Lineární a multilineární algebra

Jana Musilová
Demeter Krupka

30. prosince 2003

Předmluva

Poznámky k symbolice a terminologii

Obsah

Literatura

[1] Kuroš A. G.: Kurs vyššej algebry. Nauka, Moskva 1971.

[2] Gelfand I. M.: Lekciji po linejnoj algebre. vyd. 4., Nauka, Moskva 1971.

[3] Van der Varden B. L.: Algebra

[4] Spivak M.: Matematičeskij analiz na mnogoobazijach. překlad z angl., Mir Moskva 1968.

Část I
Teorie matic

Pro řadu matematicko-fyzikálních disciplin i technických oborů představují matice velmi účinný matematický aparát, který v mnoha případech umožňuje vyjádřit velice průhledným způsobem jinak formálně komplikované výpočty. Ve většině fyzikálních disciplín je použití maticového počtu naprosto přirozené, neboť vyplývá z vektorové a tenzorové povahy fyzikálních veličin.

Teorie matic je součástí prakticky každé základní učebnice algebry. V našem textu bude sloužit sice jako nezastupitelný, přece jen však pouze výkonný aparát. Proto uvedeme jen ty nejdůležitější poznatky z teorie matic, které budeme v dalším potřebovat. Důkazy provedeme ve zkrácené verzi u závažných tvrzení, v jednodušších případech budou přenechány čtenáři jako cvičení. Také značení bude přizpůsobeno aplikacím teorie matic ve fyzikálních disciplínách.

Budeme uvažovat o maticích, jejichž prvky jsou reálná nebo komplexní čísla. množinu všech reálných resp. komplexních čísel opatřenou všemi známými algebraickými operacemi označíme $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$. Obecně mohou mohou být matice tvořeny i prvky jiných množin s patřičnou algebraickou strukturou. Jedná se například o matice polynomické, jimiž se budeme zabývat v druhé části této kapitoly.

Kapitola 1

Číselné matice

1.1 Operace s maticemi

Maticí $\mathbf{A}$ *typu* m/n nad reálnými resp. komplexními čísly nazýváme soubor $m.n$ reálných resp. komplexních čísel α_i^j, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, uspořádaných do řádků a sloupců takto:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m^1 & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^n \end{pmatrix} \qquad \alpha_i^j \in \mathbb{R} \text{ resp. } \mathbb{C}$$

Značíme $\mathbf{A} = (\alpha_i^j)$. Index i resp. j se nazývá řádkovým resp. sloupcovým indexem. Pro matice lze užít i značení $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$ resp. $\mathbf{A} = (\alpha^{ij})$, kde prvý index je řádkový, druhý sloupcový. Počítá se s nimi stejně jako při označení (α_i^j). Je-li $m \neq n$, hovoříme o matici obdélníkové, pro $m = n$ jde o matici čtvercovou řádu n. (Teorie matic se zabývá i tzv. nekonečnými maticemi, v nichž jsou řádky a sloupce tvořeny posloupnostmi, tj. $i, j \in \{1, 2, \dots\}$ ev. $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$. Problematikou takových matic se podrobněji zabývat nebudeme.) Prvky α_j^j, $j \in \{1, 2, \dots, \min(m, n)\}$ jsou diagonální prvky matice $\mathbf{A}$, uspořádaný soubor $[\alpha_1^1, \alpha_2^2, \dots, \alpha_k^k]$, $k = \min(m, n)$, je hlavní diagonála matice. Matici $\mathbf{0}$ nazýváme nulovou $\alpha_i^j = 0$ pro všechna i, j, čtvercová matice $\mathbf{E}$ řádu n se nazývá jednotková, je-li $\alpha_i^j = \delta_i^j$ (Kroneckerovo delta) pro všechna $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Matice $\mathbf{a} = (\alpha_i^j)$ a $\mathbf{B} = (\beta_i^j)$ jsou si rovny právě tehdy, když jsou stejného typu a platí $\alpha_i^j = \beta_i^j$ pro všechna i, j. Píšeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. O diagonální matici hovoříme, je-li $\alpha_i^j = 0$ pro všechna $i \neq j$.

Matice typu m/n má tzv. schodovitý tvar, je-li

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1^{j_1} & \dots & & \dots & \alpha_1^n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha_2^{j_2} & \dots & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & \alpha_2^{j_2} & \dots & \alpha_2^n \\ 0 & \dots & & & & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & & & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

kde $1 \leq k \leq n$, $1 < j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$, $\alpha_i^{j_i} \neq 0$ pro $i \in \{1, \ldots, k\}$. Nulovou matici považujeme rovněž za schodovitou.

Příklad 1: Z následujících matic mají schodovitý tvar matice **A**, **B**, matice **C**, **D** schodovitý tvar nemají:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Příkladem schodovité matice je také matice diagonální.

Poměrně důležitým speciálním případem schodovité matice je také tzv. matice trojúhelníková, definovaná vztahy $\alpha_i^j = 0$ pro všechna $i < j$ (tzv. dolní trojúhelníková matice) resp. $i > j$ (horní trojúhelníková matice). Taková matice má nad resp. pod hlavní diagonálou pouze nulové prvky.

Maticí opačnou k matici **A** nazýváme matici s prvky $-\alpha_i^j$ a značíme ji $-\mathbf{A}$. Nechť $\mathbf{A} = (\alpha_i^j)$ je matice typu m/n. Matici $\mathbf{A}^\mathbf{T} = (\alpha_j^i)$, typu n/m, nazýváme maticí transponovanou k **A**. Zřejmě je $(\mathbf{A}^\mathbf{T})^\mathbf{T} = \mathbf{A}$. Matici nazýváme symetrickou resp antisymetrickou, resp. samoadjungovanou, je=li $\mathbf{A}^\mathbf{T} = \mathbf{A}$, resp. $\mathbf{A}^\mathbf{T} = -\mathbf{A}$, resp. $\mathbf{A}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{A}$. Hvězdička značí operaci komplexní sdruženosti, konkrétně $\mathbf{A}^{\mathbf{T}*} = (\alpha_i^{j*})$, je-li $\mathbf{A} = (\alpha_i^j)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Je-li matice **A** tvořena reálnými čísly, pojmy symetrická a samoadjungovaná matice splývají. Z definic dále plyne, že diagonální prvky samoadjungované matice jsou reálné, diagonální prvky antisymetrické matice jsou nulové. Nutnou podmínkou pro to, aby matice mohla být symetrická, antisymetrická nebo samoadjugovaná je rovnost $m = n$.

Důležitými operacemi s maticemi je součet matic, násobení matice číslem a součin matic: Součtem matic $\mathbf{A} = (\alpha_i^j)$, $\mathbf{B} = (\beta_i^j)$ typu m/n rozumíme matici $\mathbf{C} = (\gamma_i^j)$ opět typu m/n, pro niž je $\gamma_i^j = \alpha_i^j + \beta_i^j$ pro všechny indexy i, j.

Z definic a pravidel pro počítání s reálnými a komplexními čísly vyplývají pravidla pro počítání s maticemi:

Věta 1.1. *Pravidla pro součet a κ-násobek matic. Pro libovolné matice* **A**, **B**, **C** *typu m/n a čísla κ, ν platí:*

$$\begin{array}{rll} (i) & \mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} & \textit{komutativita} \\ (ii) & \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} & \textit{asociativita} \\ (iii) & \mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A} & \\ (iv) & \mathbf{A}+(-\mathbf{A})=(-\mathbf{A})+\mathbf{A}=0 & \\ (v) & \kappa(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\kappa\mathbf{A}+\kappa\mathbf{B} & \textit{distributivita} \\ (vi) & (\kappa+\nu)\mathbf{A}=\kappa\mathbf{A}+\nu\mathbf{A} & \textit{distributivita} \\ (vii) & \kappa(\nu\mathbf{A})=(\kappa\nu)\mathbf{A} & \textit{asociativita} \\ (viii) & 1\mathbf{A}=\mathbf{A} & \textit{násobení jedničkou} \\ (ix) & 0\mathbf{A}=\mathbf{0} & \\ (x) & -1\mathbf{A}=-\mathbf{A} & \\ (xi) & (\mathbf{A}+\mathbf{B})^\mathbf{T}=\mathbf{A}^\mathbf{T}+\mathbf{B}^\mathbf{T} & \\ (xii) & (\kappa\mathbf{A})^\mathbf{T}=\kappa\mathbf{A}^\mathbf{T} & \end{array} \tag{1.1}$$

Poznámka: Množina matic opatřená operací sčítání s vlastnostmi (i) až (iv) má strukturu tzv. komutativní grupy, množina matic se sčítáním a násobením číslem s vlastnostmi (i) až (viii) má strukturu tzv. vektorového prostoru. O těchto strukturách budeme podrobně hovořit v kapitole 2.

Nechť $\mathbf{A} = (\alpha_i^j)$ je matice typu m/n a $\mathbf{B} = (\beta_i^j)$ matice typu n/r. Součinem matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ nazýváme matici $\mathbf{C} = (\gamma_i^j)$ typu m/r, pro kterou je $\gamma_i^k = \alpha_i^j \beta_j^k$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, $1 \le k \le r$. Píšeme $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. Součin matic není obecně komutativní. Při obecném zadání čísel m, n, r nemusí být součin $\mathbf{BA}$ ani definován.

Z definice součinu matic plynou opět pravidla pro násobení matic a kombinování součinu se součtem a κ-násobkem.

Věta 1.2. *Pravidla pro součin matic. Pro libovolné matice* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ *vhodných typů a libovolné číslo* κ *platí:*

$$\begin{array}{rl} (i) & (\kappa\mathbf{A})\mathbf{B} = \kappa(\mathbf{AB}) \\ (ii) & \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC} \\ (iii) & \mathbf{0A} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A0} = \mathbf{0} \\ (iv) & \mathbf{EA} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{AE} = \mathbf{A} \\ (v) & \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \\ (vi) & (\mathbf{AB})^{\mathbf{T}} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}, \end{array} \tag{1.2}$$

$\mathbf{0}$ *resp.* $\mathbf{E}$ *je nulová resp. jednotková matice vhodného typu.*

Příklad 2: Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou dány takto:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Pak } \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

součin $\mathbf{BA}$ není definován.

Cvičení 1.1

(1) Jsou dány matice

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 1 & -\mathbf{i} & 1+\mathbf{i} \\ 1 & -1 & 0 & \mathbf{i}\sqrt{2} \\ -\mathbf{i} & 0 & 3 & 0 \\ 1+\mathbf{i} & \mathbf{i}\sqrt{2} & 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} & 1-\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 0 & 2 \\ 1+\mathbf{i} & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 8-6\mathbf{i} \\ 8-6\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_5 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Určete, které ze zadaných matic jsou symetrické, antisymetrické, samoadjungované, které jsou ve schodovitém tvaru resp. trojúhelníkové.

(b) Vypočtěte všechny definované součty a součiny matic $\mathbf{A}_i$ s maticemi $\mathbf{B}_j$ nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

(c) Vypište hlavní diagonály všech matic.

(2) Užitím definic dokažte vlastnosti (i) až (xii) součtu a κ-násobku matic ve větě 1.1.

(3) Užitím definic dokažte vlastnosti součinu matic (i) až (vi) součtu a κ-násobku matic ve větě 1.2.

Návod: Použití definic ukážeme na příkladě vlastnosti (ii). Nechť matice $\mathbf{A}$ je typu m/p matice $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ typu p/n. Označme $\mathbf{D} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$. $\mathbf{D}$ je rovněž typu p/n. Dále označme $\mathbf{F} = \mathbf{A}D = \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$, $\mathbf{F} = (\varphi_i^j)$. Podle definice je $\mathbf{A}B = (\alpha_i^k \beta_k^j)$, $\mathbf{A}C = (\alpha_i^k \gamma_k^j)$, $\varphi_i^j = \alpha_i^k \theta_k^j = \alpha_i^k(\beta_k^j + \gamma_k^j) = \alpha_i^k \beta_k^j + \alpha_i^k \gamma_k^j$. Je tedy $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = ((\alpha_i^k \beta_k^j + \alpha_i^k \gamma_k^j)) = \mathbf{A}B + \mathbf{B}C$.

(4) Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu m/n, $\mathbf{E}_n$ jednotková matice typu n/n, $\mathbf{E}_m$ jednotková matice typu m/m. Vypočtěte součiny $\mathbf{A}\mathbf{E}_n$ a $\mathbf{E}_m\mathbf{A}$.

(5) Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Dokažte:

(a) Matice $\mathbf{A} + \mathbf{A}^\mathbf{T}$ je symetrická a matice $\mathbf{A} - \mathbf{A}^\mathbf{T}$ antisymetrická (nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$).

(b) Každou čtvercovou matici lze zapsat jako součet symetrické a antisymetrické matice.

Návod:

(a) Použijte vlastností 1.1 a ukažte, že $(\mathbf{A}+\mathbf{A}^\mathbf{T})^\mathbf{T} = \mathbf{A}+\mathbf{A}^\mathbf{T}$, podobně $(\mathbf{A}-\mathbf{A}^\mathbf{T})^\mathbf{T} = -(\mathbf{A}-\mathbf{A}^\mathbf{T})$.

(b) Užijte výsledku (a).

(6) Zjistěte, zda platí toto tvrzení: Matice $\mathbf{A}$ je horní trojúhelníková matice právě tehdy, když má schodovitý tvar. V kladném případě tvrzení dokažte, v záporném případě je opravte.

1.2 Hodnost matice, Gaussova eliminační metoda

Velmi důležitou charakteristikou každé matice je její hodnost. Abychom ji mohli definovat, potřebujeme několik dalších pojmů týkajících se matice $\mathbf{A}$.

Nechť matice $\mathbf{A}$ je typu m/n, nechť $\{i_1, \ldots, i_r\}$ a $\{j_1, \ldots, j_s\}$, $1 \le r \le m$, $1 \le s \le n$ jsou posloupnosti vybrané z posloupností $\{1, 2, \ldots, m\}$ a $\{1, 2, \ldots, n\}$, tj. $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le m$, $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_s \le n$. Matice typu r/s tvaru

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i_1}^{j_1} & \alpha_{i_1}^{j_2} & \ldots & \alpha_{i_1}^{j_s} \\ \alpha_{i_2}^{j_1} & \alpha_{i_2}^{j_2} & \ldots & \alpha_{i_2}^{j_s} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i_r}^{j_1} & \alpha_{i_r}^{j_2} & \ldots & \alpha_{i_r}^{j_s} \end{pmatrix}$$

se nazývá submaticí matice $\mathbf{A}$ tvořenou řádky s indexy $i_1, \ldots, i_r$ a sloupci $j_1, \ldots, j_s$. Označme dále $(\alpha_i) = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^n)$, $1 \le i \le m$, i-tý řádek matice $\mathbf{A}$, $(\alpha^j) = (\alpha_1^j, \ldots, \alpha_m^j)$, $1 \le j \le n$, j-tý sloupec matice $\mathbf{A}$. Zřejmě je (α^i) matice typu $1/n$ tzv. řádková matice a (α^j) matice typu $m/1$ tzv. sloupcová matice. Pro takové matice pochpitelně také platí všechna pravidla pro počítání s maticemi. Nechť $1 \le i_1 < \ldots < i_r \le m$. Lineární kombinací řádků matice $\mathbf{A}$ s indexy $i_1, \ldots, i_p$ rozumíme řádkovou matici tvaru

$$\gamma^1(\alpha_{i_1}) + \ldots + \gamma^r(\alpha_{i_r}) \equiv \gamma^k(\alpha_{i_k}),$$

kde $\gamma^1, \ldots, \gamma^r \in \mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ jsou libovolná čísla. Řádky s indexy $i_1, \ldots, i_r$ nazýváme lineárně závislé, existují-li čísla $\gamma^1, \ldots, \gamma^r \in \mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$, z nichž alespoň jedno je nenulové, tak, ře platí

$$\gamma^1(\alpha_{i_1}) + \ldots + \gamma^r(\alpha_{i_r}) = \mathbf{0}. \tag{1.3}$$

V opačném případě jsou řádky lineárně nezávislé. Pojmy lineární kombinace, lineární nezávislosti a závislosti lze analogicky definovat i pro sloupce.

Předpokládejme, že řádky s indexy $i_1, \dots, i_r$ jsou lineárně závislé a nenulovým koeficientem v 1.3 je např. γ^p, $1 \le p \le r$. Pak

$$(\alpha_{i_p}) = -\frac{1}{\gamma^p}\left[\gamma^1(\alpha_{i_1}) + \dots + \gamma^{p-1}(\alpha_{i_{p-1}}) + \gamma^{p+1}(\alpha_{i_{p+1}}) + \right.$$
$$\left. + \dots + \gamma^r(\alpha_{i_r})\right],$$

tj. i_p-tý řádek matice $\mathbf{A}$ je lineární kombinací ostatních. Elementárními úpravami matice $\mathbf{A}$ rozumíme následující operace:

(i) vynásobení i-tého řádku (sloupce) libovolným číslem $\kappa \neq 0$,

(ii) přičtení libovolného κ-násobku j-tého řádku k i-tému řádku pro $i \neq j$, podobně pro sloupce. (Vysvětlete podmínku $i \neq j$.)

Elementární úpravy (i), (ii) je velmi užitečné vyjádřit pomocí maticového násobení. Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu m/n. Označme

$$\mathbf{I}_m^{(i)}(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & (i) & & 0 & \\ & & 1 & \downarrow & & & \\ & (i) & \rightarrow & \kappa & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I}_m^{(ij)}(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & & & & (j) & & \\ & \ddots & & & \downarrow & 0 & \\ & & 1 & & \kappa & \leftarrow & (i) \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

čtvercové matice typu m/n. $\mathbf{I}_m^{(i)}(\kappa)$ je diagonální matice, v níž je i-tý prvek diagonály roven $\kappa \neq 0$, ostatní jsou rovny 1. $\mathbf{I}_m^{(ij)}(\kappa)$ je horní trojúhelníková matice, jejíž diagonální prvky jsou rovny 1, prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci je roven κ, ostatní jsou nulové. Přímým výpočtem se snadno přesvědčíme, že matice $\mathbf{A}$, která prodělala elementární úpravu (i) s řádkem resp. sloupcem, získá tvar $\mathbf{I}_m^{(i)}(\kappa)\mathbf{A}$ resp. $\mathbf{A}\mathbf{I}_n^{(i)}(\kappa)$, zatímco při řádkové resp. sloupcové úpravě (ii) nabude tvaru $\mathbf{I}_m^{(ij)}(\kappa)\mathbf{A}$ resp. $\mathbf{A}\mathbf{I}_n^{(ij)}(\kappa)$. Matice $\mathbf{I}_m^{(i)}(\kappa)$ resp. $\mathbf{I}_m^{(ij)}(\kappa)$ se nazývají elementární matice. Provedeme-li tedy s maticí $\mathbf{A}$ konečný počet řádkových a sloupcových úprav, můžeme výslednou matici zapsat ve tvaru $\mathbf{A}\prime = \mathbf{UAV}$, kde $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou součinem konečného počtu elementárních matic. O maticích $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\prime$ říkáme, že jsou ekvivalentní, $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}\prime$, neboť se lze snadno přesvědčit, že takto definovaná relace na množině matic je ekvivalencí (viz cvičení). Konečným počtem elementárních úprav lze také provést výměnu i-tého a j-tého řádku matice, resp. i-tého a

j-tého sloupce. Skutečně, symbolizujeme-li matici $\mathbf{A}$ s vyznačením i-tého a j-tého řádku, můžeme psát pomocí ekvivalencí

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \vdots \\ i+j \\ \vdots \\ j \\ \vdots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \vdots \\ i+j \\ \vdots \\ j-(i+j) \\ \vdots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \vdots \\ i+j \\ \vdots \\ -i \\ \vdots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \vdots \\ i+j+(-i) \\ \vdots \\ -i \\ \vdots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \vdots \\ j \\ \vdots \\ -i \\ \vdots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \vdots \\ j \\ \vdots \\ i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Věta 1.3. *Každou matici typu m/n lze konečným počtem řádkových elementárních úprav převést na schodovitý tvar. (Každá matice typu m/n je tedy ekvivalentní nějaké schodovité matici téhož typu.)*

Důkaz: Důkaz tohoto tvrzení podává současně praktický návod na převedení matice na schodovitý tvar. Uvedený postup má název Gaussova eliminační metoda. Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu m/n. Vyloučíme triviální případ, kdy $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, neboť nulová matice již je ve schodovitém tvaru. Matice $\mathbf{A}$ má tedy alespoň jeden nenulový prvek s nejnižším sloupcovým indexem. Je-li takových prvků více, vezměme ten z nich, který má nejnižší řádkový index. Nyní je již jednoznačně určen tzv. klíčový prvek metody. Nechť se jedná o prvek α_p^q, $1 \le p \le m$, $1 \le q \le n$. Matice $\mathbf{A}$ má tedy tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & & \dots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_q^p & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & & \dots & \end{pmatrix}$$

Je-li $q = 1$, blok nul vpředu pochopitelně chybí. První elementární úprava spočívá ve výměně p-tého a prvého řádku, tj.

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_p^q & \alpha_p^{q+1} & \dots & \alpha_p^n \\ \vdots & & \vdots & \alpha_2^q & \alpha_2^{q+1} & \dots & \alpha_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_1^q & \alpha_1^{q+1} & \dots & \alpha_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_m^q & \alpha_m^{q+1} & \dots & \alpha_m^n \end{pmatrix}$$

označme

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta_1^q & \beta_1^{q+1} & \dots & \beta_1^n \\ \vdots & & \vdots & \beta_2^q & \beta_2^{q+1} & \dots & \beta_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & \beta_p^q & \beta_p^{q+1} & \dots & \beta_p^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \beta_m^q & \beta_m^{q+1} & \dots & \beta_m^n \end{pmatrix}$$

Další úpravy: K i-tému řádku nové matice, $2 \leq i \leq m$, přičteme $(-\beta_i^q/\beta_1^q)$-násobek prvého řádku. Po těchto úpravách získá matice tvar, v němž všechny prvky q-tého sloupce s výjimkou prvku v prvém řádku jsou nulové, tj.

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta_1^q & \beta_1^{q+1} & \dots & \beta_1^n \\ \vdots & & \vdots & 0 & \gamma_2^{q+1} & \dots & \gamma_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_m^{q+1} & \dots & \gamma_m^n \end{pmatrix}.$$

Budeme-li nyní stejný postup aplikovat pouze na řádky s indexy 2 až m, dospějeme ke tvaru, v němž jsou navíc nulové prvky sloupce s indexem $(q+1)$ s eventuální výjimkou prvků v prvém a druhém řádku. Vzhledem ke konečnosti matice $\mathbf{A}$ dospějeme po konečném počtu řádkových elementárních úprav ke schodovitému tvaru.

$\diamondsuit$

Poznámka: Při volbě klíčového prvku u Gaussovy metody považujeme za závazný index q. Není však nutno volit klíčový prvek tak, aby řádkový index p byl při daném q minimální. Obvykle volíme p tak, aby při výpočtu nevznikaly složité zlamky. Díky této nejednoznačnosti pak ani schodovitý tvar matice $\mathbf{A}$ není určen jednoznačně. Všechny schodovité matice ekvivalentní matici $\mathbf{A}$ jsou však pochopitelně ekvivalentní i navzájem.

Příklad 3: Za klíčový prvek při úpravě matice $\mathbf{A}$ volíme α_2^1.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -9 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 16 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \text{ (schodovitý tvar)}$$

Postup úprav: 1. výměna prvého a druhého řádku, 2. přičtení trojnásobku prvého řádku k druhému řádku, 3. výměna druhého a čtvrtého řádku, 5. přičtení jedenáctinásobku třetího řádku ke čtvrtému.

Uvažujme nyní o matici $\mathbf{A}$ z hlediska lineární závislosti resp. nezávislosti jejích řádků. Systém řádků s indexy $i_1, i_2, \dots, i_p$ nazveme maximálním lineárně nezávislým systémem řádků matice $\mathbf{A}$, jestliže

(i) systém $(a_{i_1}), \dots, (a_{i_p})$ je lineárně nezávislý,

(ii) systém $(a_{i_1}), \dots, (a_{i_p}), (a_{i_{p+1}})$ je lineárně závislý pro libovolný index $i_{p+1} \neq i_1, i_2, \dots, i_p$, $1 \leq i_{p+1} \leq m$.

