvojice imag. rovnob.	$I_2=0,\ I_3=0,\ K_1>0$	$\lambda_1x^2+\frac{K_1}{I_1}=0$
$x^2-a^2=0$	dvojice reál. rovnob.	$I_2=0,\ I_3=0,\ K_1<0$	$\lambda_1x^2+\frac{K_1}{I_1}=0$
$x^2=0$	dvojná přímka	$I_2=0,\ I_3=0,\ K_1=0$	$\lambda_1x^2+\frac{K_1}{I_1}=0$

Příklad 4: Uvažujme kuželosečku z předchozího příkladu: $k(X)=9x^2-4xy+6y^2+6x-8y+2=0$, $\lambda_1=10$, $\lambda_2=5$.

$$I_2=\lambda_1+\lambda_2=15,\quad I_2=\det\begin{pmatrix}9&2\\-2&6\end{pmatrix}=50,\quad I_3=\det\begin{pmatrix}9&-2&3\\-2&6&-4\\3&-4&2\end{pmatrix}=-50.$$

Odtud $10x^2+5y^2-1=0$, což souhlasí s předchozím výsledkem. Podle klasifikační tabulky jde o reálnou elipsu, neboť $I_2>0$, $I_1\cdot I_3<0$.

Poznámka: Uvědomme si, že invarianty umožní určit typ kuželosečky i její normální rovnici, nikoliv však soustavu souřadnic, v níž je kuželosečka touto normální rovnicí zadána.

Analogická tvrzení nyní formulujeme pro kvadriky.

Věta 4.7 *Funkce*

$$I_1=\alpha_1^1+\alpha_2^2+\alpha_3^3=\mathrm{tr}\mathbf{A},\quad I_2=\det\begin{pmatrix}\alpha_1^1&\alpha_1^2\\\alpha_1^2&\alpha_2^2\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\alpha_2^2&\alpha_2^3\\\alpha_2^3&\alpha_3^3\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\alpha_1^1&\alpha_1^3\\\alpha_1^3&\alpha_3^3\end{pmatrix},$$

$$I_3=\det\mathbf{A},\quad I_4=\det\begin{pmatrix}&&&\frac{1}{2}\beta_1\\&\mathbf{A}&&\frac{1}{2}\beta_2\\&&&\frac{1}{2}\beta_3\\\frac{1}{2}\beta_1&\frac{1}{2}\beta_2&\frac{1}{2}\beta_3&\gamma\end{pmatrix}$$

jsou invarianty kvadriky, funkce

$$K_1=\det\begin{pmatrix}\alpha_1^1&\frac{1}{2}\beta_1\\\frac{1}{2}\beta_1&\gamma\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\alpha_2^2&\frac{1}{2}\beta_2\\\frac{1}{2}\beta_2&\gamma\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\alpha_3^3&\frac{1}{2}\beta_3\\\frac{1}{2}\beta_3&\gamma\end{pmatrix},$$

$$K_2 = \det\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \frac{1}{2}\beta_1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \frac{1}{2}\beta_2 \\ \frac{1}{2}\beta_1 & \frac{1}{2}\beta_2 & \gamma \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^3 & \frac{1}{2}\beta_1 \\ \alpha_1^3 & \alpha_3^3 & \frac{1}{2}\beta_3 \\ \frac{1}{2}\beta_1 & \frac{1}{2}\beta_3 & \gamma \end{pmatrix} + \\ + \det\begin{pmatrix} \alpha_2^2 & \alpha_2^3 & \frac{1}{2}\beta_2 \\ \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \frac{1}{2}\beta_3 \\ \frac{1}{2}\beta_2 & \frac{1}{2}\beta_3 & \gamma \end{pmatrix}$$

jsou jejími semiinvarinty, u kvadrik s normálními tvary (iii), (iv) se stává invariantem i funkce K_2, u kvadrik (v) jsou invarianty i funkce K_1, K_2.

Věta 4.8 *Kvadriku $\mathcal{K}$ v $\mathbb{R}^3$ lze převést transformací kartézských soustav souřadnic $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \to (P'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ na normální tvar*
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \mu = 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0 \Leftrightarrow I_3 \neq 0,$
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \beta z = 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \beta \neq 0 \Leftrightarrow I_2 \neq 0,\ I_4 \neq 0,\ I_3 = 0,$
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \zeta = 0,\ \lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \Leftrightarrow I_3 = 0,\ I_4 = 0,\ I_2 \neq 0,$
$\lambda_1 x^2 + \xi y = 0,\ \lambda_1, \xi \neq 0 \Leftrightarrow I_2 = I_3 = I_4 = 0,\ K_2 \neq 0,$
$\lambda_1 x^2 + \nu = 0,\ \lambda_1 \neq 0 \Leftrightarrow I_2 = I_3 = I_4 = K_2 = 0,\ I_1 \neq 0.$
Pro koeficienty v normálních tvarech platí:

$$\mu = I_4/I_3,\quad \beta = \pm 2\sqrt{|I_4/I_2|},\quad \zeta = K_2/I_2,\quad \xi = \pm 2\sqrt{|K_2/I_1|},\quad \nu = K_1/I_1 \tag{4.24}$$