Číslo p, tj. nejvyšší možný počet lineárně nezávislých řádků, udává tzv. *hodnost* matice $\mathbf{A}$. Značíme $p = \mathrm{h}\mathbf{A}$. Zřejmě je $\mathrm{h}\mathbf{A} \leq m$. Čtvercová matice řádu n, jejíž hodnost je maximální, tj. $\mathrm{h}\mathbf{A} = n$, se nazývá *regulární*, je-li $\mathrm{h}\mathbf{A} < n$, jde o matici *singulární*. Číslo $n - \mathrm{h}\mathbf{A}$ nazýváme u čtvercové matice *defektem*.

Poznámka: Počet prvků všech maximálních lineárně nezávislých systémů řádků dané matice je stejný (viz cvičení).

Věta 1.4. *Elementárními úpravami se nemění hodnost matice.*

Důkaz: Tvrzení dokážeme pro elementární úpravu (ií) jak se řádky, tak se sloupci. Protože se jedná a jedno z klíčových tvrzena teorie matic, provedeme důkaz i za cenu jisté zdlouhavosti velmi důsledně. Pouze některé jeho názorné a téměř triviální kroky postoupíme čtenáři v rámci cvičení. Nechť hodnost matice $\mathbf{A}$ typu m/n je p. Největáí počet lineárně nezávislých řádků, které jsme schopni v matici $\mathbf{A}$ nalézt, je tedy p. Tento počet se zřejmě nezmění výměnou řádků. Předpokládejme tedy pro jednoduchost značení, že jsou řádky vyměněny tak, aby nezávislé řádky byly na prvých p pozicích. Jsou tedy řádky $(\alpha_1), \dots, (\alpha_p)$ lineárně nezávislé a každý další řádek matice je jejich lineární kombinací. Proveďme nyní s maticí $\mathbf{A}$ elementární řádkovou úpravu (ii), tj. k i-tému řádku přičteme κ-násobek j-tého řádku, $i \neq j$, $\kappa \neq 0$. Rozlišíme tyto možnosti: $1 \leq i, j \leq p \leq m$, $1 \leq i \leq p < j \leq m$, $1 \leq j \leq p < i \leq m$, $1 \leq p < i, j \leq m$. Že se hodnost matice nezmění v případě třetí a čtvrté možnosti, lze ukázat velmi snadno. Soustřeďme se proto na prvé dvě možnosti.

Nechť $1 \leq i, j \leq p \leq m$. Matice $\mathbf{A}$ je ekvivalentní matici $\mathbf{A}'$, v níž i-tý řádek je tvaru $(\alpha_i') = (\alpha_i) + \kappa(\alpha_j)$, ostatní řádky jsou nezměněny, tj. $(\alpha_k') = (\alpha_k)$ pro všechna $k \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots m\}$. Ukážeme, že prvých p řádků matice $\mathbf{A}'$ je lineárně nezávislých. Nechť $\gamma^1, \dots, \gamma^p$ jsou taková čísla, že platí

$$\gamma^1(\alpha_1') + \cdots + \gamma^i(\alpha_i') + \cdots + \gamma^j(\alpha_j') + \cdots + \gamma^p(\alpha_p') = 0,$$

tj.

$$\gamma^1(\alpha_1) + \cdots + \gamma^i[(\alpha_i) + \kappa(\alpha_j)] + \cdots + \gamma^j(\alpha_j) + \cdots + \gamma^p(\alpha_p) = 0.$$

Odtud

$$\gamma^1(\alpha_1) + \cdots + \gamma^i(\alpha_i) + \cdots + (\kappa\gamma^i + \gamma^j)(\alpha_j) + \cdots + \gamma^p(\alpha_p) = 0,$$

Z nezávislosti řádků $(\alpha_1), \dots, (\alpha_p)$ původní matice však plyne, že všechny koeficienty poslední lineární kombinace jsou nulové tj. $\gamma^1 = \cdots = \gamma^i = \cdots = \gamma^{j-1} = \gamma^{j+1} = \cdots = \gamma^p = 0$ a $\kappa\gamma^i + \gamma^j = 0$. Zřejmě tedy $\gamma^j = 0$. Řádky $(\alpha_1'), \dots, (\alpha_p')$ nové matice jsou tedy opět lineárně nezávislé. Ukázat, že každý další řádek matice $\mathbf{A}'$ je jejich lineární kombinací, je opět velmi snadné.

Nechá nyní $1 \leq i \leq p < j \leq m$. Matice $\mathbf{A}'$ má opět i-tý řádek tvaru $(\alpha_i') = (\alpha_i) + \kappa(\alpha_j)$, $\kappa \neq 0$. (Vysvětlete předpoklad $\kappa \neq 0$.) Prověřme nezávislost resp. závislost prvých p řádků nové matice. Položme

$$\gamma^1(\alpha_1') + \cdots + \gamma^i(\alpha_i') + \cdots + \gamma^p(\alpha_p') = 0.$$

Tato lineární kombinace neobsahuje j-tý řádek nové matice. Dosazením dostaneme

$$\gamma^1(\alpha_1') + \cdots + \gamma^i[(\alpha_i) + \kappa(\alpha_j)] + \cdots + \gamma^p(\alpha_p') = 0$$

$$\gamma^1(\alpha_1) + \cdots + \gamma^i(\alpha_i) + \cdots + \gamma^p(\alpha_p) + \kappa\gamma^i(\alpha_j) = 0;$$

j-tý řádek je však lineární kombinací prvých p řádků původní matice, tj. $(\alpha_j) = \beta^1(\alpha_1) + \cdots + \beta^p(\alpha_p)$. Opět dosadíme a po úpravě dostaneme

$$(\gamma^1 + \kappa\gamma^i\beta^1)(\alpha_1) + \cdots + (\gamma^i + \kappa\gamma^i\beta^i)(\alpha_i) + \cdots + (\gamma^p + \kappa\gamma^i\beta^p)(\alpha_p) = 0.$$

Z nezávislosti řádků $(\alpha_1), \ldots, (\alpha_p)$ plyne

$$\gamma^1 + \kappa\gamma^i\beta^1 = \cdots = \gamma^i + \kappa\gamma^i\beta^i = \cdots = \gamma^p + \kappa\gamma^i\beta^p = 0$$

i-tá rovnost této soustavy $\gamma^i + \kappa\gamma^i\beta^i = 0$ je splněna ve dvou případech:

(i) $\gamma^i = 0$. Pak z ostatních rovností vyplývá nulovost všech koeficientů $\gamma^1, \ldots, \gamma^p$, tj. nezávislost řádků $(\alpha_1'), \ldots, (\alpha_p')$. Opět lze snadno dokázat, že ostatní řádky nové matice $\mathbf{A}'$ budou jejich lineární kombinací.

(ii) $1 + \kappa\beta^i = 0 \Rightarrow \kappa\beta^i = -1 \Rightarrow \beta^i \neq 0$, tj. $\kappa = -1/\beta^i$. Ostatní rovnosti pak dávají obecně nenulové hodnoty čísel $\gamma^1, \ldots, \gamma^p$, neboť $\gamma^k = -\kappa\gamma^i\beta^k = \gamma^i\beta^k/\beta^i$ pro $1 \leq k \leq p$. Řádky nové matice tedy budou lineárně závislé. Ukážeme však, že v tomto případě budou lineárně nezávislě řádky $(\alpha_1'), \ldots, (\alpha_{i-1}'), \ldots, (\alpha_{i+1}'), \ldots, (\alpha_p'), (\alpha_j')$, které jsou ovšem totožné s řádky původní matice s týmiž indexy.

Položme

$$\gamma^1(\alpha_1') + \cdots + \gamma^{i-1}(\alpha_{i-1}') + \gamma^{i+1}(\alpha_{i+1}') + \gamma^p(\alpha_p') + \gamma^j(\alpha_j') = 0$$

tj.

$$\gamma^1(\alpha_1) + \cdots + \gamma^{i-1}(\alpha_{i-1}) + \gamma^{i+1}(\alpha_{i+1}) + \gamma^p(\alpha_p) + \gamma^j(\alpha_j) = 0$$

Je však

$$(\alpha_j) = \beta^1(\alpha_1) + \cdots + \beta^i(\alpha_i) + \cdots + \beta^p(\alpha_p),$$

tj.

$$\begin{aligned}(\gamma^1 + \beta^1\gamma^j)(\alpha_1) + \cdots + (\gamma^{i-1} + \beta^{i-1}\gamma^j)(\alpha_{i-1}) + \gamma^j\beta^i(\alpha_i) + \\ + (\gamma^{i+1} + \beta^{i+1}\gamma^j)(\alpha_{i+1}) + \cdots + (\gamma^p + \beta^p\gamma^j)(\alpha_p) = 0.\end{aligned}$$

Z nezávislosti řádků $(\alpha_1), \ldots, (\alpha_p)$ opět dostaneme

$$\gamma^1 + \beta^1\gamma^j = \cdots = \gamma^{i-1} + \beta^{i-1}\gamma^j = \beta^i\gamma^j = \gamma^{i+1} + \beta^{i+1}\gamma^j = \gamma^p + \beta^p\gamma^j = 0.$$

Poněvadž však pro možnost (ii), kterou se právě zabýváme, je $\beta^i \neq 0$, musí být $\gamma^j = 0$. Z ostatních rovností pak plyne nulovost koeficientů γ^k, $k \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, p\}$, což dokazuje nezávislost řádků matice $\mathbf{A}'$. Opět je třeba ukázat závislost ostatních řádkú matice $\mathbf{A}'$ na řádcích $(\alpha_1'), \ldots, (\alpha_{i-1}'), (\alpha_{i+1}'), \ldots (\alpha_p')$: Nechť (α_q') je libovolný řádek matice $\mathbf{A}'$. Pro $q = i$ je tvrzení již dokázáno. Nechť tedy $q \neq i$. Pak ovšem $(\alpha_q') = (\alpha_q)$ a platí tedy

$$(\alpha_q') = (\alpha_q) = \gamma^1(\alpha_1) + \cdots + \gamma^i(\alpha_i) + \cdots + \gamma^p(\alpha_p)$$

(q-tý řádek původní matice je lineární kombinací prvých p řádků původní matice.) Platí však $(\alpha_k') = (\alpha_k)$ pro $k \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, p\}$, zatímco $(\alpha_i') = (\alpha_i) + \kappa(\alpha_j)$ je lineární kombinací řádků

$$(\alpha_1'), \dots, (\alpha_{i-1}'), (\alpha_{i+1}'), \dots, (\alpha_p'), (\alpha_j'),$$

tj.

$$\begin{aligned}(\alpha_i) = (\alpha_i') - \kappa(\alpha_j) = (\alpha_i') - \kappa(\alpha_j') = \beta^1(\alpha_1') + \cdots + \beta^{i-1}(\alpha_{i-1}') +& \\ + \beta^{i+1}(\alpha_{i+1}') + \cdots + \beta^p(\alpha_p') + \beta^j(\alpha_j') - \kappa(\alpha_j')&\end{aligned}$$

Pak po úpravě

$$\begin{aligned}(\alpha_q') = (\gamma^1 + \beta^1\gamma^i)(\alpha_1') + \cdots + (\gamma^{i-1} + \beta^{i-1}\gamma^i)(\alpha_{i-1}') +& \\ + (\gamma^{i+1} + \beta^{i+1}\gamma^i)(\alpha_{i+1}') + \cdots + (\gamma^p + \beta^p\gamma^i)(\alpha_p') + \gamma^i(\beta^j - \kappa)(\alpha_j').&\end{aligned}$$

Zjišťujeme, že řádek (α_q') je skutečně lineární kombinací řádků

$$(\alpha_1'), \dots, (\alpha_{i-1}'), (\alpha_{i+1}'), \dots (\alpha_p'), (\alpha_j').$$

Nyní dokážeme tvrzení věty 1.4 pro elementární úpravu (ii) se sloupci. Opět předpokládejme, že maximální lineárně nezávislý systém řádků matice $\mathbf{A}$ je tvořen prvými p řádky. Proveďme úpravu spočívající v přičtení κ-násobku ($\kappa \neq 0$) j-tého sloupce k i-tému sloupci. Matice $\mathbf{A}'$ tedy bude mít tvar

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \kappa\mathbf{M} \sim \mathbf{A},$$

kde matice $\kappa\mathbf{M}$ je typu m/n, její i-tý sloupec je roven κ-násobku j-tého sloupce matice $\mathbf{A}$, ostatní prvky jsou nulové. Jednotlivé řádky matice

$$\mathbf{M} : (\mu_k) = (0, ..., 0, \alpha_k^j, 0, ..., 0), 1 \leq k \leq m,$$

prvek α_k^j je na i-té pozici, tj. $\mu_k^i = \alpha_k^i$. Opět prověřme lineární závislost resp. nezávislost prvých p řádků nové matice. Nechť

$$\gamma^1(\alpha_1') + \cdots + \gamma^k(\alpha_k') + \cdots + \gamma^p(\alpha_p') = 0$$

tj.

$$\gamma^1(\alpha_1) + \cdots + \gamma^p(\alpha_p) + \kappa\gamma^1(\mu_1) + \cdots + \kappa\gamma^p(\mu_p) = 0.$$

Řádky matice $\mathbf{M}$ jsou násobky řádku $(\mu) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, v němž jednička je na i-té pozici. Pak

$$\gamma^1(\alpha_1) + \cdots + \gamma^p(\alpha_p) + \kappa(\gamma^1\alpha_1^j + \cdots + \gamma^p\alpha_p^j)(\mu) = 0$$

$$\kappa(\gamma^1\alpha_1^j + \cdots + \gamma^p\alpha_p^j)(\mu) = -\gamma^1(\alpha_1) - \cdots - \gamma^p(\alpha_p).$$

Levá strana rovnosti je řádková matice tvořená nulami s výjimkou i-tého sloupce, v němž stojí prvek $\kappa(\gamma^1\alpha_1^j + \cdots + \gamma^p\alpha_p^j)$. Pravá strana rovnosti je řádková matice tvořená prvky $-\gamma^1(\alpha_1) - \cdots - \gamma^p(\alpha_p)$, $1 \leq k \leq n$. Pro $i \neq j$ je její j-tý sloupec, tvořený prvkem $(\gamma^1\alpha_1^j + \cdots + \gamma^p\alpha_p^j)$ nulový. Pak ovšem $\gamma^1(\alpha_1) + \cdots + \gamma^p(\alpha_p) = 0$ a vzhledem k nezávislosti $(\alpha_1), \ldots, (\alpha_p)$ v původní matici lze tuto rovnost splnit jen pro $\gamma^1 = \cdots = \gamma^p = 0$. Odtud plyne i nezávislost řádků $(\alpha_1\prime), \ldots, (\alpha_p\prime)$ matice $\mathbf{A}\prime$. Důkaz věty 1.4 je ukončen.

◊

Bezprostředním důsledkem věty 1.4 je důležitá skutečnost, že hodnost matice $\mathbf{A}$ je rovna hodnosti libovolné schodovité matice, která je s maticí $\mathbf{A}$ ekvivalentní. Abychom tedy určili hodnost matice $\mathbf{A}$, stačí ji převést na schodovitý tvar a samozřejmě umět zjistit hodnost schodovité matice.

Věta 1.5. *Hodnost schodovité matice je rovna počtu jejích nenulových řádku.*

Důkaz: Nechť $\mathbf{S} = (\sigma_i^j)$ je schodovitá matice typu m/n, $(\sigma_1), \ldots, (\sigma_p)$, $1 \leq p \leq m$ její nenulové řádky. (Skutečnost, že hodnost nulové matice je nulová, je triviálním důsledkem definice.) Předpokládejme, že pro vhodně zvolená čísla $\gamma^1, \ldots \gamma^p$ je $\gamma^1(\sigma_1) + \cdots \gamma^p(\sigma_p) = 0$. Tato maticová rovnice představuje n rovnic pro jednotlivé sloupce. Rozepsáním dostaneme

$$\begin{array}{ccccccccc}
\gamma^1\sigma_1^1 & + & \gamma^2\sigma_2^1 & + & \cdots & + & \gamma^p\sigma_p^1 & = & 0 \\
\gamma^1\sigma_1^2 & + & \gamma^2\sigma_2^2 & + & \cdots & + & \gamma^p\sigma_p^2 & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\gamma^1\sigma_1^n & + & \gamma^2\sigma_2^n & + & \cdots & + & \gamma^p\sigma_p^n & = & 0
\end{array}$$

(Ve zkrácené sčítací symbolice lze tuto soustavu zapsat ve tvaru $\gamma^k\sigma_k^j = 0$, pro všechna $j \in \{1, \ldots, n\}$, $k \in \{1, \ldots, p\}$ je sčítací index.

Poněvadž $\mathbf{S}$ je schodovitá matice, existuje index j_1 tak, že $\sigma_1^1 = \cdots = \sigma_1^{j_1-1} = 0$, $\sigma_1^{j_1} \neq 0$ a pak také $\sigma_i^1 = \cdots = sigma_i^{j_1} = 0$ pro $i \in \{2, \ldots, m\}$. j_1-tá rovnice soustavy pak má tvar $\gamma^1\sigma_1^{j_1} = 0$, odkud $\gamma^1 = 0$. Analogicky ukážeme, že také $\gamma^2 = \cdots = \gamma^p = 0$. Nezávislost řádků $(\sigma_1), \ldots, (\sigma_p)$ je dokázána. Řádky s indexy $p+1, \ldots, m$ jsou pro $p < m$ podle předpokladu nulové a každý a nich je tedy lineární kombinací řádků $(\sigma_1), \ldots, (\sigma_p)$. Hodnost matice $\mathbf{S}$ je $\mathrm{h}\mathbf{S} = p$.

◊

Pomocí vět 1.4 a 1.5 snadno ukážete následující jednoduchá tvrzení:

(i) Hodnost matice $\mathbf{A}$ typu m/n se nezmění vynásobením konečným počtem elementárních matic typu m/m zleva a konečným počtem elementárních matic typu n/n zprava.

(ii) Pro libovolnou matici $\mathbf{A}$ typu m/n platí $\mathrm{h}\mathbf{A} = \mathrm{h}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$.

(iii) Pro libovolnou matici $\mathbf{A}$ typu m/n platí $\mathrm{h}\mathbf{A} \leq \min(m, n)$.

Věta 1.6. *Hodnost matice* $\mathbf{A}$ *typu* m/n *se nezmění vynásobením libovolnou regulární maticí řádu* m *zleva ani vynásobením libovolnou regulární maticí řádu* n *zprava.*

Důkaz: Nechť $\mathbf{Q}$ je regulární matice řádu n. Pak $\mathrm{h}\mathbf{Q} = n$, takže schodovitý tvar matice $\mathbf{Q}$ má všechny diagonální prvky nenulové. Po konečném počtu řádkových elementárních úprav získá tedy matice $\mathbf{Q}$ následující schodovitý tvar:

$$\mathbf{Q} \sim \mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} \eta_1^1{}' & \dots & \dots & \eta_1^n{}' \\ 0 & \eta_2^2{}' & \dots & \eta_2^n{}' \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \eta_n^n{}' \end{pmatrix},$$

kde $\eta_i^i{}' \neq 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Volíme-li prvky $\eta_1^1{}', \dots, \eta_n^n{}'$ postupně za klíčové prvky Gaussovy eliminační metody aplikované na řádky matice $\mathbf{Q}'$ získáme po konečném počtů úprav diagonální matici. Je tedy

$$\mathbf{Q} \sim \mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} \eta_1^1{}' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \eta_n^n{}' \end{pmatrix} \sim \mathbf{E}_m$$

Ke každé elementární úpravě ovšem existuje elementární úprava „zpětná“, tzv. inverzní, která uvede matici do „původního stavu“. Inverzní úprava k řádkové elementární úpravě (i), tj. k vynásobení i-tého řádku nenulovým číslem κ, spočívá ve vynásobeni i-tého řádku číslem $1/\kappa$ a je tedy realizována elementární maticí $\mathbf{I}_m^{(i)}(1/\kappa)$. Podobně zjistíme, že inverzní úprava k řádkové elementární úpravě (ii) je realizována elementární maticí $I_m^{(ij)}(-\kappa)$. Totéž platí pro sloupcové úpravy. Libovolnou regulární matici $\mathbf{Q}$ řádu m lze tedy získat konečným počtem elementárních úprav jednotkové matice $\mathbf{E}_m$, tj. $\mathbf{Q} = \mathbf{U}\mathbf{E}_m\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{V}$, kde $\mathbf{U}$ i $\mathbf{V}$ jsou součiny konečného počtu elementárních matic řádu m. Tvrzení věty 1.6 již nyní bezprostředně plyne z věty 1.4 resp. z jejího důsledku (i).

$\diamondsuit$

Příklad 4: Stanovíme hodnost dané matice $\mathbf{A}$ a matici $\mathbf{U}$, která je součinem elementárních matic, takovou, že $\mathbf{UA} = \mathbf{S}$ je matice ve schodovitém tvaru.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{U}_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{U}_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{U}_3}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{U}_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{U}_3}{\sim},$$

kde $\mathrm{h}\mathbf{A} = 4$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_4\mathbf{U}_3\mathbf{U}_2\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_1 = \mathbf{I}_5^{(51)}(-1)\mathbf{I}_5^{(41)}(-1)\mathbf{I}_5^{(31)}(-1)\mathbf{I}_5^{(21)}(-1)$, $\mathbf{U}_2 = \mathbf{I}_5^{(4)}(1/2)\mathbf{I}_5^{(3)}(1/3)\mathbf{I}_5^{(2)}(1/4)$,

$\mathbf{U}_3 = \mathbf{I}_5^{(14)}(-1)\mathbf{I}_5^{(13)}(-1)\mathbf{I}_5^{(12)}(-1)$,

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Výpočet matice $\mathbf{U}_1$ jsme pomocí součinu elementárních matic provedli jen na ukázku. V praktických příkladech pochopitelně nepostupujeme tak, že bychom jednotlivé elementární matice vypisovali a násobili, ale využijeme následující jednoduché úvahy: Platí $\mathbf{U} = \mathbf{UE}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice téhož řádu jako $\mathbf{U}$. Poněvadž je $\mathbf{U}$ součinem elementárních matic, představuje součin $\mathbf{UE}$ aplikaci jednotlivých elementárních úprav, vyjádřených maticí $\mathbf{U}$, na jednotkovou matici $\mathbf{E}$. Provádíme-li tedy tytéž řádkové úpravy jako s maticí $\mathbf{A}$ typu m/n současně s jednotkovou maticí $\mathbf{E}$ řádu m, přejde matice $\mathbf{E}$ v matici $\mathbf{U}$ v okamžiku, kdy $\mathbf{A}$ nabude požadovaného schodovitého tvaru. Stejná úvaha platí i pro úpravy sloupcové. Aplikujme tuto úvahu na náš příklad. Prvý sled elementárních úprav, reprezentovaný maticí $\mathbf{U}_1$, je

(i) odečtení prvého řádku od druhého

(ii) odečtení prvého řádku od třetího

(iii) odečtení prvého řádku od čtvrtého

(iv) odečtení prvého řádku od pátého.

provedeme-li tyto úpravy s jednotkovou maticí $\mathbf{E}_5$, dostaneme skutečně matici $\mathbf{U}_1$. (Přesvědčte se o tom. Stejným způsobem jsme získali i matici $\mathbf{U}_4$, reprezentující poslední sled elementárních úprav, tj. výměnu prvého řádku s pátým a druhého se čtvrtým.

Cvičení 1.2

(1) Přímým výpočtem prověřte, že matice $\mathbf{I}_m^{(i)}(\kappa)$, $\mathbf{I}_m^{(ij)}(\kappa)$, $\mathbf{I}_n^{(i)}(\kappa)$, $\mathbf{I}_n^{(ij)}(\kappa)$ skutečně realizují příslušné elementátní úpravy matice $\mathbf{A}$ typu m/n.

(2) V příkladu 3 najděte matici $\mathbf{U}$, která převádí matici $\mathbf{A}$ na schodovitý tvar $\mathbf{S}$, tj. $\mathbf{UA} = \mathbf{S}$. Vyjádřete $\mathbf{U}$ také jako součin elementárních matic.

Výsledek: $\mathbf{U} = \mathbf{I}_4^{(43)}(11)\mathbf{I}_4^{(42)}(-3)\mathbf{E}_4^{(24)}\mathbf{I}_4^{(21)}(3)\mathbf{E}_4^{(12)}$, kde $\mathbf{E}_m^{(ij)}$ značí matici typu m/m realizující výměnu i-tého a j-tého řádku.

$$\mathbf{U} == \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 11 & -3 \end{pmatrix}$$

(3) Proveďte důkaz věty 1.4 pro řádkové elementární úpravy v případech $1 \le j \le p < i \le m$ a $1 < p \le i, j \le m$. Projděte důkladně důkaz věty 1.4 pro případy $1 \le i, j \le p \le m$, $1 \le i \le p < j \le m$ a dokončete důkazy jednoduchých tvrzení, které byly v textu vynechány. Jedná se např. o důkaz závislosti libovolného z řádků $(\alpha_q\prime)$ matice $\mathbf{A}\prime$ na prvých p řádcích $(\alpha_1\prime), \dots, (\alpha_p\prime)$ v případě $1 \le i, j \le p \le m$.

Návod: Použijte standardního postupu pro důkaz lineární závislosti resp. nezávislosti řádků, který jsme v důkazu věty 1.4 uplatnili několikrát.

(4) Zapište ve zkrácené sčítací symbolice všechny vztahy v předchozím odstavci, které takový zápis umožňují.

Návod: Například vztah $\gamma^1(\alpha_1) + \cdots + \gamma^p(\alpha_p) = 0$ lze zapsat jako $\gamma^k(\alpha_k) = 0$, sčítací index $k \in \{, 1, \dots, p\}$.

Dokažte důsledky (i), (ii), (iii) vět 1.4 a 1.5.

Vypočtěte následující aoučiny elementárních matic:

$$\mathbf{I}_m^{(i)}(\kappa)\mathbf{I}_m^{(i)}(1/\kappa), \quad \mathbf{I}_m^{(i)}(1/\kappa)\mathbf{I}_m^{(i)}(\kappa), \quad \mathbf{I}_m^{(ij)}(\kappa)\mathbf{I}_m^{(ij)}(-\kappa), \quad \mathbf{I}_m^{(ij)}(-\kappa)\mathbf{I}_m^{(ij)}(\kappa).$$

Výsledek: Všechny součiny jsou rovny $\mathbf{E}_m$.

(5) Matice $\mathbf{A}_i$ a $\mathbf{B}_j$ z úlohy (1) Cvičení 1.1 i všechny jejich součiny a součty, které jsou definovány, upravte na schodovitý tvar a určete hodnost. Pomocí dalších elementárních úprav převeďte schodovitý tvar matic na tvar, který má mimo diagonálu pouze nulové prvky. Určete matice $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, které realizují sled příslušných řádkových a sloupcových úprav.

(a) Ukažte, že relace definovaná na množině matic $\mathcal{A}(m/n)$ typu m/n tak, že $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Leftrightarrow$ lze-li matici $\mathbf{B}$ získat z matice $\mathbf{A}$ konečným počtem elementárních úprav, je relací ekvivalence.

(b) Pomocí pojmu hodnosti se pokuste charakterizovat třídy rozkladu množiny $A(m/n)$ příslušného této ekvivalenci.

Návod: V úloze (i) prověřte axiomy relace ekvivalence, tj. symetrii, reflexivitu, tranzitivitu. V úloze (ii) dokažte tvrzení: Matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{A}(m/n)$ jsou ekvivalentní právě tehdy, mají-li stejnou hodnost.

(6) Matici $\mathbf{E}_m^{(ij)}$ resp. $\mathbf{I}_n^{(ij)}$, která realizuje výměnu i-tého a j-tého řádku resp. sloupce v matici $\mathbf{A}$ typu m/n, vyjádřete jako součin elementárních matic (viz text před větou 1.3).

Výsledek:

$$\mathbf{E}_m^{(ij)} = \mathbf{I}_m^{(j)}(-1)\mathbf{I}_m^{(ij)}(1)\mathbf{I}_m^{(ji)}(-1)\mathbf{I}_m^{(ij)}(1) \text{ pro řádky}$$

$$\mathbf{E}_n^{(ij)} = \mathbf{I}_n^{(ji)}(1)\mathbf{I}_n^{(ij)}(-1)\mathbf{I}_n^{(ji)}(1)\mathbf{I}_n^{(j)}(-1) \text{ pro sloupce}$$

(7) Dokažte, že počet prvků maximálního lineárně nezávislého systému řádků matice $\mathbf{A}$ typu m/n nezávisí na výběru tohoto systému.

Návod: Zvolte dva systémy řádků $(\alpha_{i_1}), \dots, (\alpha_{i_p})$, $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m$, $(\alpha_{j_1}), \dots, (\alpha_{j_q})$, $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq m$, a předpokládejte např. $p < q$. Jsou-li oba systémy maximálními lineárně nezávislými systémy řádků, musí být každý řádek jednoho z nich lineární kombinací řádká druhého a naopak, vznikne spor s definicí maximálního lineárně nezávislého systému.

1.3 Čtvercové matice: determinant, inverzní matice, podobnost matic

V tomto odstavci se budeme zabývat základnami charakteristikami čtvercových matic a definujeme vztah tzv. podobnosti čtvercových matic, který je jedním z klíčových pojmů potřebných v kapitole 4.

Nejprve však zavedeme důležitý pomocný pojem, jímž je permutace množiny a shrneme základní vlastnosti permutací. *Permutací* libovolné konečné množiny M rozumíme libovolné prosté zobrazení množiny M na sebe. Problematikou permutací se nebudeme zabývat podrobněji. Pro naše účely postačí, budeme-li za množinu M považovat množinu přirozených čísel $\{1, \dots, n\}$, která budou reprezentovat řádkové resp. sloupcové indexy matic. Je zřejmé, že každá uspořádaná n-tice $[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ navzájem různých prvků množiny M definuje permutaci M, počet váech permutací množiny M je tedy $n!$. Množinu permutací množiny M značíme $\Sigma_n(M)$. Nechť $[s] = [\sigma_1, \dots, \sigma_n] \in \Sigma_n(M)$. Říkáme, že dvojice prvků (σ_i, σ_j), $i < j$, tvoří inverzi, je-li $\sigma_i > \sigma_j$. Permutaci nazýváme *lichou* resp. *sudou*, obsahuje-li lichý resp. sudý počet dvojic prvků tvořících inverzi. Je-li p počet inverzí dané permutace $[s]$, nazýváme číslo $(-1)^p$ znaménkem permutace $[s]$ a značíme $p = \text{sgn}[s]$. Identické zobrazení množiny M na sebe představuje tzv. identickou permutaci [id]. Složením dvou permutací $[s_1]$, $[s_2]$ ve smyslu skládání zobrazení vzniká opět permutace. Ve smyslu definice inverzního zobrazena definujeme také inverzní permutaci $[s^{-1}]$ k permutaci $[s]$.

Příklad 5: Nechť $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $[s_1] = [2, 4, 6, 1, 5, 3]$, $[s_2] = [3, 1, 4, 2, 5, 6]$. Platí $\text{sgn}[s_1] = -1$, neboť $[s1]$ obsahuje 7 inverzí: dvojka je před jedničkou $\Rightarrow$ 1 inverze, čtyřka je před jedničkou a trojkou $\Rightarrow$ 2 inverze, šestka je před jedničkou, trojkou e pětkou $\Rightarrow$ 3 inverze, pětka je před trojkou $\Rightarrow$ 1 inverze; celkem 7 inverzí. Dále je $\text{sgn}[s_2] = -1$. Obě permutace jsou tedy liché.

Abychom našli kompozici $[s] = [s_2] \circ [s_1]$ resp. $[s_1] \circ [s_2]$, vyjádříme permutace takto:

$$[s_1] \sim \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ 2, & 4, & 6, & 1, & 5, & 3 \end{bmatrix} \quad [s_2] \sim \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ 3, & 1, & 4, & 2, & 5, & 6 \end{bmatrix}$$

Nyní „přeskládáme“ sloupce druhého uspořádání tak, aby se v prvém řádku objevila permutace $[s_1]$, tj.

$$[s_2] \to \begin{bmatrix} 2, & 4, & 6, & 1, & 5, & 3 \\ 1, & 2, & 6, & 3, & 5, & 4 \end{bmatrix}$$

Pak zřejmě $[s_2] \circ [s_1] = [1, 2, 6, 3, 5, 4]$, $\text{sgn}[s_2] \circ [s_1] = 1$. Tento postup skutečně odpovídá skládání zobrazení: zobrazení $[s_1]$ přiřazuje například prvku 4 prvek 1, zobrazení $[s_2]$ přiřazuje prvku 1 prvek 3. Složené zobrazení $[s_2] \circ [s_1]$, vznikající postupnou aplikací $[s_1]$ a $[s_2]$ v tomto pořadí, tedy přiřazuje prvku 4 prvek 3. Prvek 3 se tedy objeví na čtvrté pozici výsledné permutace. Analogicky dostaneme $[s_1] \circ [s_2] = [6, 2, 1, 4, 5, 3]$. Nyní najdeme $[s^{-1}]$. Musí platit $[s_1^{-1}] \circ [s_1] = [s_1] \circ [s_1^{-1}] = [\text{id}]$.

$$[s_1] \sim \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ 2, & 4, & 6, & 1, & 5, & 3 \end{bmatrix} \quad [s_1^{-1}] = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \sigma_3, & \sigma_4, & \sigma_5, & \sigma_6 \end{bmatrix}$$

Pak

$$[s_1] \circ [s_1^{-1}] \sim \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ \sigma_2, & \sigma_4, & \sigma_6, & \sigma_1, & \sigma_5, & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad [\sigma_2, \sigma_4, \sigma_6, \sigma_1, \sigma_5, \sigma_3] = [\text{id}]$$

a odtud $[s_1^{-1}] = [4, 1, 6, 2, 5, 3]$. Platí i $[s_1^{-1}] \circ [s_1] = [\text{id}]$. Podobně získáme $[s_2^{-1}] = [2, 4, 1, 3, 5, 6]$.

Platí $\text{sgn}[s] = \text{sgn}[s^{-1}]$, $\text{sgn}[s_1] \circ [s_2] = \text{sgn}[s_1]\text{sgn}[s_2]$. Zaměníme-li v permutaci libovolné dva prvky, změní se její znaménko.

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Číslo

$$\det \mathbf{A} = \sum_{[s] \in \Sigma_n(M)} \text{sgn}[s] \alpha_1^{\sigma_1} \alpha_2^{\sigma_2} \dots \alpha_n^{\sigma_n} \tag{1.4}$$

se nazývá *determinantem* matice $\mathbf{A}$. Zapisujeme také

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \cdots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \cdots & \cdots & \alpha_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n^1 & \cdots & \cdots & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

Poznámka: Determinant lze vyjádřit i pomocí zkrácené sčítací symboliky užitím pomocných veličin

$$\epsilon^{1\ 2\ \cdots n}_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n} = \begin{cases} 0 & \text{je-li pro některé } i, j\sigma_i = \sigma_j \\ 1 & \text{je-li } [\sigma_1, \ldots, \sigma_n] \text{ sudá permutace} \\ -1 & \text{je-li } [\sigma_1, \ldots, \sigma_n] \text{ lichá permutace} \end{cases}$$

Pak

$$\det A \ = \epsilon^{1\ 2\ \cdots n}_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n} \alpha_1^{\sigma_1} \alpha_2^{\sigma_2} \ldots \alpha_n^{\sigma_n} \tag{1.5}$$

(sčítací indexy jsou $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Determinant matice je tedy tvořen součtem součinů prvků matice utvořeným tak, že každý sčítanec obsahuje právě jeden prvek z každého řádku a sloupce. Následující vlastnosti determinantů jsou přímým důsledkem definice.

Věta 1.7. *(Vlastnosti determinantů) Nechť* $\mathbf{A}$ *je čtvercová matice řádu n. Pak platí*

(i) Vynásobením i-tého řádku sloupce matice $\mathbf{A}$ *nenulovým číslem* κ *vznikne matice* $\mathbf{A}\prime$*, pro niž* $\det \mathbf{A}\prime = \kappa \det \mathbf{A}$*. Je tedy pro libovolné i*

$$\det\left(\mathbf{I}_n^{(i)}(\kappa)\mathbf{A}\right) = \det\left(\mathbf{A}\mathbf{I}_n^{(i)}(\kappa)\right) = \kappa \det \mathbf{A} = \det \mathbf{I}_n^{(i)}(\kappa) \det \mathbf{A}$$

neboť $\kappa = \det I_n^{(i)}(\kappa)$*. Je-li některý řádek sloupec matice* $\mathbf{A}$ *nulový, je* $\det \mathbf{A} = 0$*.*

(ii) Přičtením κ*-násobku j-tého řádku (sloupce) matice* $\mathbf{A}$ *k i-tému řádku (sloupci) se determinant nemění, tj.*

$$\det\left(\mathbf{I}_n^{(ij)}(\kappa)\mathbf{A}\right) = \det\left(\mathbf{A}\mathbf{I}_n^{(ij)}(\kappa)\right) = \det \mathbf{A} = \det \mathbf{I}_n^{(ij)}(\kappa) \det \mathbf{A}$$

neboť determinant matice $\mathbf{I}_n^{(ij)}(\kappa)$ *je 1.*

(iii) Výměna dvou řádků (sloupců) matice $\mathbf{A}$ *mění znaménko determinantu, tj.*

$$\det\left(\mathbf{E}_n^{(ij)}(\kappa)\mathbf{A}\right) = \det\left(\mathbf{A}\mathbf{E}_n^{(ij)}(\kappa)\right) = -\det \mathbf{A} = \det \mathbf{E}_n^{(ij)}(\kappa) \det \mathbf{A}$$

neboť $\det \mathbf{E}_n^{(ij)}(\kappa) = -1$*. Jsou-li dva řádky sloupce matice* $\mathbf{A}$ *stejné, je* $\det A = 0$*.*

(iv) Je-li $\mathbf{Q}$ *regulární matice řádu n, pak* $\det \mathbf{A}Q == \det \mathbf{Q}A = \det \mathbf{Q} \det \mathbf{A}$*.*

(v) Determinant schodovité a trojúhelníkové matice (horní i dolní) je roven součinu prvků hlavní diagonály.

(vi) Nechť $\mathbf{B}$ *je matice řádu n. Platí* $\det \mathbf{A}B = \det \mathbf{B}A = (\det \mathbf{A} \det \mathbf{B})$*.*

(vii) $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$*.*

(viii) Matice A je regulární právě tehdy, je-li $\det \mathbf{A} \neq 0$*.*

Důkaz: Důkazy vlastností (i), (ii), (v) je třeba provést přímo z definice. Tento výpočet bude součástí Cvičení 1.3. Vlastnost (iii) je přímým důsledkem (i) a (ii) , neboť $\mathbf{E}_n^{(ij)} = \mathbf{I}_n^{(j)}(-1)\mathbf{I}_n^{(ij)}(1)\mathbf{I}_n^{(ji)}(-1)\mathbf{I}_n^{(ij)}(1)$ (viz úlohu (9) Cvičení 1.2 a text před větou 1.3). Pomocí důkazu věty 1.6, konkrétně pomocí skutečnosti, že libovolná regulární matice je součinem elementárních matic, a vlastností (i) až (iii) snadno prověříme (iv). Rovněž důkazy (vii) a (viii) jsou jednoduché, použije se při nich opět vlastností (i) až (iii) a (v) . Soustřeďme se proto na důkaz vlastnosti (vi). Nechť A, B jsou matice řádu n a $\mathbf{D_A}$, $\mathbf{D_B}$ odpovídající diagonální matice, které získáme konečným počtem elementárních úprav z matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$. Inverzními úpravami lze z matic $\mathbf{D_A}$, $\mathbf{D_B}$ obdržet zpět matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{U}_1\mathbf{D_A}\mathbf{V}_1$, $\mathbf{B} = \mathbf{U}_2\mathbf{D_B}\mathbf{V}_2$, kde $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{V}_2$ jsou konečné součiny elementárních matic. Podle pravidel (i) až (iii) nebo přímo podle (iv) je

$$\det\mathbf{A} = \det\mathbf{U}_1\det\mathbf{D_A}\det\mathbf{V}_1 \quad ,\det\mathbf{B} = \det\mathbf{U}_2\det\mathbf{D_B}\det\mathbf{V}_2$$

Vypočteme nyní součin matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$: $\mathbf{A}B = \mathbf{U}_1\mathbf{D_A}\mathbf{V}_1\mathbf{U}_2\mathbf{D_B}\mathbf{V}_2$. (Proč na pravé straně rovnosti nepíšeme závorky?) Pak platí

$$\det\mathbf{A}B = \det\mathbf{U}_1\det(\mathbf{D_A}\mathbf{V}_1\mathbf{U}_2\mathbf{D_B})\det\mathbf{V}_2 \text{ opět podle (iv).}$$

Zabývejme se nyní determinantem matice tvaru $\mathbf{C} = \mathbf{DM}$, kde $\mathbf{D}$ je diagonální matice $\operatorname{diag}\mathbf{D} = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, $\mathbf{M} = (\mu_i^j)$ je libovolná matice řádu n. $\mathbf{C} = (\gamma_i^j)$, $\gamma_i^j = \lambda_i\mu_i^j$ tj. matice $\mathbf{C}$ má následující tvar:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1^1 & \lambda_1\mu_1^2 & \cdots & \lambda_1\mu_1^n \\ \lambda_2\mu_2^1 & \lambda_2\mu_2^2 & \cdots & \lambda_2\mu_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_n\mu_n^1 & \lambda_n\mu_n^2 & \cdots & \lambda_n\mu_n^n \end{pmatrix}$$

Podle (i) pak $\det\mathbf{C} = \lambda_1\ldots\lambda_n\det\mathbf{M} = (\det\mathbf{D}\det\mathbf{M})$. Tento vztah platí i pro případ, že některé z čísel λ_i je nulové. Pro $\mathbf{C}\prime = \mathbf{MD}$ je opět $\det\mathbf{C}\prime = \det\mathbf{M}\det\mathbf{D}$ (prověřte). Použijeme těchto závěrů pro výpočet determinantu matice $(\mathbf{D_A}\mathbf{V}_1\mathbf{U}_2\mathbf{D_B}$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{D_A}\mathbf{V}_1\mathbf{U}_2\mathbf{D_B}) &= \det\mathbf{D_A}\det(\mathbf{V}_1\mathbf{U}_2\mathbf{D_B}) = \\ &= \det\mathbf{D_A}\det(\mathbf{V}_1\mathbf{U}_2)\det\mathbf{D_B} = \det\mathbf{D_A}\det\mathbf{V}_1\det\mathbf{U}_2\det\mathbf{D_B} \end{aligned}$$

Poslední rovnost opět vyplývá z (iv). Pro determinant součinu $\mathbf{A}B$ tedy nakonec dostáváme:

$$\det\mathbf{A}B = \det\mathbf{D_A}\det\mathbf{V}_1\det\mathbf{U}_2\det\mathbf{D_B} = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B} \tag{1.6}$$

$\diamondsuit$

Ve větě 1.7 jsme shrnuli všechny podstatné vlastnosti determinantů, postrádáme však doposud nějaký vhodný způsob praktického výpočtu determinantu, který by byl schůdnější než přímé použití definice. Jednou z možností, která se díky platnosti věty 1.7 nabízí, je výpočet determinantu schodovité nebo diagonální matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ elementárními úpravami. Někdy je však užitečné kombinovat elementární úpravy s metodou, která umožňuje nahradit výpočet determinantu řádu n výpočtem několika determinantů řádu $(n-1)$. Jedná se o tzv. rozvoj determinantu podle vybraného řádku nebo sloupce.

K formulaci metody potřebujeme ještě některé pojmy: *Minorem* (subdeterminantem) k-tého řádu matice $\mathbf{A}$ pro $1 \leq k \leq n$ rozumíme determinant její libovolné submatice k-tého řádu. Algebraickým doplňkem prvku α_i^j čtvercové matice $\mathbf{A}$ řádu n nazýváme číslo $\mathcal{A}_j^i = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_j^i$, kde $\mathbf{A}_j^i$ je submatice vzniklá z $\mathbf{A}$ vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce. Algebraický doplněk prvku je tedy dán minorem řádu $(n-1)$ matice $\mathbf{A}$.

Věta 1.8. *Nechť* $\mathbf{A} = (\alpha_i^j)$ *je matice řádu* n. *Platí*

$$\det \mathbf{A} = \alpha_1^j \mathcal{A}_j^1 = \cdots = \alpha_n^j \mathcal{A}_j^n \quad \det \mathbf{A} = \alpha_i^1 \mathcal{A}_1^i = \cdots = \alpha_i^n \mathcal{A}_n^i \tag{1.7}$$

Výraz $\alpha_1^j \mathcal{A}_j^1 = \alpha_1^1 \mathcal{A}_1^1 + \alpha_1^2 \mathcal{A}_2^1 + \cdots + \alpha_1^n \mathcal{A}_n^1$ vyjadřuje rozvoj determinantu podle prvého řádku, výraz $\alpha_1^1 \mathcal{A}_1^1 + \alpha_2^1 \mathcal{A}_1^2 + \cdots + \alpha_n^1 \mathcal{A}_1^n$ rozvoj podle prvého sloupce. Podobně jsou definovány rozvoje podle ostatních řádků a sloupců. Všechny rozvoje mají stejnou hodnotu, rovnou determinantu matice $\mathbf{A}$.

Důkaz: Důkaz věty 1.8 lze provést přímo z definice determinantu a bude předmětem Cvičení 1.3.

$\diamondsuit$

Poznámka: Použití rozvoje determinantu podle i-tého řádku (sloupce) je vhodné hlavně v případě, že tento řádek (sloupec) obsahuje větší počet nulových prvků. Často se rozvoje používá pro determinanty čtvrtého řádu v kombinaci s tzv. Sarusovým pravidlem (viz Cvičení 1.3).

Příklad 6: Vypočteme determinant zadané matice $\mathbf{A}$ jednak převodem na schodovitý tvar elementárními úpravami, jednak rozvojem podle vhodně zvoleného řádku nebo sloupce.

Výpočet determinantu pomocí elementárních úprav: Pří používání elementárních úprav musíme dbát na to, že „beztrestně" smíme provést pouze elementární úpravu (ii), tj. přičtení κ-násobku j-tého řádku (sloupce) k i-tému. Při každém použití výměry řádkú (sloupců) je nutno vynásobit výsledek (-1) a při každém použití elementární úpravy (i), tj. násobení řádku (sloupce) číslem $\kappa \neq 0$, vynásobit výsledek $1/\kappa$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{V}_1} \begin{pmatrix} -8 & 7 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 8 & 3 & 8 & -3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{U}_1} \begin{pmatrix} -8 & 7 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 8 & 0 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{U}_2} \begin{pmatrix} -8 & -5 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & -16 & 0 & 0 & 37 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{V}_2} \begin{pmatrix} -8 & -5 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & -16 & 0 & 0 & 37 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{U}_3} \begin{pmatrix} -8 & -5 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{U}_4} \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 & -77 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{V}_3} \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 & -77 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{U}_5} \begin{pmatrix} 0 & 55 & 0 & 0 & 847 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -55 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{U}_6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 997 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{V}_4, \mathbf{U}_7} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 997 \end{pmatrix}$$

Poslední matice je v schodovitém tvaru, její determinant je roven číslu -11×997. Ke změnám determinantu došlo při elementárních úpravách $\mathbf{U}_2$ (násobení determinantu číslem -55), $\mathbf{U}_6$ (násobení determinantu číslem $1/5$) a při úpravě $\mathbf{U}_7$. (násobení determinantu číslem -1 díky třem sloupcovým nebo řádkovým výměnám). Je proto $\det \mathbf{A} = -1/55 \times 5 \times (-1) \times (-11 \times 997) = -997$.