Rovnice	Kvadrika	Invarianty
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	im. elipsoid	$I_4 > 0, I_3 \neq 0, I_2 > 0, I_1 \cdot I_3 > 0$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	1-dílný hyperboloid	$I_4 > 0, I_3 \neq 0,$buď $I_2 \leq 0,$ nebo $I_1 \cdot I_3 \leq 0$
$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0, p, q > 0$	hyp. paraboloid	$I_4 > 0, I_3 = 0$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	reál. elipsoid	$I_4 < 0, I_3 \neq 0, I_2 > 0, I_1 \cdot I_3 > 0$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	2-dílný hyperboloid	$I_4 < 0, I_3 \neq 0,$buď $I_2 \leq 0,$ nebo $I_1 \cdot I_3 \leq 0$
$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0, p, q > 0$	elip. paraboloid	$I_4 < 0, I_3 = 0$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	im. kužel	$I_4 = 0, I_3 \neq 0, I_2 > 0, I_1 \cdot I_3 > 0$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	reál. kužel	$I_4 = 0, I_3 \neq 0,$buď $I_2 \leq 0,$ nebo $I_1 \cdot I_3 \leq 0$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	im. válec	$I_4 = 0, I_3 = 0, K_2 \neq 0, I_2 > 0, I_1 \cdot K_2 > 0$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	elip. válec	$I_4 = 0, I_3 = 0, K_2 \neq 0, I_2 > 0, I_1 \cdot K_2 < 0$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	hyp. válec	$I_4 = 0, I_3 = 0, K_2 \neq 0, I_2 < 0$
$x^2 - 2py = 0$	parab. válec	$I_4 = 0, I_3 = 0, K_2 \neq 0, I_2 = 0$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	im. dvoj. růz. rovin	$I_4 = 0, I_3 = 0, K_2 = 0, I_2 > 0$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	reál. dvoj. růz. rovin	$I_4 = 0, I_3 = 0, K_2 = 0, I_2 < 0$
$x^2 + a^2 = 0$	im. dvojice rov. rovin	$I_4 = 0, I_3 = 0, K_2 = 0, I_2 = 0, K_1 > 0$
$x^2 - a^2 = 0$	reál. dvoj. rov. rovin	$I_4 = 0, I_3 = 0, K_2 = 0, I_2 = 0, K_1 < 0$
$x^2 = 0$	dvojná rovina	$I_4 = 0, I_3 = 0, K_2 = 0, I_2 = 0, K_1 = 0$

Příklad 5: Uvažujme kvadriku $\mathcal{K}$ zadanou rovnicí

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = -2,$$

$$I_1 = 7, \quad I_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$I_3 = \det \mathbf{A} = -36, \quad I_4 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 36,$$

tj. $I_4 > 0$, $I_3 \neq 0$, $I_2 = 0$, $I_1 \cdot I_3 < 0$ a jedná se o jednodílný hyperboloid o rovnici $3x^2 + 6y^2 - 2z^2 - 1 = 0$, neboť $\mu = I_4/I_3 = -1$.

Cvičení 4.3

(1) Dokažte, že stopa libovolné čtvercové matice řádu n se podobnostní transformací nemění.

Návod: Důkaz proveďte přímým výpočtem stopy matice $\mathbf{TAT}^{-1}$ s využitím vztahů $\mathbf{TT}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{E}$.

(2) Proveďte důkaz invariantnosti funkcí I_1, I_2, I_3 u kuželoseček vzhledem k translaci kartézské soustavy souřadnic.

Návod: Využijte postupu naznačeného v důkazu věty 4.5.

(3) Dokažte invariantnost funkce K_1 pro kuželosečky s normálním tvarem (iii) vzhledem k translaci kartézské soustavy souřadnic.

Návod: Využijte skutečnosti, že K_1 je semiinvariantem kuželoseček a při důkazu tvrzení formulovaného v zadání úlohy vyjděte přímo z normálního tvaru $\lambda_1 x^2 + \nu = 0$. Zjistěte, jak se změní tvar této rovnice po translaci a rovnost $K_1' = K_1$ dokažte přímým výpočtem.

(4) Dokažte větu 4.7 a větu 4.8.

Návod: Postupujte v analogii s důkazem věty 4.5 a 4.6.

Literatura

[1] Kuroš A. G.: Kurs vyššej algebry. Nauka, Moskva 1971.

[2] Gelfand I. M.: Lekciji po linejnoj algebre. vyd. 4., Nauka, Moskva 1971.

[3] Van der Varden B. L.: Algebra

[4] Spivak M.: Matematičeskij analiz na mnogoobazijach. překlad z angl., Mir Moskva 1968.