Výpočet determinantu rozvojem například podle druhého řádku:

$$\det \mathbf{A} = 3\det\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 5\\ 2 & 1 & -3 & 1\\ -1 & 3 & -1 & 0\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 0 & 5\\ 2 & -3 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 3 & 0\end{pmatrix} -$$

$$-(-5)\det\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & -2\\ 0 & 4 & 0 & 5\\ 2 & -3 & 1 & -3\\ -1 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 5\\ 2 & 1 & -3 & 1\\ -1 & 3 & -1 & 0\end{pmatrix} = -5\det\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix} + 5\det\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & 3 & -1\end{pmatrix} = -265$$

$$\det\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 0 & 5\\ 2 & -3 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 3 & 0\end{pmatrix} = 4\det\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix} + 5\det\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix} = 143$$

$$\det\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & -2\\ 0 & 4 & 0 & 5\\ 2 & -3 & 1 & -3\\ -1 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix} = 4\det\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & 3 & -1\end{pmatrix} + 5\det\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2\\ 2 & -3 & 1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix} = -69$$

$$\det \mathbf{A} = 3 \times (-265) + 143 + 5 \times (-69) = -795 + 143 - 345 = -997$$

Výpočet determinantu kombinací elementárních úprav s rozvojem: Po provedení úprav daných maticemi $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ provedeme rozvoj podle čtvrtého řádku a dále rozvoj podle druhého řádku:

$$\det \mathbf{A} = (-1)\det\begin{pmatrix} -8 & -5 & 0 & 19\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -11 & 0 & 30\\ 1 & 0 & 0 & -12\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -8 & -5 & 19\\ 0 & -11 & 30\\ 1 & 0 & -12\end{pmatrix} = -997$$

Matice $\mathbf{U}_i$ a $\mathbf{V}_j$, pomocí kterých jsme v tomto příkladu realizovali elementární úpravy, jsou uvedeny v úloze (5) Cvičení 1.3. Součástí Cvičení 1.3 je rovněž odvození Sarusova pravidla pro výpočet determinantu matice třetího řádu.

Zobecněním věty o rozvoji determinantu podle řádku (sloupce) je tzv. Laplaceova metoda rozvoje determinantu podle několika řádků nebo sloupců, která se s výhodou uplatní v případě že matice obsahuje nulové bloky.

Věta 1.9. *(Laplaceova věta o rozvoji determinantu podle k-tice řádků nebo sloupců) Nechť* $\mathbf{A} = (\alpha_i^j)$ *je čtvercová matice n-tého řádu a* $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ *resp.* $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$ *řádkové resp. sloupcové indexy. Platí*

$$\det \mathbf{A} = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} \det\begin{pmatrix} \alpha_{i_1}^{j_1} & \cdots & \alpha_{i_1}^{j_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{i_k}^{j_1} & \cdots & \alpha_{i_k}^{j_k}\end{pmatrix} \mathcal{A}_{j_1 \ldots j_k}^{i_1 \ldots i_k} \tag{1.8}$$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \det \begin{pmatrix} \alpha_{i_1}^{j_1} & \cdots & \alpha_{i_1}^{j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i_k}^{j_1} & \cdots & \alpha_{i_k}^{j_k} \end{pmatrix} \mathcal{A}_{j_1 \ldots j_k}^{i_1 \ldots i_k} \tag{1.9}$$

kde $\mathcal{A}_{j_1 \ldots j_k}^{i_1 \ldots i_k}$ *je tzv. algebraický doplněk subdeterminantu*

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{i_1}^{j_1} & \cdots & \alpha_{i_1}^{j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{i_k}^{j_1} & \cdots & \alpha_{i_k}^{j_k} \end{pmatrix}$$

definovaný jako determinant vypočtený ze zbývajících řádků a sloupců matice $\mathbf{A}$ *vynásobený číslem* -1 *umocněným na součet zbývajících řádkových a sloupcových indexů.*

Nechť $\mathbf{A}$ je matice řádu n. Matici $\mathbf{B}$, pro kterou je $\mathbf{A}B = \mathbf{B}A = \mathbf{E}$ nazýváme maticí *inverzní* k matici $\mathbf{A}$, značíme ji symbolem $\mathbf{A}^{-1}$, Shrneme nyní důležité vlastnosti inverzních matic.

Věta 1.10. *Vlastnosti inverzních matic Pro čtvercové matice řádu n platí:*

(i)

$$\textit{Pokud matice } \mathbf{A}^{-1} \textit{ existuje, je určena jednoznačně.} \tag{1.10}$$

(ii)

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}. \tag{1.11}$$

(iii)

$$(\mathbf{A}B)^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}. \tag{1.12}$$

(iv)

$$\det \mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1} \tag{1.13}$$

(v)

$$\mathbf{A}^{-1} \textit{ existuje právě tehdy, když } A \textit{ je regulární.} \tag{1.14}$$

(vi)

$$\textit{Platí-li pro matice } \mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{A}B = \mathbf{E}, \textit{ pak } \mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}, \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}. \tag{1.15}$$

Důkaz: Důkazy těchto tvrzení jsou velmi jednoduché a vyžadují pouze použití pravidel pro součin matic. Budou součástí Cvičení 1.3.

$\diamondsuit$

Vzniká opět problém praktického výpočtu inverzní matice. Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu n. Existence inverzní matice je zaručena vlastností (v) ve větě 1.10. Jedna z metod výpočtu je opět založena na použití elementárních úprav. Matici $\mathbf{A}$ převedeme elementárními úpravami na horní trojúhelníkový tvar. Vzhledem k regulárnosti matice a vlastnosti (v) ve větě 1.7 jsou všechny diagonální prvky tohoto tvaru nenulové. Další elementární úpravy zajistí, aby všechny prvky v diagonále byly rovny jedné. Je možné zajistit, aby tyto úpravy byly řádkové, Nyní můžeme opět pomocí řádkových elementárních úprav vynulovat zbylé nediagonální prvky. Konkrétně

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}\prime = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1^{2}\prime & \dots & \dots & \alpha_1^{n}\prime \\ 0 & 1 & \alpha_2^{3}\prime & \dots & \alpha_2^{n}\prime \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1}^{n}\prime \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1^{2}\prime & \dots & \alpha_1^{n-1}\prime & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_2^{n-1}\prime & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Provedli jsme postupně odečtení $\alpha_1^{n\prime}$-násobku posledního řádku od prvého, $\alpha_2^{n\prime}$-násobku posledního řádku od řádku druhého, atd. Podobně pokračujeme s ostatními řádky a nulujeme postupně jednotlivé sloupce matice $\mathbf{A}'$. Lze tedy psát $\mathbf{U}A = \mathbf{E}$, kde $\mathbf{U}$ je konečný součin elementárních matic. Užitím vlastnosti (vi) ve větě 1.10 zjišťujeme, že $\mathbf{U} = \mathbf{A}^{-1}$. Je však $\mathbf{U} = \mathbf{U}E$, takže matici $\mathbf{A}^{-1}$ dostaneme z matice $\mathbf{E}$ týmiž elementárními úpravami, které vedly k převodu matice $\mathbf{A}$ na jednotkový diagonální tvar. Prakticky postupujeme tak, že úpravy matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$ provádíme souběžně.

Příklad 7: K zadané matici $\mathbf{A}$ vypočteme matici $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Pak } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Budeme provádět souběžné elementární úpravy matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{E}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{25}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{25}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{37}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{25}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{37}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Těmito úpravami je matice $\mathbf{A}$ (vlevo) převedena na jednotkový diagonální tvar a matice $\mathbf{A}$ (vpravo) na inverzní matici k matici $\mathbf{A}$.

Jiná metoda výpočtu inverzní matice spočívá v platnosti věty o rozvoji věta 1.8. Utvořme matici $\mathbf{B}$ z algebraických doplňků matice $\mathbf{A}$ takto: $\mathbf{B} = (\beta_i^j) = (\mathcal{A}_j^j$, tj. prvek matice $\mathbf{B}$ je algebraickým doplňkem prvku α_j^i matice $\mathbf{A}$. Matice $\mathbf{B}$ se nazývá maticí adjungovanou k $\mathbf{A}$, značíme ji $\mathbf{B} = \mathrm{adj}\mathbf{A}$. Přímým výpočtem a užitím věty 1.8 se snadno přesvědčíme, že součin $\mathbf{AB}$ je roven diagonální matici, jejíž diagonální prvky jsou rovny $\det \mathbf{A}$. Tento výpočet bude součástí Cvičení 1.3. Označíme-li tedy $\mathbf{C} = \mathrm{adj}\mathbf{A}/\det \mathbf{A}$, dostáváme $\mathbf{AC} = \mathbf{E}$. Podle tvrzení (vi) věty 1.10 je zřejmé, že $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$, takže platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathrm{adj}\mathbf{A}. \tag{1.16}$$

Tento vztah prc výpočet prvků inverzní matice je užitečný zejména pro matice nižších řádů $n \leq 4$. U matic vyšších řádů jsou výpočty algebraických doplňku zdlouhavé a je výhodnější použít souběžných elementárních úprav matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{E}$.

Na závěr odstavce zavedeme pojem podobnosti matic. Čtvercové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ řádu n nazýváme podobnými, jestliže existuje regulární matice $\mathbf{Q}$ taková, že platí $\mathbf{B} = \mathbf{QAQ}^{-1}$. Říkáme, že matice $\mathbf{B}$ je podobná matici $\mathbf{A}$. Pochopitelně je také matice $\mathbf{A}$ podobná matici $\mathbf{B}$, neboť $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{BQ} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{Q}^{-1})^{-1}$, kde $\mathbf{Q}^{-1}$ je regulární matice. Vztah mezi podobnými maticemi nazýváme podobnostní transformací. Z věty 1.6 a věty o determinantu součinu matic (věta 1.7, vlastnost (vi)) vyplývá důležitá vlastnost podobnostní transformace:

Věta 1.11. *Podobnostní transformace nemění hodnost ani determinant matice. (Podobné matice mají stejnou hodnost a stejnou hodnotu determinantu.)*

Nalezení kritéria podobnosti matic (podmínky nutné a postačující pro to, aby matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ byly podobné), které by umožnilo zjistit, zda zadané číselné matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou podobné či nikoliv, je problém, vybočující a rámce teorie číselných matic a bude proto řešen až v dalších odstavcích.

Poznámka: Vztah podobnosti matic je relací ekvivalence na množině čtvercových matic řádu n. (Dokažte.)

Cvičení 1.3

(1) Pomocí definice determinantu dokažte vlastnosti (i),(ii), (v) a (vii) ve větě 1.7.

Návod: Způsob vedení důkazů vlastností determinantů přímým výpočtem z definice ukážeme na příkladě vlastnosti (ii) ve větě 1.7. Uvažme matici $\mathbf{A} = (\alpha_i^j)$ řádu n. Podle definice je

$$\det \mathbf{A} = \epsilon^{1\ldots i\ldots j\ldots n}_{k_1\ldots k_i\ldots k_j\ldots k_n} \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_i^{k_i} \ldots \alpha_j^{k_j} \ldots \alpha_n^{k_n}$$

, $k_1, \ldots, k_n$ jsou sčítací indexy. Proveďme s maticí $\mathbf{A}$ elementární úpravu spočívající v přičtení κ-násobku j-tého řádku k i-tému. Vznikne matice $\mathbf{A}'$, která se od matice $\mathbf{A}$

liší i-tým řádkem: $\alpha_i^{k\prime} = \alpha_i^k + \kappa\alpha_j^k$ pro $k \in \{1,\dots,n\}$. Její determinant je

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{A}' =&\epsilon^{1\dots i\dots j\dots n}_{k_1\dots k_i\dots k_j\dots k_n}\alpha_1^{k_1\prime}\dots\alpha_i^{k_i\prime}\dots\alpha_j^{k_j\prime}\dots\alpha_n^{k_n\prime}\\
=&\epsilon^{1\dots i\dots j\dots n}_{k_1\dots k_i\dots k_j\dots k_n}\alpha_1^{k_1}\dots(\alpha_i^{k_i}+\kappa\alpha_j^{k_i})\dots\alpha_j^{k_j}\dots\alpha_n^{k_n}\\
=&\epsilon^{1\dots i\dots j\dots n}_{k_1\dots k_i\dots k_j\dots k_n}\alpha_1^{k_1}\dots\alpha_i^{k_i}\dots\alpha_j^{k_j}\dots\alpha_n^{k_n}+\\
&+\kappa\epsilon^{1\dots i\dots j\dots n}_{k_1\dots k_i\dots k_j\dots k_n}\alpha_1^{k_1}\dots\alpha_j^{k_i}\dots\alpha_j^{k_j}\dots\alpha_n^{k_n}\\
=&\det \mathbf{A}+\kappa\epsilon^{1\dots i\dots j\dots n}_{k_1\dots k_i\dots k_j\dots k_n}\alpha_1^{k_1}\dots\alpha_j^{k_i}\dots\alpha_j^{k_j}\dots\alpha_n^{k_n}
\end{aligned}$$

Výraz $\kappa\epsilon^{1\dots i\dots j\dots n}_{k_1\dots k_i\dots k_j\dots k_n}\alpha_1^{k_1}\dots\alpha_j^{k_i}\dots\alpha_j^{k_j}\dots\alpha_n^{k_n}$ o který se liší determinant matice $\mathbf{A}'$ od determinantu matice $\mathbf{A}$, je ovšem roven nule, neboť je součtem přes všechny permutace indexů 1 až n, a s každým součinem tvaru $\kappa\alpha_1^{k_1}\dots\alpha_j^{k_i}\dots\alpha_j^{k_j}$, obsahuje i součin $\kappa\alpha_1^{k_1}\dots\alpha_j^{k_j}\dots\alpha_j^{k_i}$, vzniklý záměnou indexů k_i a k_j. Záměnou indexů se však mění parita permutace, takže uvedené součiny jsou ve výrazu zastoupeny s opačnými znaménky $\epsilon^{1\dots i\dots j\dots n}_{k_1\dots k_i\dots k_j\dots k_n} = -\epsilon^{1\dots i\dots j\dots n}_{k_1\dots k_j\dots k_i\dots k_n}$.

(2) Proveďte důkazy vlastností determinantu (iv) a (viii) ve větě 1.10.

Návod: Při důkazu vlastnosti (iv) využijte skutečnosti, že libovolnou regulární matici lze zapsat jako součin konečného počtu elementárních matic. Vlastnost (viii) dokážete snadno, uvědomíte-li si, jak vypadá schodovitý tvar regulární matice a využijete-li vlastnosti (v).

(3) Určete počet všech minorů k-tého řádu matice $\mathbf{A}$ řádu n, $1 \le k \le n$.

Výsledek: Počet minorů k-tého řádu matice $\mathbf{A}$ je $\binom{n}{k}^2$.

(4) Dokažte větu 1.8 o rozvoji determinantu podle řádku (sloupce).

Návod: Důkaz proveďte pro případ rozvoje podle prvého řádku přímým výpočtem z definice determinantu:

$$\det \mathbf{A} = \epsilon^{12\dots n}_{k_1k_2\dots k_n}\alpha_1^{k_1}\dots\alpha_2^{k_2}\dots\alpha_n^{k_n}$$

Vytkněte postupně $\alpha_1^1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_1^n$ z těch členů součtu vyjadřujícího determinant, které daný prvek obsahují, tj.

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{A} =&\alpha_1^1\epsilon^{12\dots n}_{1\dots k_2\dots k_n}\alpha_2^{k_2}\dots\alpha_n^{k_n}+\alpha_1^2\epsilon^{12\dots n}_{2k_1k_3\dots k_n}\alpha_2^{k_1}\dots\alpha_3^{k_3}\dots\alpha_n^{k_n}+\dots\\
&\dots+\alpha_1^n\epsilon^{12\dots n}_{nk_1\dots k_{n-1}}\alpha_2^{k_1}\dots\alpha_n^{k_{n-1}}.
\end{aligned}$$

$[k_2,\dots,k_n]$ představuje permutace indexů $\{2,\dots,n\}$, $[k_1,k_3,\dots,k_n]$ permutace indexů $\{1,3,\dots,n\}$, atd., $[k_1,\dots,k_{n-1}]$ permutace indexů $\{1,2,\dots,n-1\}$. Na základě definice čísel $\epsilon^{1\dots n}_{k_1\dots k_n}$ ukažte, že j-tý z výrazů v závorkách, tj.

$$\epsilon^{12\dots n}_{jk_{j-1}k_{j+1}\dots k_n}\alpha_2^{k_1}\dots\alpha_j^{k_{j-1}}\alpha_{j+1}^{k_{j+1}}\dots\alpha_n^{k_n}$$

je $(-1)^{j-1}$-násobkem subdeterminantu matice $\mathbf{A}$, který vznikne vynecháním prvého řádku a j-tého sloupce. Pro rozvoj podle prvého řádku tedy tvrzení platí, neboť je $(-1)^{j-1} = (-1)^{j+1}$. Rozvoj podle libovolného i-tého řádku lze převést na rozvoj podle řádku prvého záměnou i-tého a prvého řádku. Jakým koeficientem je přitom třeba vynásobit výsledek? Doveďte úvahu do konce.

(5) V příkladu 6 vypište všechny matice, které odpovídají jednotlivým sledům elementárních úprav, tj. $\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_7$, $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_4$ a výsledné matice $\mathbf{U} = \mathbf{U}_7\mathbf{U}_6\mathbf{U}_5\mathbf{U}_4\mathbf{U}_3\mathbf{U}_2 2\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3\mathbf{V}_4$, které převádějí matici $\mathbf{A}$ na diagonální tvar $\mathbf{D}_\mathbf{A}$ vztahem $\mathbf{UAV} = \mathbf{D}_\mathbf{A}$. Matici $\mathbf{U}$ získáte tak, že s jednotkovou maticí provedete sled všech řádkových úptav, které byly prováděny s maticí $\mathbf{A}$. Provedením všech úprav sloupcových s maticí $\mathbf{E}$ získáte analogicky matici $\mathbf{V}$.

Výsledek:

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_5 = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 77 & -19 & 93 & 110 & -88 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{V}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 30/11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 30/11 \\ -2 & -6 & 1 & 3 & -70/11 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -35/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(6) Dokažte platnost vlastností inverzní matice, shrnutých ve větě 1.10.

Návod: Vyjděte vždy z definice inverzní matice a násobením definičního vztahu vhodnou maticí zleva resp. zprava dokažte danou vlastnost. Postup ukážeme na příkladě vlastností (i), (iii).

(i) Nechť $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ jsou dvě matice inverzní k matici $\mathbf{A}$. Pak $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$, $\mathbf{AC} = \mathbf{E}$, $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$, $\mathbf{CA} = \mathbf{E}$. Násobme například prvou rovnost maticí $\mathbf{C}$ zleva: $\mathbf{CAB} = \mathbf{C}$. Je však $\mathbf{CA} = \mathbf{E}$ a tedy $\mathbf{EB} = \mathbf{C}$, odkud $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

(iii) Označme $\mathbf{C}$ inverzní matici k součinu $\mathbf{AB}$. Pak platí $\mathbf{CAB} = \mathbf{E}$. Násobením zprava maticí $\mathbf{B}^{-1}$ dostaneme $\mathbf{CA} = \mathbf{B}^{-1}$. Dalším vynásobením zprava tentokrát maticí $\mathbf{A}$ máme $\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. Formulujte předpoklady, za kterých předchozí úpravy můžeme dělat.

(7) K zadaným maticím vypočtěte matice inverzní.

(a) $\mathbf{A}$ je matice z příkladu 6. Můžete využít výsledků úlohy (5) Cvičení 1.3? Zdůvodněte.

(b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{i} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{i} & 0 \\ \mathbf{i} & 1 & 2\mathbf{i} \\ 0 & -2\mathbf{i} & 3 \end{pmatrix}$

(d) $\mathbf{A}$ je matice z příkladu 7. Výpočet $\mathbf{A}^{-1}$ proveďte pomocí adjungované matice.

Výsledek: (a) V příkladu 6 je vypočten diágonální tvar matice $\mathbf{A}$, označený $\mathbf{D_A}$ a v úloze (5) Cvičení 1.3 matice $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, pro které $\mathbf{D_A} = \mathbf{UAV}$. Vypočtěte odtud $\mathbf{A}^{-1}$ násobením rovnosti vhodnými maticemi zleva a zprava.

(b) $\begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & 0 & 0 \\ 1/8 & 3/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{i}/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & \mathbf{i}/2 \end{pmatrix}$ (c) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3\mathbf{i} & -2 \\ 3\mathbf{i} & -3 & 2\mathbf{i} \\ -2 & 2\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$

(8) Dokažte následující tvrzení: Hodnost matice $\mathbf{A}$ typu m/n je dána nejvyšším řádem minorů, z nichž alespoň jeden je nenulový. Existuje-li tedy alespoň jeden minor p-tého řádu různý od nuly, zatímco všechny minory řádu $(p+1)$ jsou nulové, je hodnost matice rovna p.

(9) Přímým použitím vztahu 1.8 dokažte, že inverzní maticí k (regulární) dolní resp. horní trojúhelníkové matici je opět dolní resp. horní trojúhelníková matice.

(10) Z definice odvoďte vztah pro výpočet determinantu matice třetího řádu a ukažte, že vyhovuje následujícímu schematu výpočtu (Sarusovo pravidlo):

$$\det \mathbf{A} = \alpha_1^1\alpha_2^2\alpha_3^3 + \alpha_2^1\alpha_3^2\alpha_1^3 + \alpha_3^1\alpha_1^2\alpha_2^3 - \alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3^1 - \alpha_2^3\alpha_3^2\alpha_1^1 - \alpha_3^3\alpha_1^2\alpha_2^1$$

$$\begin{array}{ccc}
\alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\
\alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\
\alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \\
\alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\
\alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3
\end{array}$$

1.4 Příklady matic se speciálními vlastnostmi: unitární a samoadjungované matice

Samoadjungovanou matici jsme definovali již v odstavci 1.1 vztahem $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}*}$. Čtvercovou matici $\mathbf{A}$ nazveme unitární, platí-li $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}*}$. Je zřejmé, že unitárními mohou být pouze matice regulární. Uvažujeme-li o množině matic nad $\mathbb{R}$, přejde definiční rovnost na tvar $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ a hovoříme o matici ortogonální. Samoadjungovaná unitární matice resp. symetrická ortogonální matice je rovna své matici inverzní. Zkoumejme nyní vlastnosti unitárních matic:

(i) Platí $\det \mathbf{A}^{-1} = \det \mathbf{A}^{\mathbf{T}*} = (\det \mathbf{A}^{\mathbf{T}})^* = (\det \mathbf{A})^*$. (V případě matice ortogonální je $\det \mathbf{A}^{-1} = \det \mathbf{A}$.) Současně však $\det \mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1}$, odkud $(\det \mathbf{A})^* \det \mathbf{A} = 1$. Determinant unitární matice je tedy komplexní číslo s modulem rovným číslu 1, nad $\mathbb{R}$ dokonce $\det \mathbf{A} = \pm 1$.

(ii) Platí $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$, odtud pro unitární matici $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{E}$. Pro jednotlivé prvky pak dostáváme $\alpha_i^k \alpha_j^{k*} = \delta_{ij}$. Podobně ze vztahu $\mathbf{A}^{\mathbf{T}*}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ dostaneme $\alpha_k^{i*} \alpha_k^j = \delta^{ij}$. Jsou-li naopak splněny tyto vztahy, tj. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{E}$, $\mathbf{A}^{\mathbf{T}*}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, je podle (vi) ve větě 1.10 $\mathbf{A}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{A}^{-1}$. Vztahy

$$\alpha_i^k \alpha_j^{k*} = \delta_{ij} \qquad \alpha_k^{i*} \alpha_k^j = \delta^{ij} \qquad 1 \leq i, j \leq n \tag{1.17}$$

nazýváme relacemi ortogonality a můžeme pomocí nich snadno prověřit unitárnost matice $\mathbf{A}$. Nad $\mathbb{R}$ dostaneme odpovídající tvar relací ortogonality vypuštěním operace $*$.

Příklad 8:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & \mathbf{i}/\sqrt{2} & 0 \\ \mathbf{i}/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & \sqrt{2/3} & 0 \\ -1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & \sqrt{3}/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 & \mathbf{i}/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -\mathbf{i}/\sqrt{3} & -\mathbf{i}/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & \mathbf{i}/\sqrt{3} & -\mathbf{i}/\sqrt{3} \\ -\mathbf{i}/\sqrt{3} & \mathbf{i}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Matice $\mathbf{A}$ je nad $\mathbb{R}$ maticí ortogonální, nad $\mathbb{C}$ maticí unitární. Matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ jsou unitární. Prověřte tuto skutečnost a zapište odpovídající matice inverzní.

(iii) Nechť unitární matice **A** realizuje lineární transformaci souboru proměnných $(x^1, \ldots, x^n)$ k proměnným $(y^1, \ldots, y^n)$, $x^i, y^i \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Taková transformace má tvar

$$y^i = x^j \alpha^i_j, \qquad i \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow (y) = (x)\mathbf{A}$$

Po rozepsání

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1\alpha^1_1 + x^2\alpha^1_2 + \cdots + x^n\alpha^1_n \\ y^2 &= x^1\alpha^2_1 + x^2\alpha^2_2 + \cdots + x^n\alpha^2_n \\ \vdots &= \vdots \\ y^n &= x^1\alpha^n_1 + x^2\alpha^n_2 + \cdots + x^n\alpha^n_n \end{aligned}$$

Počítejme výraz $y^i y^{i*}$ sčítací index je i. Tento výraz můžeme vyjádřit v maticovém zápisu jako $(y)(y)^{\mathbf{T}*}$.

$$(y)(y)^{\mathbf{T}*} = (x)\mathbf{A}((x)\mathbf{A})^{\mathbf{T}*} = (x)\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}*}(x)^{\mathbf{T}*} = (x)\mathbf{E}(x)^{\mathbf{T}*}$$

tedy $\sum_{i=1}^n |y^i|^2 = y^i y^{i*} = x^i x^{i*} = \sum_{i=1}^n |x^i|^2$. Unitární transtormace tedy zachovává součet čtverců modulů proměnných. Geometrický význam této vlastnosti se ozřejmí v kapitole 4.

Kapitola 2

Polynomické matice (λ-matice)

V odstavci 1.3 jsme ponechali otevřenou otázku kritéria podobnosti číselných matic. Její vyřešení zasahuje do oblasti teorie tzv. polynomických matic, tj. takových, jejichž prvky nejsou čísla, nýbrž polynomy jedné proměnné λ. V následujícím textu se budeme teorií polynomických matic zabývat s cílem formulovat ono kritérium podobnosti. Úvahy se týkají matic čtvercových.

2.1 Ekvivalence λ-matic

Nechť $\mathbb{R}[\lambda]$, resp. $\mathbb{C}[\lambda]$, je množina polynomů jedné proměnné λ libovolného konečného stupně s reálnými resp. komplexními koeficienty s operacemi sčítání polynomů, násobení polynomu číslem a násobení polynomů, definovanými známým způsobem. Množiny $\mathbb{R}[\lambda]$, $\mathbb{C}[\lambda$ opatřené uvedenými operacemi mají strukturu tzv. komutativního okruhu (viz kapitola 2).

Polynomickou maticí $\mathbf{A}(\lambda)$ řádu n nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ rozumíme čtvercovou matici, jejíž prvky jsou polynomy z $\mathbb{R}[\lambda]$ resp. $\mathbb{C}[\lambda]$. Hovoříme též o λ-matici.

$$\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1(\lambda) & \dots & \alpha_1^n(\lambda) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^1(\lambda) & \dots & \alpha_n^n(\lambda) \end{pmatrix} \qquad \alpha_i^j(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda], \mathbb{C}[\lambda].$$

Vzhledem k uvedené algebraické struktuře množin $\mathbb{R}[\lambda]$, $\mathbb{C}[\lambda]$ lze definovat součet, $\phi(\lambda)$-násobek a součin λ-matic stejným způsobem jako u matic číselných $\phi(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda], \mathbb{C}[\lambda]$ se zachováním všech vlastností těchto operací, popsaných vztahy (1.1) a (1.2). Rovněž determinant a minory polynomické matice jsou definovány normálně stejně jako u matic číselných. Vzhledem k tomu zůstávají v platnosti věty o rozvojích (věta 1.8 a věta 1.9).

Elementárními úpravami polynomické matice rozumíme:

(i) vynásobení i-tého řádku (sloupce) číslem $\kappa \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ různým od nuly (Pozor: násobení řádku polynomem není elementární úprava),

(ii) přičtení j-tého řádku (sloupce) vynásobeného polynomem $\phi(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda], \mathbb{C}[\lambda]$ k i-tému řádku (sloupci).

Elementární matice, odpovídající těmto úpravám, mají tvar

$$
\mathbf{I}_n^{(i)}(\kappa) = \begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
& \ddots & & (i) & 0 & \\
& & 1 & \downarrow & & \\
& (i) & \rightarrow & \kappa & & \\
& & & & 1 & \\
& 0 & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{I}_m^{(ij)}(\phi(\lambda)) = \begin{pmatrix}
1 & & & & (j) & & \\
& \ddots & & & \downarrow & 0 & \\
& & 1 & & \phi(\lambda) & \leftarrow & (i) \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & 1 & & \\
& 0 & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

a zachází se s nimi opět stejně jako u číeelných matic, zpětné (inverzní) úpravy jsou opět elementárními úpravami a snadno bychom jistě zapsali tvar odpovídajících elementárních matic. Matice $\mathbf{A}(\lambda)$, $\mathbf{B}(\lambda)$ nazýváme ekvivalentními a značíme $\mathbf{A}(\lambda) \sim \mathbf{B}(\lambda)$, lze-li převést jednu v druhou konečným počtem elementárních úprav, tj. vyjádřit např. $\mathbf{B}(\lambda)$ ve tvaru $\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{U}(\lambda)\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{V}(\lambda)$, kde $\mathbf{U}(\lambda)$, $\mathbf{V}(\lambda)$ jsou konečné součiny elementárních matic.

Uvedená relace $\sim$ je skutečně ekvivalencí na množině $\mathcal{A}(\lambda)(n/n)$ polynomických matic řádu n. Číselné matice řádu n bylo možné převést elementárními úpravami na diagonální tvar $\mathbf{D}$, a to dokonce takový, že diagonální prvky byly rovny buď 1 nebo 0, tj. diag$\mathbf{D} = [1, \dots, 1, 0, \dots, 0]$. Říkejme takovému tvaru kanonický. Kanonický tvar lze považovat za „nejjednodušší" tvar všech ekvivalentních matic, tj. za jakéhosi reprezentanta celé třídy ekvivalentních matic. Nabízí se otázka, zda podobného reprezentanta mají i ekvivalentní λ-matice. Prošetřete nejprve možnost úpravy matice $\mathbf{A}(\lambda)$ na diagonální tvar, tj. matici, jejímiž diagonálními prvky jsou polynomy a nediagonální prvky jsou vesměs nulové. Uvažme třídu všech matic ekvivalentních dané matici $\mathbf{A}(\lambda)$. Vyloučíme triviální případ, kdy $\mathbf{A}(\lambda)$ je nulová matice a je tedy jediným reprezentantem příslušné třídy ekvivalence. (Nulovou matici považujeme za matici v kanonickém tvaru.) Označme jako $\mathbf{B}(\lambda)$ kteroukoliv z těch matic dané třídy ekvivalence, které mají v prvém řádku a prvém sloupci nenulový polynom nejnižšího stupně, jaký se v maticích dané třídy vůbec vyskytuje a který má u nejvyšší mocniny proměnné λ koeficient 1. (Zdůvodnění existence takové matice viz Cvičení 1.5.) Matice $\mathbf{B}(\lambda)$ má tedy tvar

$$
\mathbf{B}(\lambda) = \begin{pmatrix}
e_1(\lambda) & \beta_1^2(\lambda) & \dots & \beta_1^n(\lambda) \\
\beta_2^1(\lambda) & \beta_2^2(\lambda) & \dots & \beta_2^n(\lambda) \\
\vdots & & & \vdots \\
\beta_n^1(\lambda) & \beta_n^2(\lambda) & \dots & \beta_n^n(\lambda)
\end{pmatrix}
$$

Ukážeme, že všechny prvky prvého řádku i prvého sloupce jsou dělitelné polynomem $e_1(\lambda)$. Vyjádříme např. $\beta_1^j(\lambda)$ ve tvaru $\beta_1^j(\lambda) = e_1(\lambda)\phi(\lambda) + \psi(\lambda)$, kde $\phi(\lambda)$ je částečný podíl a $\psi(\lambda)$ zbytek po dělení; platí deg$\psi(\lambda) <$ deg$e_1(\lambda)$. Dále provedeme s maticí $\mathbf{B}(\lambda)$ elementární úpravu spočívající v odečtení násobku prvého sloupce od j-tého:

$$\mathbf{B}(\lambda) = \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & \dots & e_1(\lambda)\phi(\lambda) + \psi(\lambda) & \dots & \beta_1^n(\lambda) \\ \beta_2^1(\lambda) & \dots & \beta_2^j(\lambda) & \dots & \beta_2^n(\lambda) \\ \vdots & & & \vdots & \\ \beta_n^1(\lambda) & \dots & \beta_n^j(\lambda) & \dots & \beta_n^n(\lambda) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & \dots & \psi(\lambda) & \dots & \beta_1^n(\lambda) \\ \beta_2^1(\lambda) & \dots & \beta_2^j(\lambda) - e_1(\lambda)\phi(\lambda) & \dots & \beta_2^n(\lambda) \\ \vdots & & & \vdots & \\ \beta_n^1(\lambda) & \dots & \beta_n^j(\lambda) - e_1(\lambda)\phi(\lambda) & \dots & \beta_n^n(\lambda) \end{pmatrix}$$

Vzhledem k tomu, že stupeň zbytku $\psi(\lambda)$ je menší než stupeň dělitele $e_1(\lambda)$, je tvar poslední matice v rozporu s volbou matice $\mathbf{B}(\lambda)$ s výjimkou případu, kdy $\psi(\lambda) = 0$. Polynom $\beta_1^j(\lambda)$ je tedy beze zbytku dělitelný polynomem $e_1(\lambda)$. Stejně se úvaha provede pro prvky prvého sloupce $\beta_i^1(\lambda)$. Matici $\mathbf{B}(\lambda)$ lze pak vhodnými elementárními úpravami převést na tvar

$$\mathbf{B}(\lambda) = \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2^{2\prime}(\lambda) & \beta_2^{3\prime}(\lambda) & \dots & \beta_2^{n\prime}(\lambda) \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & \beta_n^{2\prime}(\lambda) & \beta_n^{3\prime}(\lambda) & \dots & \beta_n^{n\prime}(\lambda) \end{pmatrix} = \quad = \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{B}'(\lambda) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Je-li $\mathbf{B}'(\lambda)$ nulová matice, je úprava hotova. V opačném případě lze tytéž úvahy aplikovat na matici $\mathbf{B}'(\lambda)$ řádu $(n-1)$ a postupně tak převést matici $\mathbf{B}(\lambda)$ na tvar

$$\mathbf{B}(\lambda) \sim \mathbf{D}(\lambda) = \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & & & \\ & e_2(\lambda) & & 0 & & \\ & & \ddots & & & \\ & 0 & & e_p(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}, \quad p \leq n.$$

v jehož diagonále jsou polynomy s vedoucím koeficientem (tj. koeficientem u nejvyšší mocniny proměnné λ) rovným 1. Poslední nenulový z nich je označen $e_p(\lambda)$, $p \leq n$. Vyjádříme nyní například $e_2(\lambda)$ ve tvaru $e_2(\lambda) = e_1(\lambda)\phi(\lambda) + \psi(\lambda)$, deg$\psi(\lambda) <$ deg$e_1(\lambda)$ a provedeme následující elementární úpravy: Nejprve přičteme prvý řádek k druhému a poté odečteme $\phi(\lambda)$-násobek prvého sloupce od druhého.

$$\mathbf{B})\lambda) \sim \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_1(\lambda)\phi(\lambda)+\psi(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e_3(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e_n(\lambda) \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & -e_1(\lambda)\phi(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ e_1(\lambda) & \psi(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e_3(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

S výjimkou případu, kdy $\psi(lambda) = 0$, se opět dostáváme do sporu s volbou matice $\mathbf{B}(\lambda)$. Polynom $e_2(\lambda)$ je tedy dělitelný polynomem $e_1(\lambda)$. Úvahu lze pochopitelně zobecnit na další členy diagonály matice $\mathbf{D}(\lambda)$.

Popsaný postup elementárních úprav tedy zaručuje možnost převést matici $\mathbf{A}(\lambda)$ na tzv. kanonickou matici $\mathbf{D}(\lambda)$ následujécéch vlastností

(i) Matice $\mathbf{D}(\lambda)$ je diagonální, diag$\mathbf{D}(\lambda) = [e_1(\lambda), \dots, e_p(\lambda), 0, \dots, 0]$, $p \le n$.

(ii) Polynom $e_{i+1}(\lambda)$ je dělitelný polynomem $e_i(\lambda)$ pro $i \in \{1, \dots, p-1\}$.

(iii) Vedoucí koeficient každého z polynomů $e_i(\lambda)$ pro $i \in \{1, \dots, p\}$ je roven 1.

Každá třída ekvivalentních λ-matic tedy obsahuje alespoň jednu kanonickou matici. Zbývá vyřešit otázku jednoznačnosti. Předpokládejme, že v dané třídě ekvivalence, určené maticí $\mathbf{A}(\lambda)$, jsou dvě matice $\mathbf{D}_1(\lambda)$ a $\mathbf{D}_2(\lambda)$, pro něž označíme diag$\mathbf{D}_1(\lambda) = [e_1(\lambda), \dots, e_p(\lambda), 0, \dots, 0]$ a diag$\mathbf{D}_2(\lambda) = [f_1(\lambda), \dots, f_q(\lambda), 0, \dots, 0]$. Zřejmě je $\mathbf{D}_1(\lambda) \sim \mathbf{D}_2(\lambda)$, takže existují matice $\mathbf{U}(\lambda)$, $\mathbf{V}(\lambda)$ vyjádřené jako konečné součiny elementárních matic takové, že $\mathbf{D}_1(\lambda) = \mathbf{U}(\lambda)\mathbf{D}_2(\lambda)\mathbf{V}(\lambda)$. Především je jasné, že $p = q$ (zdůvodněte). Úpravy při převodu matice $\mathbf{D}_2(\lambda)$ na tvar $\mathbf{D}_1(\lambda)$ jsou tedy prováděny s prvými p řádky a sloupci. Důkaz tedy stačí provést pro matice řádu p, pro něž $e_i(\lambda) \neq 0$ pro $i \in \{1, \dots, p\}$, indukcí vzhledem k p. Pro $p = 1$ vyplývá z ekvivalence $(e_1(\lambda)) \sim (f_1(\lambda))$ okamžitě rovnost $e_1(\lambda) = f_1(\lambda)$ vzhledem k vlastnosti (iii) kanonických matic. Předpokládejme rovnost $\mathbf{D}_1(\lambda) = \mathbf{D}_2(\lambda)$ pro $(p-1)$ (indukční předpoklad). Pro p pak platí

$$\mathbf{D}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & \\ & \ddots & 0 & \\ & & e_{p-1}(\lambda) & \\ & 0 & & \\ & & & e_p(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & \\ & \ddots & 0 & \\ & & e_{p-1}(\lambda) & \\ & 0 & & \\ & & & f_p(\lambda) \end{pmatrix} = \mathbf{D}_2(\lambda)$$

a ze vztahu $\mathbf{D}_1(\lambda) = \mathbf{U}(\lambda)\mathbf{D}_2(\lambda)\mathbf{V}(\lambda)$ vyplývá $\det \mathbf{D}_1 = \det \mathbf{U} \det \mathbf{D}_2 \det \mathbf{V}$. Poněvadž determinanty matic $\mathbf{U}(\lambda)$, $\mathbf{V}(\lambda)$ jsou číselné a nenulové, máme $e_1(\lambda) \dots e_{p-1}(\lambda) e_p(\lambda) = \kappa e_1(\lambda) \dots e_{p-1}(\lambda) f_p(\lambda) \Rightarrow e_p(\lambda) = \kappa f_p(\lambda)$. Polynomy $e)p(\lambda)$ a $f_p(\lambda)$ však mají stéjný vedoucí koeficient, takže $\kappa = 1$ a $e_p(\lambda) = f_p(\lambda)$. Na základě dosavadních úvah můžeme vyslovit následující tvrzení:

Věta 2.1. *Každá λ-matice je ekvivalentní právě jedné kanonické matici.*

Polynomy $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_n(\lambda)$ jsou charakteristické pro danou třídu ekvivalentních λ-matic a nazýváme je invariantními faktory dané třídy ekvivalence. Číslo p, pro něž $e_p(\lambda) \neq 0$, $e_{p+1}(\lambda) = \ldots = e_n(\lambda) = 0$, nazývámé hodností motice, resp. hodností dané třídy ekvivalentních matic.

Uvedeme ještč jinou metodu výpočtu invariantních faktorů, která je ve srovnání s metodou elementárních úprav velmi účinná zejména pro matice nižších řádů ($n \leq 4$) a v případech, kdy matice obsahuje větší množství nulových prvků. Je založena na výpočtech minorů matice $\mathbf{A}(\lambda)$.

Věta 2.2. *Nechť $\mathbf{A}(\lambda)$ je matice řádu n a hodnosti $p \leq n$. Pro $1 \leq k \leq n$ označme jako $d_k(\lambda)$ největšího společného dělitele všech minorů k-tého řádu matice $\mathbf{A}(\lambda)$, jehož vedoucí koeficient je 1. Soubor polynomů $d_1(\lambda), \ldots, d_p(\lambda)$ je matici $\mathbf{A}(\lambda)$ určen jednoznačně, jinak klademe $d_{p+1}(\lambda) = \ldots = d_n(\lambda) = 0$. Polynomy $d_k(\lambda)$ se nemění elementárními úpravami matice $\mathbf{A}(\lambda)$.*

Důkaz: Důkaz tohoto tvrzení je založen na chování determinantů matic při elementárních úpravách a bude proveden v rámci Cvičení 1.5. Z věty 1.13 vyplývá, že kanonická matice dané třídy ekvivalence má stejný systém polynomů $d_1(\lambda), \ldots, d_n(\lambda)$ jako všechny matice náležející dané třídě. U kanonické matice však lze $d_1(\lambda), \ldots, d_n(\lambda)$ snadno určit. Nechť $\mathbf{D}(\lambda)$ je kanonická matice, $\operatorname{diag}\mathbf{D}(\lambda) = [e_1(\lambda), \ldots, e_p(\lambda), 0, \ldots, 0]$. Pak $d_1(\lambda) = e_1(\lambda)$, $d_2(\lambda) = e_1(\lambda)e_2(\lambda)$, ..., $d_p(\lambda) = e_1(\lambda)e_2(\lambda)\ldots e_p(\lambda)$, $d_{p+1}(\lambda) = \ldots = d_n(\lambda) = 0$. Odtud je zřejmý způsob výpočtu invariantních faktorů dané matice $\mathbf{A}(\lambda)$

$$e_1(\lambda) = d_1(\lambda), \quad e_i(\lambda) = \frac{d_i(\lambda)}{d_{i-1}(\lambda)} \quad 2 \leq i \leq p, e_{p+1}(\lambda) = \ldots e_n(\lambda) = 0,$$

kde $d_1(\lambda), \ldots, d_n(\lambda)$ je soubor největších společných dělitelů minorů prvého až n-tého řádu matice $\mathbf{A}(\lambda)$. Většinou je vhodné obě metody výpočtu invariantních faktorů kombinovat tak, že pomocí elementárních úprav matici $\mathbf{A}(\lambda)$ co nejvíce zjednodušíme a pak zjišťujeme systém $d_1(\lambda), \ldots, d_n(\lambda)$.

$\diamond$

Příklad 1: Matice $\mathbf{A}(\lambda)$ třetího řádu je zadána takto:

$$\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 - 12\lambda + 16 & 2 - \lambda & 2\lambda^2 - 12\lambda + 17 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 7 & 2 - \lambda & \lambda^2 - 6\lambda + 8 \end{pmatrix}$$

Najdeme její kanonický tvar oběma metodami.

(a) Elementární úpravy:

$$\mathbf{A}(\lambda)=\begin{pmatrix}2\lambda^2-12\lambda+16 & 2-\lambda & 2\lambda^2-12\lambda+17\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ \lambda^2-6\lambda+7 & 2-\lambda & \lambda^2-6\lambda+8\end{pmatrix}\overset{\mathbf{U}_1(\lambda)}{\sim}$$

$$\overset{\mathbf{U}_1(\lambda)}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -(2-\lambda) & 1\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ \lambda^2-6\lambda+7 & 2-\lambda & \lambda^2-6\lambda+8\end{pmatrix}\overset{\mathbf{U}_2(\lambda)}{\sim}$$

$$\overset{\mathbf{U}_2(\lambda)}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -(2-\lambda) & 1\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ \lambda^2-6\lambda+9 & 2-\lambda & \lambda^2-6\lambda+9\end{pmatrix}\overset{\mathbf{V}_1(\lambda)}{\sim}$$

$$\overset{\mathbf{V}_1(\lambda)}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -2+\lambda & 1\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-3)^2\end{pmatrix}\overset{\mathbf{V}_2(\lambda)}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-3)^2\end{pmatrix}=\mathbf{D}(\lambda)$$

(b) Výpočet systému $d_1(\lambda),\dots,d_n(\lambda)$: Matice $\mathbf{A}(\lambda)$ obsahuje nesoudělné minory prvého řádu $(2-\lambda)$ a $(3-\lambda)$. Proto je $d_1(\lambda)=1$. Vypočteme-li všechny minory druhého řádu (proveďte), zjistíme, že $d_2(\lambda)=\lambda-3$; $d_3(\lambda)$ je determinant matice $\mathbf{A}(\lambda)$ vydělený vedoucím koeficientem, tj. $d_33(\lambda)=(\lambda-3)^3$. Odtud $e_1(\lambda)=d_1(\lambda)=1$, $e_2(\lambda)=\lambda-3$, $e_3(\lambda)=(\lambda-3)^2$, což souhlasí s výpočtem kanonického tvaru matice $\mathbf{A}(\lambda)$ elementárními úpravami.

Cvičení 2.1

(1) Zapište tvar elementárních matic pro sloupcové elementární úpravy. Pomocí dané matice $\mathbf{A}(\lambda)$ a elementárních matic zapište matici $\mathbf{B}(\lambda)$ po provedené elementární úpravě.

(2) Pro konstrukci kanonického tvaru matice $\mathbf{A}(\lambda)$ jsme zvolili takovou matici $\mathbf{B}(\lambda)$ z dané třídy ekvivalence určené maticí $\mathbf{A}(\lambda)$, v jejímž prvém řádku a sloupci byl nenulový polynom $e_1(\lambda)$ nejnižšího možného stupně. Ukažte, že zatímco při výběru matice $\mathbf{B}(\lambda)$ je přípustná jistá libovůle, je samotný polynom $e_1(\lambda)$ určen jednoznačně.

Návod: Vyjděte z předpokladu, že existuje polynom $f_1(\lambda)$ téhož stupně jako $e_t(\lambda)$, který se vyskytuje (i) ve zvolené matici $\mathbf{B}(\lambda)$, (ii) v jiné matici $\mathbf{C}(\lambda)$ náležející téže třídě ekvivalence, tj. $\mathbf{C}(\lambda)\sim\mathbf{B}(\lambda)$. Ukažte, že $e_1(\lambda)=f_1(\lambda)$. Tvrzení úlohy (2) lze ovšem také považovat za triviální důsledek věty 1.12.

(3) Dokažte větu 1.13.

Návod: Označte $\mathbf{A}(\lambda)$ původní matici, $\mathbf{A}'(\lambda)$ matici získanou z $\mathbf{A}(\lambda)$ například přičtením $\phi(\lambda)$-násobku j-tého řádku k i-tému, $i\neq j$, $d_k(\lambda)$ resp. $d'_k(\lambda)$ nechť je největší společný dělitel minorů k-tého řádu matice $\mathbf{A}(\lambda)$ resp. $\mathbf{A}'(\lambda)$. Rozlište tyto možnosti při výpočtu minorů $M(\lambda)$, $M'(\lambda)$ definovaných řádkovými indexy $i_1,\dots,i_k$ a sloupcovými indexy $j_1,\dots,j_k$:

(i) existují $p, q \in \{1, \dots, k\}$ tak, že $i = i_p$, $j = i_q$, tj. vybraný minor obsahuje prvky i-tého i j-tého řádku. Jaký je vztah mezi $M(\lambda)$ a $M'(\lambda)$?

(ii) $i \notin \{i_1, \dots, i_k\}$; opět určete vztah mezi $M(\lambda)$ a $M'(\lambda)$.

(iii) $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$, takže minor obsahuje prvky i-tého řádku, nikoliv však prvky řádku j-tého.

$$M = \det \begin{pmatrix} \alpha_{i_1}^{j_1} & \dots & \alpha_{i_1}^{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i}^{j_1} & \dots & \alpha_{i}^{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_k}^{j_1} & \dots & \alpha_{i_k}^{j_k} \end{pmatrix}$$

$$M' = \det \begin{pmatrix} \alpha_{i_1}^{j_1} & \dots & \alpha_{i_1}^{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i}^{j_1} + \phi(\lambda)\alpha_{j}^{j_1} & \dots & \alpha_{i}^{j_k} + \phi(\lambda)\alpha_{j}^{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_k}^{j_1} & \dots & \alpha_{i_k}^{j_k} \end{pmatrix}$$

Podle věty o rozvoji determinantu dostaneme rozvojam minoru $M'(\lambda)$ podle i-tého řádku vztah

$$M'(\lambda) = M(\lambda) + \phi(\lambda)N(\lambda),$$

kde $N(\lambda)$ je minorem matice $\mathbf{A}(\lambda)$, který se od minoru $M(\lambda)$ liší tím, že na i-té pozici obsahuje prvky j-tého řádku:

$$M' = \det \begin{pmatrix} \alpha_{i_1}^{j_1} & \dots & \alpha_{i_1}^{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i}^{j_1} & \dots & \alpha_{i}^{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_k}^{j_1} & \dots & \alpha_{i_k}^{j_k} \end{pmatrix} + \phi(\lambda) \det \begin{pmatrix} \alpha_{i_1}^{j_1} & \dots & \alpha_{i_1}^{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{j}^{j_1} & \dots & \alpha_{j}^{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i_k}^{j_1} & \dots & \alpha_{i_k}^{j_k} \end{pmatrix} = M + \phi N$$

Ukažte, že z rovnosti $M'(\lambda) = \phi(\lambda)N(\lambda) + M(\lambda)$ vyplývá, že $d_k(\lambda)$ je dělitelem minoru $M'(\lambda)$. Zdůvodněte fakt, že také $d'_k(\lambda)$ je dělitelem minoru $M(\lambda)$. Jakým způsobem vyvodíte z těchto skutečností rovnost $d_k(\lambda) = d'_k(\lambda)$?

(4) V příkladu 9 vypište jednotlivé sledy elementárních úprav a odpovídající matice $\mathbf{U}_1 1(\lambda)$, $\mathbf{U}_2(\lambda)$ a $\mathbf{V}_1(\lambda)$, $\mathbf{V}_2(\lambda)$ a prověřte, že $\mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{U}(\lambda)\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{V}(\lambda)$.

Výsledek:

(i) odečtení dvojnásobku třetího řádku od prvého

(ii) přičtení prvého řádku k třetímu

(iii) odečtení třetího sloupce od prvého

(iv) odečtení prvého sloupce od třetího a přičtení $(2-\lambda)$-násobku prvého sloupce k druhému.

Úpravám (i) až (iv) odpovídají tyto matice:

$$\mathbf{U}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{U}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{V}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_2(\lambda)\mathbf{U}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{V}_1(\lambda)\mathbf{V}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 2 \end{pmatrix}$$

(5) Určete kanonické tvary následujících polynomických matic oběma metodami, tj. pomocí elementárních úprav i výpočtem systému $d_(\lambda), \ldots, d_n(\lambda)$.

$$\mathbf{A}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 3\lambda^2-2\lambda+1 & 2\lambda^2+\lambda-1 & 3\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda-1 \\ 2\lambda^3-2\lambda & \lambda^2-1 & 2\lambda^3+\lambda^2-2\lambda-1 \\ 5\lambda^3-4\lambda+1 & 3\lambda^2+\lambda-2 & 5\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4(\lambda) = \begin{pmatrix} -16-\lambda & -17 & 87 & -108 \\ 8 & 9-\lambda & -42 & 54 \\ -3 & -3 & 16-\lambda & -18 \\ -1 & -1 & 6 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

Výsledek:

$$\mathbf{D}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda^2 - 10\lambda - 3) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda+1)(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & (\lambda-1)^4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_4(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+2) \end{pmatrix}$$

(6) Dokažte, že determinanty polynomických matic se řídí pravidly (i) až (vii), formulovanými ve větě 1.7. pro matice číselné. Ukažte také, že determinant se nemění přičtením $\phi(\lambda)$-násobku j-tého řádku (sloupce) k i-tému.

Návod: Důkaz vlastností (i), (ii), (v), (vii) vyplývá přímo z definice determinantu, přitom formulaci vlastnosti (ii) lze zobecnit tak, že místo κ-násobku j-tého řádku (sloupce) přičítáme k i-tému řádku (sloupci) $\phi(\lambda)$-násobek j-tého řádku (sloupce). Vlastnost (iii) je důsledkem (i); (ii) a (iv) vyplývá z (i) až (iii) s uvážením skutečnosti, že číselná regulární matice je součinem elementárních číselných matic. Ukažte, že vlastnost (iv) lze zobecnit na případ, kdy $\mathbf{Q}$ je součinem elementárních polynomických matic. Důkaz vlastnosti (vi) je souběžný s důkazem ve větě 1.7.

2.2 Unimodulární matice, kritérium ekvivalence λ-matic

Polynomickou matici nazveme unimodulární, je-li ekvivalentní jednotkové matici, tj. jsou-li všechny její invariantní faktory rovny 1. Typickým příkladem unimodulárních matic jsou matice elementární. Z definice vyplývají následující vlastnosti unimodulárních matic.

Věta 2.3. *Vlastnosti unimodulárních matic.*

(i) Matice $\mathbf{U}(\lambda)$ je unimodulární právě tehdy, je-li jejím determinantem nenulové číslo $\delta \in \mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$.

(ii) Libovolná regulární číselná matice je unimodulární.

(iii) Součin unimodulárních matic je unimodulární matice.

(iv) *Matice* $\mathbf{U}(\lambda)$ *je unimodulární právě tehdy, jestliže existuje polynomická matice* $V(\lambda)$ *taková, že platí* $\mathbf{U}(\lambda)\mathbf{V}(\lambda) = \mathbf{V}(\lambda)\mathbf{U}(\lambda) = \mathbf{E}$. *Matice* $\mathbf{V}(\lambda)$ *je pak rovněž unimodulární a nazýváme ji inverzní maticí k* $\mathbf{U}(\lambda)$. *Značíme* $\mathbf{V}(\lambda) = \mathbf{U}^{-1}(\lambda)$.

(v) *Matice* $\mathbf{U}(\lambda)$ *je unimodulární právě tehdy, je-li možné ji vyjádřit jako součin konečného počtu elementárních* λ*-matic.*

Díky vlastnosti (v) ve větě 1.14 můžeme nyní přeformulovat kritérium ekvivalence λ-matic takto:

Věta 2.4. *Kritérium ekvivalence h -matic. Polynomické matice* $\mathbf{A}(\lambda)$ *a* $\mathbf{B}(\lambda)$ *jsou ekvivalentní právě tehdy, když existují unimodulární matice* $\mathbf{U}(\lambda)$ *a* $\mathbf{V}(\lambda)$ *takové, že platí* $\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{U}(\lambda)\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{V}(\lambda)$.

Cvičení 2.2

(1) Dokažte vlastnosti unimodulárních matic ve větě 1.14.

Návod: Při důkazu vlastnosti (i) vyjděte ze skutečnosti, že invariantní faktory unimodulární matice $\mathbf{U}(\lambda)$ musí být stejné jako invariantní faktory jednotkové matice. V případě vlastnosti (iii) užijte vztahu pro determinant součinu matic. Postup při důkazu vlastnosti (iv): Za předpokladu existence λ-matice $\mathbf{U}^{-1}(\lambda)$ s vlastností $\mathbf{U}(\lambda)\mathbf{U}^{-1}(\lambda) = \mathbf{U}^{-1}(\lambda)\mathbf{U}(\lambda) = \mathbf{E}$ vyplývá unimodulárnost matice $\mathbf{U}(\lambda)$ z pravidla pro determinant součinu matic (ze vztahu $\det \mathbf{U}(\lambda) \det \mathbf{U}^{-1}(\lambda) = \det \mathbf{E}$ je zřejmé, že determinanty matic $\mathbf{U}(\lambda)$ a $\mathbf{U}^{-1}(\lambda)$ jsou polynomy stupně nula). Vyjdeme-li naopak z předpokladu, že $\mathbf{U}(\lambda)$ je unimodulární, můžeme ji převést na jednotkovou matici pouze řádkovými resp. pouze sloupcovými elementárními úpravami. Existují tedy konečné součiny elementárních matic $\mathbf{V}(\lambda)$ a $\mathbf{W}(\lambda)$ takové, že $\mathbf{E} = \mathbf{V}(\lambda)\mathbf{U}(\lambda) = \mathbf{U}(\lambda)\mathbf{W}(\lambda)$. Stačí už jen ukázat, že $\mathbf{V}(\lambda) = \mathbf{W}(\lambda)$. Vlastnost (v) je zřejmá z ekvivalence $\mathbf{U}(\lambda) \sim \mathbf{E}$.

(2) Dokažte větu 1.15: Důkaz vyplývá bezprostředně z definice ekvivalence matic a vlastností unimodulárních matic.

(3) Prověřte, zda zadané matice jsou unimodulární, v kladném případě určete odpovídající matici inverzní a matice $\mathbf{U}(\lambda)$, $\mathbf{V}(\lambda)$, které danou matici převádějí na kanonický tvar. Poznámka: $\mathbf{U}(\lambda)$ a $\mathbf{V}(\lambda)$ nejsou pochopitelně určeny jednoznačně.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3 + 5 \\ \lambda^2 - \lambda - 4 & \lambda^4 - \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 + \mathbf{i}\lambda & -\mathbf{i}\lambda^3 + (1 + 2\mathbf{i})\lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ 1 & -\mathbf{i}\lambda + 2\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

Výsledek: Ve výsledcích je uveden determinant matice $\mathbf{A}$, u unimodulárních matic matice inverzní a příklad možné volby matic $\mathbf{U}(\lambda)$ a $\mathbf{V}(\lambda)$, pro něž je $\mathbf{E} = \mathbf{U}(\lambda)\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{V}(\lambda)$.

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{A}_1 &= 20 \\
\mathbf{A}_1^{-1} &= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} \lambda^4 - \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 5 & -\lambda^3 - 5 \\ -\lambda^2 + \lambda + 4 & \lambda \end{pmatrix} \\
\mathbf{U}(\lambda) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\lambda - 1) & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{20}(-\lambda^2 + \lambda + 4) & \frac{1}{20}\lambda \end{pmatrix} \\
\mathbf{V}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & -\lambda^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\det \mathbf{A}_2 &= -1 \\
\mathbf{A}_2^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{i}\lambda - 2\mathbf{i} & 1 \\ -\mathbf{i}\lambda^3 + (1 + 2\mathbf{i})\lambda^2 - 2\mathbf{i} + 1 & -\lambda^2 - \mathbf{i}\lambda \end{pmatrix} \\
\mathbf{U} &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \\
\mathbf{V} &= \begin{pmatrix} 1 & -\lambda^2 - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.3 Maticové polynomy

Polynomické matice lze zapisovat ještě jiným způsobem, často velmi užitečným zejména při praktických výpočtech i při některých důkazech. Jedná se o zápis ve tvaru tzv. maticových polynomů: Nechť $\mathbf{A}_k \neq 0$, $\mathbf{A}_{k-1}, \ldots, \mathbf{A}_0$ jsou číselné matice řádu n nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ a λ je proměnná. Matici

$$\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{A}_k\lambda^k + \mathbf{A}_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + \mathbf{A}_O$$

nazýváme maticovým polynomem řádu n nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$, číslo k je stupeň polynomu. Každou λ-matici lze zapsat ve tvaru maticového polynomu a naopak, každý maticový polynom definuje λ-matici. Vztah je vzájemně jednoznačný.

Příklad 2:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 8\mathbf{i}\lambda^3 + 3\lambda & -2\lambda^2 + 2\lambda - \mathbf{i} & 0 \\ 3 & -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 12 & 4 \\ \lambda & -\mathbf{i}\lambda^2 - 4\lambda & \lambda^3 + \lambda^2 + \mathbf{i}\lambda \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8\mathbf{i} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{i} & 1 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & \mathbf{i} \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} & 0 \\ 3 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Většina pravidel pro počítání s polynomy se přenáší i na polynomy maticové. Vyplývá to z algebraické struktury množiny polynomů a množiny polynomických matic (viz kapitola 2). Výjimku tvoří nekomutativnost násobení maticových polynomů a skutečnost, že pro maticové polynomy z rovnosti $\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{0}$ nevyplývá, že $\mathbf{A}(\lambda) = 0$ nebo $\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{0}$. Pro maticové polynomy je definována i operace dělení: Nechť $\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{A} + k\lambda^k + \ldots + \mathbf{A}_0$,

$\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{B}_m\lambda^m + \ldots + \mathbf{B}_0$ jsou maticové polynomy nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ řádu n , $k = \deg\mathbf{A}(\lambda)$, $m = \deg\mathbf{B}(\lambda)$. Nechť $\mathbf{B}_m$ je regulární matice. Pak nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ existují jednoznačně λ-matice $\mathbf{Q}_\mathrm{P}(\lambda)$, $\mathbf{Q}_\mathrm{L}(\lambda)$, $\mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda)$, $\mathbf{R}_\mathrm{L}(\lambda)$ s vlastnostmi

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{Q}_\mathrm{P}(\lambda)\mathbf{B}(\lambda) + \mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda) & \deg\mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda) < \deg\mathbf{B}(\lambda) \\ \mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{B}(\lambda)\mathbf{Q}_\mathrm{L}(\lambda) + \mathbf{R}_\mathrm{L}(\lambda) & \deg\mathbf{R}_\mathrm{L}(\lambda) < \deg\mathbf{B}(\lambda) \end{array} \tag{2.1}$$

Matice $\mathbf{Q}_\mathrm{P}(\lambda)$ resp. $\mathbf{Q}\mathrm{L}(\lambda)$ nazýváme pravým resp. levým částečným podílem a matice $\mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda)$ resp. $\mathbf{R}\mathrm{L}(\lambda)$ pravým resp. levým zbytkem při dělení matice $\mathbf{A}(\lambda)$ maticí $\mathbf{B}(\lambda)$. Přímý výpočet podílů a zbytků při dělení matice $\mathbf{A}(\lambda)$ maticí $\mathbf{B}(\lambda)$ je poměrně pracný. Je-li však $\mathbf{B}(\lambda)$ polynom stupně 1, pak pro zbytek $\mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda)$ resp. $\mathbf{R}_\mathrm{L}(\lambda)$ můžeme získat explicitní vyjádření přímo pomocí maticových koeficientů $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_j$, $0 \le i \le k$, $0 \le jle1$ matic $\mathbf{A}(\lambda)$, $\mathbf{B}(\lambda)$ velmi jednoduchým a elegantním způsobem: Mějme λ-matici $\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{A}_k\lambda^k + \ldots + \mathbf{A}_0$ nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ a číselnou matici $\mathbf{C}$ téhož řádu n. Pak jsou definovány výrazy $\mathbf{A}_\mathrm{L}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^k\mathbf{A}_k + \mathbf{C}^{k-1}\mathbf{A}_{k-1} + \ldots + \mathbf{C}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0$ resp. $\mathbf{A}_\mathrm{P}(\mathbf{C}) = \mathbf{A}_k\mathbf{C}^k + \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{C}^{k-1} + \ldots + \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{A}_0$, které jsou číselnými maticemi řádu n. Nazýváme je levou resp. pravou hodnotou λ-matice $\mathbf{A}(\lambda)$ v (maticovém) argumentu $\mathbf{C}$. Obecně je pochopitelně $\mathbf{A}_\mathrm{P}(\mathbf{C}) \neq \mathbf{A}_\mathrm{L}(\mathbf{C})$. Zapišme nyní vztahy (1.9) pro případ, že $\deg\mathbf{B}(\lambda) = 1$, tj. $\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{B}_1\lambda + \mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}$ je regulární matice:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{Q}_\mathrm{P}(\lambda)(\mathbf{B}_1\lambda + \mathbf{B}_0) + \mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda) & \deg\mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda) = 0 \vee \mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda) = 0 \\ \mathbf{A}(\lambda) = (\mathbf{B}_1\lambda + \mathbf{B}_0)\mathbf{Q}_\mathrm{L}(\lambda)(\mathbf{B}_1\lambda + \mathbf{B}_0) + \mathbf{R}_\mathrm{L}(\lambda) & \deg\mathbf{R}_\mathrm{L}(\lambda) = 0 \vee \mathbf{R}_\mathrm{L}(\lambda) = 0 \end{array}$$

Přímým dosazením do těchto vztahů, v nichž ovšem také $\mathbf{Q}_\mathrm{P}(\lambda)$ a $\mathbf{Q}_\mathrm{L}(\lambda)$ zapíšeme ve tvaru maticových polynomů, se přesvědčíme, že

$$\mathbf{R}_\mathrm{P} = \mathbf{A}_\mathrm{P}(-\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_0), \quad \mathbf{R}_\mathrm{L}\mathbf{A}_\mathrm{L}(-\mathbf{B}_0\mathbf{B}_1^{-1}). \tag{2.2}$$

Cvičení 2.3

(1) Sestavte libovolné polynomické matice nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ zapište je ve tvaru maticových polynomů. Naopak libovolně zvolené maticové polynomy vyjádřete ve tvaru polynomických matic.

(2) Formulujte všechna známá pravidla pro počítání s polynomy a prověřte jejich platnost pro případ polynomů maticových.

(3) Volbou vhodného příkladu ukažte, že z rovnosti $\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{0}$ pro λ-matice nevyplývá nutně závěr $\mathbf{A}(\lambda) = 0$ nebo $\mathbf{B}(\lambda) = 0$. Jaké závěry o maticích $\mathbf{A}(\lambda)$, $\mathbf{B}(\lambda)$ lze na základě této rovnosti učinit?

(4) Dokažte platnost vztahů (1.9).

Návod: Vezměte v úvahu například vztah pro podíl zprava $\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{Q}_\mathrm{P}(\lambda)\mathbf{B}(\lambda) + \mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda)$. Vyjádřete všechny λ-matice ve tvaru maticových polynomů, tj. $\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{A}^k\lambda^k + \ldots + \mathbf{A}_0$

$\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{B}^m\lambda^m + \ldots + \mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_m$ je regulární, $\mathbf{Q}_\mathrm{P}(\lambda) = \mathbf{Q}_s\lambda^s + \ldots + \mathbf{Q}_0$, $\mathbf{Q}_s \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda) = \mathbf{R}_l\lambda^l + \ldots + \mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_l \neq \mathbf{0}$, $l < m$ a vypočtěte pravou stranu rovnosti:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_\mathrm{P}(\lambda)\mathbf{B}(\lambda) + \mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda) &= (\mathbf{Q}_s\lambda^s + \ldots + \mathbf{Q}_0)(\mathbf{B}_m\lambda^m + \ldots + \mathbf{B}_0) + \mathbf{R}_l\lambda^l + \ldots + \mathbf{R}_0 = \\ &= (\mathbf{Q}_s\mathbf{B}_m)\lambda^{s+m} + (\mathbf{Q}_s\mathbf{B}_{m-1}\mathbf{Q}_{s-1}\mathbf{B}_m)\lambda^{s+m-1} + \ldots + (\mathbf{Q}_1\mathbf{B}_0 + \mathbf{Q}_0\mathbf{B}_1)\lambda + \mathbf{Q}_0\mathbf{B}_0 + \\ &\qquad + \mathbf{R}_l\lambda^l + \ldots + \mathbf{R}_0\end{aligned}$$

Uspořádejte podle mocnin proměnné λ. Porovnáním koeficientů maticových polynomů $\mathbf{A}(\lambda)$ a $\mathbf{Q}_\mathrm{P}(\lambda)\mathbf{B}(\lambda) + \mathbf{r}\}P(\lambda)$ odvoďte explicitní výrazy pro koeficienty polynomů $\mathbf{Q}_\mathrm{P}(\lambda)$ a $\mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda)$. Ukažte, že $k = s + m$.

Výsledek: Pro $k < m$ je $\mathbf{Q}_\mathrm{P}(\lambda) = 0$ a $\mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda) = \mathbf{A}(\lambda)$. Pro $k \geq m$:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{k-m} &= \mathbf{A}_k\mathbf{B}_m^{-1}, \\ \mathbf{Q}_{k-m-1} &= (\mathbf{A}_{k-1} - \mathbf{Q}_{k-m}\mathbf{B}_{m-1})\mathbf{B}_m^{-1} \\ \mathbf{Q}_{k-m-2} &= (\mathbf{A}_{k-2} - \mathbf{Q}_{k-m-1}\mathbf{B}_{m-1} - \mathbf{Q}_{k-m}\mathbf{B}_{m-2})\mathbf{B}_m^{-1} \\ &\vdots \\ \mathbf{Q}_0 &= (\mathbf{A}_{k-m} - \mathbf{Q}_1\mathbf{B}_{m-1} - \mathbf{Q}_2\mathbf{B}_{m-2} - \ldots - \mathbf{Q}_{m-1}\mathbf{B}_1 - \mathbf{Q}_m\mathbf{B}_0)\mathbf{M}_m^{-1}; \\ \mathbf{R}_0 &= \mathbf{A}_0 - \mathbf{Q}_0\mathbf{B}_0 \\ \mathbf{R}_1 &= \mathbf{A}_1 - \mathbf{Q}_1\mathbf{B}_0 - \mathbf{Q}_0\mathbf{B}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{R}_{m-1} &= \mathbf{A}_{m-1} - \mathbf{Q}_{m-1}\mathbf{B}_0 - \mathbf{Q}_{m-2}\mathbf{B}_1 - \ldots - \mathbf{Q}_0\mathbf{B}_{m-1}\end{aligned}$$

Tímto postupem je dokázána existence i jednoznačnost pravého podílu a zbytku po dělení matice $\mathbf{A}(\lambda)$ maticí $\mathbf{B}(\lambda)$. Samotnou jednoznačnost lze dokázat velmi jednoduše také takto: Předpokládejte, že existují λ-matice $\mathbf{Q}_\mathrm{P}(\lambda)$, $\mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda)$, $\mathbf{Q}'_\mathrm{P}(\lambda)$, $\mathbf{R}'_\mathrm{P}(\lambda)$ tak, že $\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{Q}_\mathrm{P}(\lambda)\mathbf{B}(\lambda) + \mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda)$ $\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{Q}'_\mathrm{P}(\lambda)\mathbf{B}(\lambda) + \mathbf{R}'_\mathrm{P}(\lambda)$ Odečtěte obě rovnosti a na základě vztahu stupně dělitele a zbytku ukažte, že matice $\mathbf{Q}_\mathrm{P}(\lambda) - \mathbf{Q}'_\mathrm{P}(\lambda)$ a $\mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda) - \mathbf{R}_\mathrm{P}(\lambda)$ jsou nulové.

(5) Nechť $\mathbf{A}(\lambda)$ je λ-matice, $\mathbf{C}$ libovolná číselná matice řádu n nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Formulujte postačující podmínku pro to, aby $\mathbf{A}_\mathrm{P}(\mathbf{C}) = \mathbf{A}_\mathrm{L}(\mathbf{C})$.

(6) Přímým výpočtem, naznačeným v textu, dokažte platnost vztahů (1.10). Vyjádřete $\mathbf{R}_\mathrm{P}$ a $\mathbf{R}_\mathrm{L}$ explicitně pro případ, že $\mathbf{B}(\lambda) = \lambda\mathbf{E} - \mathbf{C}$, tj. ve vztazích (1.10) je $\mathbf{B}_1 = \mathbf{E}$, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{C}$. $\mathbf{A}(\lambda)$ předpokládejte ve tvaru maticového polynomu $\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{A}_k\lambda^k + \ldots + \mathbf{A}_0$. Prověřte, zda vztahy pro $\mathbf{R}_P P$, $\mathbf{R}_\mathrm{L}$, získané jako $\mathbf{A}_\mathrm{P}(\mathbf{C})$, $\mathbf{A}_\mathrm{L}(\mathbf{C})$ souhlasí s rekurentními vzorci, které jsme obdrželi v úloze (4).

Výsledek:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\mathrm{P} &= \mathbf{A}_\mathrm{P}(\mathbf{C}) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{C} + \ldots + \mathbf{A}_k\mathbf{C}^k \\ \mathbf{R}_\mathrm{L} &= \mathbf{A}_\mathrm{L}(\mathbf{C}) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{C}\mathbf{A}_1 + \ldots + \mathbf{C}^k\mathbf{A}_k.\end{aligned}$$

(7) Dokažte následující tvrzení (Cayleyova-Hamiltonova věta): Nechť $\mathbf{A}$ je číselná metice řádu n. Zřejmě $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ je (obyčejný) polynom stupně n, tj. $f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (-)^n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_1\lambda + \alpha_0$. Platí $f(\mathbf{A}) = (-1)^n\mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{E}$.

Návod: Využijte vztahu $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^{-1} = \operatorname{adj}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})/f(\lambda)$, nebo rozkladu polynomu $f(\lambda)$ na kořenové činitele.

Kapitola 3

Jordanův normální tvar matice

3.1 Základní věta o podobnosti matic

V předchozích odstavcích jsme připravili materiál pro to, abychom nyní mohli formulovat kritérium podobnosti číselných matic. Zaveďme ještě měkolik pojmů:

Nechť $\mathbf{A}$ je číselná matice řádu n nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ se nazývá charakteristickou maticí matice $\mathbf{A}$, $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ charakteristickým polynomem matice $\mathbf{A}$ a kořeny charakteristického polynomu charakteristickými kořeny matice $\mathbf{A}$. Poněvadž $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ je polynom n-tého stupně, přísluší každé matici $\mathbf{A}$ n charakteristických kořenů (včetně jejich násobnosti). Tyto kořeny jsou obecně komplexní i v případě matice nad $\mathbb{R}$. Všimněme si charakteristických kořenů podobných matic. Předpokládejme, že matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ řádu n jsou vázány podobnostní transformací $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}$, kde $\mathbf{Q}$ je regulární matice. Pak

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1} - \mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^{-1}) =\\ \det(\mathbf{Q}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{Q}^{-1} = \det\mathbf{Q}\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\det\mathbf{Q}^{-1} = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}).\end{aligned}$$

Ze získané rovnosti charakteristických polynomů podobných matic vyplývá následující tvrzení.

Věta 3.1. *Podobné matice mají stejný charakteristický polynom a stejný soubor charakteristických kořenů.*

Rovnost charakteristických polynomů matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ je nutnou podmínkou a tedy jakýmsi prvním „indikátorem“ jejich případné podobnosti. Není však kritériem podobnosti. To je formulováno v následující větě, jejíž důkaz podává současně praktický návod, jak nalézt odpovídající podobnostní transformaci.

Věta 3.2. *Matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ jsou podobné právě tehdy, jsou-li jejich charakteristické matice ekvivalentní.*

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou podobné, tj. $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}$, $\mathbf{Q}$ je regulární matice. Pak $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1} - \lambda\mathbf{E} = \mathbf{Q}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{Q}^{-1}$. Podle věty 1.15 je $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E} \sim \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$, neboť matice $\mathbf{Q}$ je unimodulární.

(ii) Nechť $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E} \sim \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$. Pak existují unimodulární matice $\mathbf{U}(\lambda)$ a $\mathbf{V}(\lambda)$ takové, že $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E} = \mathbf{U}(\lambda)(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{V}(\lambda)$ a matice $\mathbf{Q}_1(\lambda)$, $\mathbf{R}_1(\lambda)$, $\mathbf{Q}_2(\lambda)$, $\mathbf{R}_2(\lambda)$ takové, že platí

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(\lambda) &= (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{Q}_1(\lambda) + \mathbf{R}_1(\lambda)\\ \mathbf{V}(\lambda) &= \mathbf{Q}_2(\lambda)(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) + \mathbf{R}_2(\lambda)\end{aligned}$$

$\mathbf{R}_1(\lambda)$ a $\mathbf{R}_2(\lambda)$ jsou maticové polynomy stupně nižšího než 1, tj. číselné matice. Výraz $\mathbf{R}_1(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{R}_2$ je proto maticovým polynomem stupně nejvýše prvého. Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) &= [\mathbf{U}(\lambda) - (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{Q}_1(\lambda)](\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})[\mathbf{V}(\lambda) - \mathbf{Q}_2(\lambda)(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})]\\ &(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) - (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{Q}_1(\lambda)\mathbf{U}^{-1}(\lambda)(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) - (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{V}^{-1}(\lambda)\mathbf{Q}_2(\lambda)(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) +\\ &+ (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{Q}_1(\lambda)(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{Q}_2(\lambda)(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) =\\ &= (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})[\mathbf{E} - \mathbf{Q}_1(\lambda)\mathbf{U}^{-1}(\lambda) + \mathbf{V}^{-1}(\lambda)\mathbf{Q}_2(\lambda) - \mathbf{Q}_1(\lambda)(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{Q}_2(\lambda)].\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že i pravá strana rovnosti musí být maticovým polynomem stupně nejvýše 1, je maticový výraz v kulaté závorce nulový. Pak $\mathbf{R}_1(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{R}_2 = \mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}$ a srovnáním koeficientů dostaneme $\mathbf{R}_1\mathbf{A}\mathbf{R}_2 = \mathbf{B}$, $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = \mathbf{E}$. Odtud $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1^{-1}$ a $\mathbf{B} = \mathbf{R}_1\mathbf{A}\mathbf{R}_1^{-1}$. Matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou tedy podobné. Předpokládáme-li $\mathbf{U}(\lambda)$ a $\mathbf{V}(\lambda)$ ve tvaru $\mathbf{U}(\lambda) = \mathbf{U}_k\lambda^k + \ldots + \mathbf{U}_1\lambda + \mathbf{U}_0$, $\mathbf{V}(\lambda) = \mathbf{V}_m\lambda^m + \ldots + \mathbf{V}_1\lambda + \mathbf{V}_0$, pak podle výsledku úlohy (6) Cvičení 1.7 dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= \mathbf{U}_{\mathrm{L}}(\mathbf{B}) = \mathbf{U}_0 + \mathbf{B}\mathbf{U}_1 + \ldots + \mathbf{B}^k\mathbf{U}_k\\ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{V}_{\mathrm{P}}(\mathbf{B}) = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1\mathbf{B} + \ldots + \mathbf{V}_m\mathbf{B}^m.\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Příklad 1: Jsou dány následující matice 2. řádu:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -10 & -4\\ 26 & 11.\end{pmatrix}$$

Tyto matice jsou podobné, neboť jejich charakteristické matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$, $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}$ mají stejný kanonický tvar $\mathbf{D}(\lambda)$, $\mathrm{diag}\mathbf{D}(\lambda) = [1, \lambda^2 - \lambda - 6]$. Snadno se o tom přesvědčíme výpočtem invariantních faktorů. Převedeme matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ a $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}$ na kanonický tvar vhodnými elementárními úpravami, například

$$\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1\\ 0 & 3-\lambda\end{pmatrix} \overset{\mathbf{V}_1}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1\\ (3-\lambda)(\lambda+2) & 3-\lambda\end{pmatrix} \overset{\mathbf{U}_1}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1\\ (3-\lambda)(\lambda+2) & 0\end{pmatrix} \overset{\mathbf{V}_2}{\sim}$$
$$\overset{\mathbf{V}_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0\\ ) & \lambda^2-\lambda-6\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ (\lambda-3) & 1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & -\lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -10-\lambda & -4\\ 26 & 11-\lambda\end{pmatrix} \overset{\mathbf{U}_1'}{\sim} \begin{pmatrix} -10-\lambda & -4\\ \frac{1}{4}(\lambda^2-\lambda-6) & 0\end{pmatrix} \overset{\mathbf{V}_1'}{\sim} \begin{pmatrix} -40-4\lambda & -4\\ \lambda^2-\lambda-6 & 0\end{pmatrix} \overset{\mathbf{V}_2'}{\sim}$$
$$\overset{\mathbf{V}_2'}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -4\\ \lambda^2-\lambda-6 & 0\end{pmatrix} \overset{\mathbf{V}_3'}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & \lambda^2-\lambda-6\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4}(11-\lambda) & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_1'\mathbf{V}_2'\mathbf{V}_3' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -\frac{1}{4} & -\lambda - 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{U}_1(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2, \quad \mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{U}_1'(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{V}_1'\mathbf{V}_2'\mathbf{V}_3'.$$

Odtud $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E} = \mathbf{U}(\lambda)(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{V}$, $\mathbf{U}(\lambda) = \mathbf{U}_1'^{-1}\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}(\lambda) = \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2(\mathbf{V}_1'\mathbf{V}_2'\mathbf{V}_3')^{-1}$.

$$\mathbf{U}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4}(5\lambda - 23) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5/4 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -23/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}(\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4}(5\lambda + 42) & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -5/4 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ -21/4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -23/4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 26 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5/4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ -21/2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -5/4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 26 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ realizují možnou podobnostní transformaci mezi maticemi $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$. Podobnostní transformace není určena jednoznačně. Jinou mežnost představují také například matice

$$\mathbf{R}_1' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 3.1

(1) Určete charakteristické kořeny matic $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}^2$, $f(\mathbf{A})$, kde $f(x)$ je polynom stupně m, jsou-li dány charakteristické kořeny matice $\mathbf{A}$ řádu n.

Výsledek: Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ charakteristické kořeny matice $\mathbf{A}$ včetně násobnosti, jsou $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_r^{-1}$ resp. $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_r^2$ resp. $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_r)$ charakteristické kořeny matice $\mathbf{A}^{-1}$ resp. $\mathbf{A}^2$ resp. $f(\mathbf{A})$, včetně násobnosti.

3.2 Jordanův normální tvar matice

V úvahách o podobných maticích se nyní naskýtá přirozená otázka, zda také třída podobných matic je charakterizována nějakým zvláště jednoduchým reprezentantem, podobně jako jsou ekvivalentní λ-matice zastoupeny kanonickým tvarem. Ukazuje se, že nad $\mathbb{C}$ takový reprezentant vždy existuje. Není obecně diagonální, má však speciální tvar tzv. Jordanovy matice, jejíž nenulové prvky jsou rozloženy v blocích podél hlavní diagonály, ostatní prvky jsou nulové. Zavedeme nejprve pojem Jordanovy matice.

Jordanovou submaticí $\mathbf{J}_i$ řádu k_i příslušnou číslu $\lambda_i \in \mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ rozumíme matici tvaru

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Jordanova matice **J** je tvořena Jordanovými submaticemi rozloženými podél hlavní diagonály, ostatní prvky jsou nulové.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & & 0 \\ & \mathbf{J}_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{J}_s \end{pmatrix}, b \quad k_1 + \ldots + k_s = n.$$

Nechť **A** je čtvercová matice řádu n nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, Jordanovu matici **J** nazveme Jordanovým normálním tvarem číselné matice **A**, jsou-li matice **A** a **J** podobné. Podle základní věty o podobnosti matic to znamená, že matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ a $\mathbf{J} - \lambda\mathbf{E}$ jsou ekvivalentní, mají tedy stejný kanonický tvar. Zabývejme se proto kanonickým tvarem Jordanovy matice. Nechť nejprve $\mathbf{J}_i$ je jedna ze submatic, tvořících Jordanovu matici. Pak

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i - \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda_i - \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i - \lambda \end{pmatrix}.$$

Vzhledem k tomu, že $\det(\mathbf{J}_i - \lambda\mathbf{E}) = (\lambda_i - \lambda)^{k_i}$ a algebraický doplněk prvku ležícího v posledním řádku a prvém sloupci je $(-1)^{n+1}$, můžeme snadno určit největší společné dělitele minorů všech řádů a tedy i invariantní faktory, vytvářející kanonický tvar matice $\mathbf{J}_i - \lambda\mathbf{E}$: $d_1(\lambda) = \ldots = d_{k_i-1}(\lambda) = 1$, $d_{k_i}(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{k_i}$, $e_1(\lambda) = \ldots = e_{k_i-1}(\lambda) = 1$, $e_{k_i}(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{k_i}$.

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & (\lambda - \lambda_i)^{k_i} \end{pmatrix}.$$

Elementární úpravy charakteristické matice Jordanovy matice lze provádět tak, aby postupně všechny submatice $\mathbf{J}_i - \lambda\mathbf{E}$ přešly na kanonický tvar. Označme $\lambda_, \ldots, \lambda_r$ navzájem různé diagonální prvky matice **J**, jimž přísluší jednotlivé submatice. Počty Jordanových submatic příslušných číslům λ_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$ označme $q_1, \ldots, q_r$. Indexování hodnot λ_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$ může být zvoleno tak, aby $q_1 \geq \ldots \geq q_r$. Řády submatic příslušných číslu λ_i označme $k_{il}, \ldots, k_{iq}$, přičemž lze opět volit $k_{i1} \geq \ldots \geq k_{iq}$. Zřejmě platí $\sum k_{ij} = n$, symbol $\sum$ značí součet přes indexy $j \in \{1, \ldots, q_i\}$ a $i \in \{1, \ldots, r\}$. Matice $\mathbf{J} - \lambda\mathbf{E}$ tedy získá elementárními úpravami, při nichž všechny submatice přejdou na kanonický tvar, následující podobu:

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & 0 & & \\
& & 1 & & & & & & & & & & \\
& & & (\lambda-\lambda_i)^{k_1} & & & & & & & & & \\
& & & & 1 & & & & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & & & & \\
& & & & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & & & (\lambda-\lambda_i)^{k_2} & & & & & \\
& & & & & & & & \ddots & & & & \\
& & & & & & & & & 1 & & & \\
& & & & & & & & & & \ddots & & \\
& & & & & & & & & & & 1 & \\
& & & & & & & & & 0 & & & (\lambda-\lambda_i)^{k_r}
\end{pmatrix}$$

Z tohoto tvaru matice $\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E}$ už snadno určíme invariantní faktory:

$$\begin{aligned}
e_n(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{21}}\dots(\lambda-\lambda_1 r)^{k_{r1}}\\
e_{n-1}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{k_{12}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{22}}\dots(\lambda-\lambda_1 r)^{k_{r2}}\\
&\vdots\\
e_{n-j+1}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{k_{1j}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{2j}}\dots(\lambda-\lambda_1 r)^{k_{rj}}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Pokud již je v některém z činitelů $j > q_i$, klademe $k_{ij} = 0$

$$e_{n-j+1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{r}(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}, \quad j \in \{1,\dots,n\} \tag{3.1}$$

Výrazy $(\lambda-\lambda_1)^{k_{1j}},\dots,(\lambda-\lambda_r)^{k_{rj}}$ se nazývají elementárními děliteli polynomu $e_{n-j+1}(\lambda)$. Pro zadanou Jordanovu matici $\mathbf{J}$ tedy můžeme okamžitě psát invariantní faktory její charakteristické matice, aniž bychom prováděli elementární úpravy.

Příklad 2: Pro zadanou Jordanovu matici určíme kanonický tvar její matice charakteristické.

$$\begin{pmatrix}
3 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & 3 & 1 & 0 & & & & & & & \\
0 & 0 & 3 & 1 & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 3 & & & & & & & \\
& & & & 1 & & & & & & \\
& & & & & 1 & 1 & & & & \\
& & & & & 0 & 1 & & & & \\
& & & & & & & 3 & 1 & 0 & \\
& & & & & & & 0 & 3 & 1 & \\
& & & & & & & 0 & 0 & 3 & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3, q_1 = 3, k_{11} = 4, k_{12} = 3, k_{13} = 1$$
$$\lambda_2 = 1, q_2 = 2, k_{21} = 2, k_{22} = 1.$$

Elementární dělitelé:

$$\begin{matrix} (\lambda-3)^4 & (\lambda-3)^3 & (\lambda-3) \\ (\lambda-1)^2 & (\lambda-1) & \end{matrix}$$

Invariantní faktory:

$$e_1(\lambda) = \ldots = e_8(\lambda) = 1, e_9(\lambda) = (\lambda-3), e_{10}(\lambda) = (\lambda-)^3(\lambda-1)$$
$$e_11(\lambda) = (\lambda-3)^4(\lambda-1)^2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& 1 &&& \\ &&&& (\lambda-3) && \\ &&&&& (\lambda-3)^3(\lambda-1) & \\ &&&&&& (\lambda-3)^4(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$$

Příklad 3: Je-li zadán kanonický tvar charakteristické matice $\mathbf{J} - \lambda\mathbf{E}$, snadno určíme příslušnou matici Jordanovu:

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 &&&& \\ &&&&& 1 &&& \\ &&&&&&& (\lambda-2) & \\ &&&&&& (\lambda-2)(\lambda-5)^5 && \\ &&&&&&&& (\lambda-2)^3(\lambda-5)^2 \end{pmatrix}$$

Elementární dělitelé:

$$\begin{matrix} (\lambda-2)^3 & (\lambda-2) & (\lambda-2) \\ (\lambda-5)^2 & (\lambda-5)^2 & \end{matrix}$$

Odtud je zřejmé, že odpovídající Jordanova matice $\mathbf{J}$ obsahuje tři submatice příslušné číslu $\lambda_1 = 2$, z nichž jedna je třetího a dvě prvého řádu, a dvě submatice druhého řádu příslušné číslu $\lambda_2 = 5$, tj.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 &&&&&& \\ 0 & 2 & 1 &&&&&& \\ 0 & 0 & 2 &&&&&& \\ &&& 2 &&&&& \\ &&&& 2 &&&& \\ &&&&& 5 & 1 && \\ &&&&& 1 & 5 && \\ &&&&&&& 5 & 1 \\ &&&&&&& 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Poznámka: Je zřejmé, že zadáním invariantních faktorů matice $\mathbf{J} - \lambda\mathbf{E}$ jsou určeny jednoznačně počty a řády jednotlivých submatic matice $\mathbf{J}$, nikoliv však jejich pořadí při uspořádání podél hlavní diagonály. Tato nejednoznačnost však není podstatná, nebol Jordanovy matice, které se navzájem liší pouze uspořádáním submatic podél hlavní diagonály, jsou podobné (jejich charakteristické matice mají stejný kanonický tvar). Platí pochopitelně i obrácené tvrzení, tj. že podobné Jordanovy matice se liší nejvýše uspořádáním submatic podél hlavní diagonály. Z uvedených úvah vyplývá, že diagonální matice jsou podobné právě tehdy, liší-li se nejvýše uspořádáním prvků v diagonále. Každá diagonální matice je totiž Jordanovou maticí tvořenou submaticemi prvého řádu.

Zbývá ještě vyřešit otázku existence Jordanovy matice podobné zadané matici $\mathbf{A}$ nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$, tj. otázku převeditelnosti (redukovatelnosti) matice $\mathbf{A}$ na Jordanův normální tvar. Odpověď vyplývá z předcházejících úvah o kanonickém tvaru Jordanových matic:

Věta 3.3. *Matice $\mathbf{A}$ nad $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ může být převedena podobnostní transformací na Jordanův normální tvar právě tehdy, když všechny její charakteristické kořeny jsou prvky $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$.*

Důkaz: Nechť $\mathbb{P}$ představuje označení pro $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.
(i) Předpokládejme nejprve, že čtvercová matice $\mathbf{A}$ nad $\mathbb{P}$ je podobná nějaké Jordanově matici $\mathbf{J}$, definované pochopitelně rovněž nad $\mathbb{P}$. Charakteristickými kořeny matice jsou její diagonální prvky, které také náležejí $\mathbb{P}$. Podobné matice však mají podle věty 1.16 stejný soubor charakteristických kořenů. Charakteristické kořeny matice $\mathbf{A}$ jsou tedy prvky pole $\mathbb{P}$.
(ii) V druhé části důkazu vyjděme naopak z předpokladu, že matice $\mathbf{A}$, definovaná nad $\mathbb{P}$, má charakteristické kořeny rovněž z $\mathbb{P}$. Označme $\mathbf{D}(\lambda)$ kanonický tvar matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$. Všechny invariantní faktory matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ jsou nad $\mathbb{P}$ rozložitelné na kořenové činitele, tj.

$$e_{n-j+1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i)^{k_{ij}}, \quad \lambda_i \in \mathbb{P}$$

$\mathbf{D}(\lambda)$ je tedy současně kanonickým tvarem charakteristické matice $\mathbf{J} - \lambda\mathbf{E}$ jisté Jordanovy matice $\mathbf{J}$, která je podle základní věty o podobnosti matic podobná výchozí matici $\mathbf{A}$ aje určena jednoznačně až na uspořádání Jordanových submatic podél hlavní diagonály.

$\diamondsuit$

Z tvrzení 1,18 je zřejmé, že matici $\mathbf{A}$ s prvky z pole $\mathbb{C}$ lze vždy redukovat na Jordanův normální tvar.

Velmi jednoduchým, avšak v praktických příkladech důležitým, dúsledkem věty 1.18 je její speciální případ, týkající se redukce matice $\mathbf{A}$ na diagonální tvar:

Věta 3.4. *Matici $\mathbf{A}$ řádu n s prvky z pole $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ lze podobnostní transformací převést na diagonální tvar právě tehdy, když věechny kořeny posledního invariantního faktoru $e_n(\lambda)$ její charakteristické matice jsou jednonásobné a jsou prvky pole $\mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$.*

Důkaz: Důkaz tohoto tvrzení dostáváme jako samozřejmý důsledek předcházejících úvah, uvědomíme-li si, že diagonální matice je speciálním případem matice Jordanovy, jejíž všechny submatice jsou pouze prvého řádu.

$\diamondsuit$

0 možnosti převodu dané matice $\mathbf{A}$ na diagonální tvar podobnostní transformací tedy rozhodují invariantní faktory charakteristické matice. Bylo by však jistě užitečné mít k dispozici kritérium, které by umožnilo rozpoznat diagonalizovatelnou matici bez nutnosti výpočtu invariantních faktorú její cherakteristické matice, tj. pouze na základě vlastností matice, $\mathbf{A}$ samotné. Takové kritérium můžeme formulovat tehdy, omezíme-li třídu přípustných podobnostních transformací pouze na transformace s unitární maticí $\mathbf{Q}$.

Věta 3.5. *Matice $\mathbf{A}$ řádu n nad $\mathbb{C}$ může být převedena na diagonální tvar podobnostní transformací s unitární maticí práva tehdy, platí-li* $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}*}\mathbf{A}$.

Poznámka: Matice $\mathbf{A}$ s vlastností $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}*}\mathbf{A}$ se nazývá normální matice.

Důkaz: Proveďme nejprve několik přípravných úvah. Matice $\mathbf{A}$ je zadána nad $\mathbb{C}$, proto ji lze podle věty 1.18 redukovat na Jordanův normální tvar podobnostní transformací; $\mathbf{J} = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}$. Jordanův tvar je až na uspořádání submatic určen jednoznačně, zatímco podobnostních transformací může být obecně celá množina. Předpokládejme, že některá z podobnostních transformací je reprezentována unitární maticí $\mathbf{U}$, tj. $\mathbf{U}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{U}^{-1}$. Počítejme rozdíl

$$\mathbf{J}\mathbf{J}^{\mathbf{T}*} - \mathbf{J}^{\mathbf{T}*}\mathbf{J} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1})^{\mathbf{T}*} - (\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1})^{\mathbf{T}*}\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}*}\mathbf{A})\mathbf{U}^{-1}$$

Je vidět, že v případě normální matice $\mathbf{A}$ je také jejím Jordanovým tvarem normální matice a naopak. Zbývá tedy dokázat, že Jordanova matice je normální právě tehdy, jsou-li její submatice prvého řádu. Předpokládejme, že Jordanova matice je tvořena submaticemi $\mathbf{J}_1, \ldots, \mathbf{J}_s$ a označme $\mathbf{H} = \mathbf{J}\mathbf{J}^{\mathbf{T}*} - \mathbf{J}^{\mathbf{T}*}\mathbf{J}$. Pak

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1{\mathbf{J}_1}^{\mathbf{T}*} - {\mathbf{J}_1}^{\mathbf{T}*}\mathbf{J}_1 & & \\ & \ddots & \mathbf{J}_s{\mathbf{J}_s}^{\mathbf{T}*} - {\mathbf{J}_s}^{\mathbf{T}*}\mathbf{J}_s \end{pmatrix}$$

a $\mathbf{H} = 0$ právě tehdy, když $\mathbf{J}_k{\mathbf{J}_k}^{\mathbf{T}*} - {\mathbf{J}_k}^{\mathbf{T}*}\mathbf{J}_k$ pro $k \in \{1, \ldots, s\}$. Je-li $\mathbf{J}_k$ prvého řádu, pak zřejmě $\mathbf{J}_k = (\lambda_k)$ a $\mathbf{J}_k{\mathbf{J}_k}^{\mathbf{T}*} - {\mathbf{J}_k}^{\mathbf{T}*}\mathbf{J}_k = 0$. Pro vyšší řád dostáváme

$$\mathbf{J}_k{\mathbf{J}_k}^{\mathbf{T}*} = \begin{pmatrix} \lambda_k\lambda_k^* + 1 & \lambda_k^* & & \\ \lambda_k & \lambda_k\lambda_k^* + 1 & \lambda_k^* & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k\lambda_k^* \end{pmatrix}$$

$$ {\mathbf{J}_k}^{\mathbf{T}*}\mathbf{J}_k = \begin{pmatrix} \lambda_k^*\lambda_k & \lambda_k^* & & \\ \lambda_k & \lambda_k^*\lambda_k + 1 & \lambda_k^* & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k^*\lambda_k + 1 \end{pmatrix}$$

Z výpočtu vyplývá, že

$$\mathbf{J}_k\mathbf{J}_k^{\mathbf{T}*} - \mathbf{J}_k^{\mathbf{T}*}\mathbf{J}_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_k\lambda_{k+1}^* - \lambda_k^*\lambda_k.$$

Tato rovnost však nenastane pro žádnou hodnotu λ_k. Jordanova submatice $\mathbf{J}_k$ je tedy normální matici právě tehdy, když je prvého řádu.

$\diamondsuit$

Stranou prozatím ponecháváme problém vymezení třídy podobnostních transformací, které převádějí danou matici $\mathbf{A}$ na její Jordanův normální tvar. K této otázce se vrátíme v kapitole 4., v níž pojem podobnostní transformace matic získá velmi názorný geometrický význam.

Cvičení 3.2

(1) Převeďte charakteristickou matici Jordanovy submatice na kanonický tvar pomocí elementárních úprav.

(2) Ukažte, že kanonickým tvarem matice $\mathbf{A}(\lambda)$ druhého řádu, pro niž $\alpha_1^1(\lambda) = \phi_1(\lambda)$, $\alpha_2^2(\lambda) = \phi_2(\lambda)$, $\alpha_1^2(\lambda) = \alpha_2^1(\lambda) = 0$, kde $\phi_1(\lambda)$ a $\phi_2(\lambda)$ jsou nesoudělné polynomy, je matice $\mathbf{D}(\lambda)$, pro niž $\mathrm{diag}\mathbf{D}(\lambda) = [1, \phi_1(\lambda)\phi_2(\lambda)]$. Jak bude vypadat kanonický tvar, je-li největším společným dělitelem polynomů $\phi_1(\lambda)$ a $\phi_2(\lambda)$ polynom $d(\lambda)$?

Návod: Vypočtěte největší společné dělitele minorů prvého i druhého řádu a pomocí nich určete invariantní faktory.

(3) Určete Jordanův normální tvar následujících matic:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 & -17 & 87 & -108 \\ 8 & 9 & -42 & 54 \\ -3 & -3 & 16 & -18 \\ -1 & -1 & 6 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 9 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -6 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}.$$

Výsledek:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ jsou charakteristické kořeny matice $\mathbf{A}$ s násobnostmi $k_1, \dots, k_r$, Dokažte, že matice $\mathbf{A}^k$ má právě charakteristické kořeny $\lambda_1^k, \dots, \lambda_r^k$ s násobnostmi rovněž $k_1, \dots, k_r$.

Návod: Nejprve dokažte, že matice $\mathbf{A}^k$ je podobná matici $\mathbf{J}^k$ kde $\mathbf{J}$ je Jordanův normální tvar matice $\mathbf{A}$. Přímým výpočtem ukažte, že $\mathbf{J}^k$ je horní trojúhelníková matice a určete tvar prvků v její diagonále. Nakonec zapište chatakteriatický polynom matice $\mathbf{J}^k$ jako součin prvků v diagonále matice $\mathbf{J}^k$. Z jeho tvaru již vyplývá žádaný výsledek.

Část II
Vektorové prostory

Kapitola 4

Základní algebraické struktury

Algebraická struktura vzniká na dané (tzv. nosné) množině definováním určitých operací s vhodně zvolenými vlastnostmi, které umožňují s prvky nosné množiny jistým způsobem "počítat". Lineární a multilineární algebra jsou algebraické disciplíny, které pracují jako s naprosto základní algebraickou strukturou s vektorovým prostorem. V této kapitole budeme úvahy týkající se základních algebraických struktur provádět jako úvahy přípravné, potřebné pro vybudování pojmu vektorového prostoru.

4.1 Grupy, izomorfismy grup

Nechť $G \neq \emptyset$ je množina (tzv. nosná množina) a $\circ$ zobrazení

$$G \times G \ni [a, b] \longrightarrow a \circ b = c \in G$$

zvané kompozice (skládání) s následujícími vlastnostmi: Pro libovolné prvky $a, b, c \in G$ platí

$$\begin{array}{rll} \text{(i)} & (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) & \text{asociativita} \\ \text{(ii)} & \text{rovnice } a \circ x = b \text{ má právě jedno řešení } x, & \\ \text{(iii)} & \text{rovnice } a \circ y = b \text{ má právě jedno řešení } y. & \end{array} \tag{4.1}$$

Množina G s takto definovanou operací skládání se nazývá grupou. Značíme ji $(G, \circ)$. Grupa se nazývá komutativní neboli abelovská, platí-li pro všechna $a, b \in G$ vztah $a \circ b = b \circ a$.

Z definice grupy vyplývají další vlastnosti (úloha (1) Cvičení 2.1):

(iv) Existuje jednoznačně prvek $e \in G$ takový, že pro každé $a \in G$ je $a \circ e = e \circ a = a$.

(v) Ke každému prvku $a \in G$ existuje právě jeden prvek $a^{-1} \in G$, pro který je $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Prvek e nazýváme jednotkou nebo neutrálním prvkem grupy, a^{-1} je tzv. inverzní prvek k prvku a. Místo operace skládání používáme někdy tzv. operace sčítání s týmiž vlastnostmi (i) až (iii) a hovoříme pak o aditivní grupě nebo modulu $(G, +)$. Příkladem může být množina celých čísel s operací sčítání čísel. Neutrální prvek aditivní grupy nazýváme prvkem nulovým (značíme o, platí $a + o = o + a = a$), inverzní prvek k prvku a značíme $-a$ a nazýváme prvkem opačným k prvku a $(a + (-a) = (-a) + a = o$, značíme $a - a = o)$.

Nechť $H \subseteq G$. H se nazývá podgrupou grupy G, jestliže je $(H, \circ)$ grupou. Aby podmnožina $H \subseteq G$ grupy G byla její podgrupou, je nutné a stačí: $H \neq \emptyset$ a platí

(i) pro libovolné prvky $a, b \in H$ je $a \circ b \in H$,

(ii) pro každý prvek $a \in H$ je $a^{-1} \in H$.

Každá grupa má tzv. dvě triviální podgrupy, $G \subseteq G$, $\{e\} \subseteq G$. Nechť $H \subseteq G$ je podgrupa, $a \in G$ pevně zvolený prvek. Pak množina $aH = \{b = a \circ h \mid h \in H\}$, resp. $Ha = \{c = h \circ a \mid h \in H\}$ se nazývá levou, resp. pravou vedlejší třídou grupy G podle podgrupy H. Je-li $a \in H$, pak zřejmě $aH = Ha = H$. Levé (resp. pravé) vedlejší třídy jsou po dvou disjunktní, každý prvek grupy G náleží právě jedné levé, resp. pravé vedlejší třídě. Levé resp. pravé třídy tvoří tedy rozklad grupy G. Levé (pravé) vedlejší třídy mají stejnou mohutnost. Pro konečné grupy platí tzv. Lagrangeův teorém: $N = j.n$, kde N je počet prvků podgrupy H, j je tzv. index podgrupy H v G, n je počet prvků pogrupy H. Obsahem Lagrangeova teorému je skutečnost, že počet prvků konečné grupy je dělitelný počtem prvků její libovolné podgrupy. Index podgrupy je roven počtu vedlejších tříd. Jestliže pro levou a pravou vedlejší třídu obsahující prvek

$a \in G$ platí $aH = Ha$ pro libovolné $a \in G$, nazývá se H normální dělitel nebo invariantí podgrupa grupy G. V abelovské grupě je každá podgrupa normálním dělitelem.

Nechť F, G jsou grupy. Zobrazení

$$\varphi : F \ni f \longrightarrow \varphi(f) = g \in G$$

se nazývá homomorfní, jestliže pro libovolné prvky $f_1, f_2 \in F$ platí $\varphi(f_1 \circ f_2) = \varphi(f_1) \circ \varphi\ (f_2)$. Homomorfní zobrazení se také nazývá homomorfismem. Je-li φ navíc prosté a na, jedná se o tzv. izomosfismus grup F, G. Je zřejmé, že mohutnost izomorfních grup je stejná. Pro každé homomorfní zobrazení platí $\varphi(e) = e'$, kde $e \in F$, $e' \in G$ jsou neutrální prvky. Nechť $\varphi : F \to G$ je homomorfní zobrazení. Pak podmnožina $H \subseteq F$, $H = \{a \in F \mid \varphi(a) = e'\}$ je podgrupa v F a nazývá se jádro zobrazení φ. Podmnožina $K \subseteq G$, $K = \{b \in G \mid \exists\, a \in F,\ b = \varphi(a)\}$ je podgrupou v G a nazývá se oborem hodnot zobrazení.

Příklad 1: Nechť ϑ je množina všech transformací $\{a, \vec{u}\}$ trojrozměrného euklidovského prostoru $\mathbb{R}^3$ sestávajících z rotace a vlastní nebo nevlastní, reprezentované maticí $\mathbf{A}$ třetího řádu, a translace o vektor $\vec{u}$. (Transformací $\{a, \vec{u}\}$ rozumíme zobrazení, přiřazující vektoru $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vektor $\vec{r}' = \{a, \vec{u}\}\ \vec{r} = a\vec{r} + \vec{r} \in \mathbb{R}^3$, $(x', y', z') = (x, y, z)\mathbf{A} + (u_x, u_y, u_z)$. Složením transformací $\{a, \vec{u}\}$, $\{b, \vec{v}\}$ rozumíme jejich postupnou aplikaci:

$$(\{b, \vec{v}\} \circ \{a, \vec{u}\})\vec{r} = \{b, \vec{v}\}(a\vec{r} + \vec{u}) = (ba)\vec{r} + b\vec{u} + \vec{v}$$
$$(x'', y'', y'') = (x, y, z)\mathbf{AB} = (u_x, u_y, u_z)\mathbf{B} + (v_x, v_y, v_z)$$

Množina $(\vartheta, \circ)$ je grupou. Určete její neutrální prvek a k libovolnému prvku $\{a, \vec{u}\}$ prvek inverzní.

Příklad 2: Označme O_h množinu všech transformací typu $\{a, \vec{u}\}$, které převádějí krychli do tzv. ekvivalentní polohy (tj. polohy nerozlišitelné od původní). Skládání transformací definujeme stejně jako v příkladu 1. $(O_h, \circ)$ je podgrupou grupy $(\vartheta, \circ)$.

Cvičení 4.1

(1) Dokažte, že z axiomů (i) až (iii), definujících grupu, vyplývají vlastnosti (iv) a (v). Ukažte, že naopak z (i), (iv) a (v) plyne (ii) a (iii).

Návod: Pro důkaz vlastnosti (iv) předpokládejte, že $a \circ e = a$, $b \circ e' = b$ (existence prvků e, e' i jejich jednoznačnost vyplývá z (ii)). Dokažte, že $e = e'$. Vlastnost (v) dokážete, aplikujete-li axiomy (ii), (iii) na rovnice $a \circ x = e$, $y \circ a = e$.

(2) Označme Z_n množinu všech permutací čísel $1, \ldots, n$ a $[i_1, \ldots, i_n]$ obecně zvolenou permutaci. Složení permutací definujeme v souhlasu s odstavcem 1.3, tj. $[k_1, \ldots, k_n][i_1, \ldots, i_n] = [k_{i1}, \ldots, k_{in}]$. Dokažte, že $(\Sigma_n, \circ)$ je grupa.

Návod: Prověřte axiom (i) a vlastnosti (iv),(v). Jaký tvar má prvek e a prvek $[i_1, \ldots, i_n]^{-1}$?

(3) Dokažte, že každé dvě levé (pravé) vedlejší třídy grupy G podle podgrupy H jsou disjunktní.

Návod: Zvolte pro $a_1 \neq a_2$, $a_1 \neq H$ prvek $b_1 \in a_1H$ a prvek $b_2 \in a_2H$ a předpokládejte, že $b_1 = b_2$, tj. $a_1 \circ h_1 = a_2 \circ h_2$, kde $h_1, h_2 \in H$. Užitím axiomů grupy ukažte, že $a_2 \in a_1H$ a odtud $a_1H = a_2H$.

(4) Dokažte, že jádro resp. obor hodnot homomorfní zobrazení $\varphi : F \longrightarrow G$ je podgrupou v F resp. v G.

Návod: Jádro resp. obor hodnot zobrazení označte $H \subseteq F$ resp. $K \subseteq G$. Ukažte, že pro všechny prvky $h_1, h_2 \in H$ je $h_1 \circ h_2 \in H$ (tj. $\varphi(h_1 \circ h_2) = e'$), dále $\varphi(e) = e'$ a pro každý prvek $h \in H$ je $\varphi(h^{-1}) = e'$, tj. $h^{-1} \in H$. Dále ukažte, že pro libovolné $k_1.k_2 \in K$ existuje prvek $f \in F$ tak, že $\varphi(f) = k_1 \circ k_2$, tj. $k_1 \circ k_2 \in G$. Pro libovolný prvek $k \in K$ existuje $f \in F$ tak, že $\varphi(f) = k^{-1}$.

(5) (a) Dokažte, že množina matic $\mathbf{A} = (\alpha^i_j)$, $\alpha^i_j \in \mathbb{R}$, typu m/n s operací sčítání definovanou v odstavci 1.1 tvoří avelovskou grupu.

(b) Dokažte, že množina regulárních matic řádu n s operací násobení definovanou v odstavci 1.1 tvoří grupu.

Návod: Prověřte vlastnosti (i), (iv), (v).

(6) (a) Zjistěte, zda grupa $(\vartheta, \circ)$ z příkladu 1 je abelovská.

(b) Dokažte, že grupa $(O_h, \circ)$ z příkladu 2 je abelovská a je podgrupou grupy $(\vartheta, \circ)$. Určete konkrétní tvar všech prvků grupy $(O_h, \circ)$.

(7) Dokažte Langrangeův teorém.

Návod: Zvolte dvě libovolné vedlejší třídy aH a bH grupy G podle podgrupy H. Zkonstruujte vzájemně jednoznačné zobrazení těchto tříd. Z existence takového zobrazení vyplývá, že levé třídy mají stejnou mohutnost. Pro důkaz Lagrangeova teorému pak stačí vzít v úvahu disjunktnost levých vedlejších tříd.

4.2 Okruhy a tělesa

Množina G s operacemi $+$ a $\circ$ se nazývá okruh, jestliže platí

$$
\begin{array}{ll}
\text{(i)} & (G,+) \text{ je abelovská grupa} \\
\text{(ii)} & a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \text{ pro lib. } a,b,c \in G \\
\text{(iii)} & (b+c) \circ a = (b \circ a) + (c \circ a) \text{ pro lib. } a,b,c \in G \\
& a \circ (b+c) = (a \circ b) + (a \circ c)\text{pro lib. } a,b,c \in G
\end{array}
\tag{4.2}
$$

Vlastnost (iii) se nazývá distributivním zákonem. Je-li pro libovolné prvky $a, b \in G$, $a \circ b = b \circ a$, hovoříme o komutativním okruhu. Důsledkem distributivního zákona je vztah

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \circ (b_1 + b_2 + \cdots + b_l) = a_1 \circ b_1 + \cdots + a_1 \circ b_l + a_2 \circ b_1 + \cdots + a_k \circ b_l$$

Dále platí $a \circ o = o \circ a = o$. Jestliže pro prvky $a \neq o$, $b \neq o$ platí $a \circ b = o$, nazýváme prvek a levým dělitelem nuly a prvek b pravým dělitelem nuly.

Existuje-li prvek $e \in G$ tak, že pro libovolné $a \in G$ platí $e \circ a = a \circ e = a$, nazýváme G okruhem s jednotkou (e je jednotka okruhu a často se označuje symbolem 1). Prvek $a \circ G$ nazveme regulárním (též invertibilním), jestliže existuje $a^{-1} \in G$ tak, že $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = 1$. Prvek a^{-1} je určen jednoznačně. Okruh $G = \{o\}$ se nazývá triviální. Netriviální komutativní okruh s jednotkou, který nemá dělitele nuly, tj. v němž z rovnosti $a \circ b = o$ vyplývá $a = o$ nebo $b = o$, nazýváme oborem integrity. Typickými příklady oborů integrity jsou: množina celých čísel s operacemi sčítání a násobení, množina racionálních čísel s týmiž operacemi. Příkladem okruhu s děliteli nuly je množina spojitých funkcí na intervalu [-1,1] s operacemi sčítání a násobení funkcí. (Například pro $f = f(x) = max(0, x)$, $g = g(x) = max(0, -x)$ je $f.g = 0$, ale $f \neq 0$, $g \neq 0$.)

Netriviální komutativní okruh s jednotkou, jehož každý nenulový prvek je regulární, nazýváme tělesem, případně polem. V dalším textu budeme užívat názvu pole.

Nechť F, G jsou okruhy. Zobrazení $\varphi : F \ni f \longrightarrow g = \varphi(f) \in G$ se nazývá homomorfní (též homomorfismus), platí-li pro libovolné prvky $f_1, f_2 \in F$ vztahy $\varphi(f_1 + f_2) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2)$, $\varphi(f_1 \circ f_2) = \varphi(f_1) \circ \varphi(f_2)$. Prostý homomorfismus na se nazývá izomorfismem. Okruhy F, G, pro které existuje izomorfismus $F \leftrightarrow G$, nazýváme izomorfními.

Příklad 3: Okruh zbytkových tříd modulo n. Označme $(Z, +, \cdot)$ množinu všech celých čísel spolu s operacemi sčítání a násobení. Čísla z_1, z_2 nazveme ekvivalentními, je-li zbytek po jejich dělení přirozeným číslem n tentýž. Takto definovaná relace je ekvivalencí na Z a definuje na Z rozklad na n disjunktních tříd $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{n-1}$. Třída Z_i zahrnuje prvky, jejichž zbytek po dělení číslem n je roven i. Označme $o(n) = \{Z_0, \ldots, Z_{n-1}\}$ a definujme operace + a $\cdot$ na množině $o(n)$ takto: Nechť $z_1 \in Z_i$, $z_2 \in Z_j$ jsou libovolně zvolené prvky. Pak $z_1 = p_1.n + i$, $z_2 = p_2.n + j$, $z_1 + z_2 = (p_1 + p_2).n + (i + j)$. Pro $i + j < n$ je $z_1 + z_2 \in Z_{i+j}$, pro $i + j \geq n$ je $z_1 + z_2 \in Z_{i+j-n}$. Pro libovolné prvky $z_1 \in Z_i$, $z_2 \in Z_j$ náleží tedy $z_1 + z_2$ vždy téže třídě Z_k. Označme $Z_k = Z_i + Z_j$, $i, j, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Podobně $z_1.z_2 = n.(p_1.p_2.n + p_1.j + p_2.i) + i.j$. Označme Z_1 třídu, jíž náleží součin $i.j$ a definujme $Z_i.Z_j = Z_1$. Množina $(o(n), +, \cdot)$ je okruhem, zvaným okruh zbytkových tříd modulo n.

Příklad 4: Funkci $\mathcal{P} : \mathbb{R} \ni x \longrightarrow \mathcal{P}(x) \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{P}(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

kde $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \neq 0$, nazýváme polynomem (mnohočlenem) n-tého stupně proměnné $x \in \mathbb{R}$ s reálnými koeficienty. Součet a součin polynomů P, Q definujeme jako součet a součin funkcí $P(x), Q(x)$ obvyklým způsobem. Množina $\mathbb{R}[x]$ polynomů reálné proměnné s reálnými koeficienty s operacemi součtu a součinu polynomů je okruhem.

Cvičení 4.2

(1) Nechť $(G, +, \circ)$ je okruh, v němž existuje prvek e a prvek e' tak, že pro libovolné $a \in G$ platí $e \circ a = a$, $a \circ e' = a$. Prvky e, e' se nazývají levou resp. pravou jednotkou okruhu. Dokažte, že $e = e'$.

Návod: Rovnosti $e \circ a = a$ resp. $a \circ e' = a$ aplikujte na případ $a = e'$ resp. $a = e$.

(2) Nechť $a \in G$ je regulární prvek okruhu s jednotkou. Dokažte, že inverzní prvek a^{-1}, definovaný rovnostmi $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$, je určen jednoznačně.

Návod: Z rovností $a \circ a_1^{-1} = a_1^{-1} \circ a = e$, $a \circ a_2^{-1} = a_2^{-1} \circ a = e$ dokažte rovnost $a_1^{-1} = a_2^{-1}$. Zapište například a_1^{-1} ve tvaru $a_1^{-1} = a_1^{-1} \circ e = a_1^{-1} \circ (a \circ a_2^{-1})$ a upravujte.

(3) Nechť $(G, +, \circ)$ je okruh s jednotkou, v němž k prvku $a \in G$ existuje tzv. levý inverzní prvek b s vlastností $b \circ a = e$ a pravý inverzní prvek c s vlastností $a \circ c = e$. Dokažte, že $b = c$.

Návod: Zapište b ve tvaru $b = b \circ e = b \circ (a \circ c)$ a upravujte.

(4) Nechť $(G, +, \circ)$ je těleso. Dokažte:

(a) Rovnice $a \circ x = b$, $y \circ a = b$ mají právě jedno řešení x, y.

(b) Pro $F = \{a \in G \mid a \neq o\}$ je $(F, \circ)$ grupou.

Návod: V případě (a) vyjádřete x a y explicitně pomocí inverzního prvku k prvku a. V případě (b) prověřte axiomy grupy (i) až (iii) resp. vlastnosti (i), (iv), (v).

(5) Nechť $(F, +, \circ)$, $(G, +, \circ)$ jsou okruhy a $\varphi : F \to G$ homomorfní zobrazení. Ukažte, že množina $\varphi(F) = \{g \in G \mid \exists f \in F : \varphi(f) = g\} \subseteq G$ s operacemi $+$ a $\circ$ definovanými na G je okruhem.

Návod: Prověřte axiomy okruhu pro množinu $\varphi(F)$.

(6) Nechť $(\mathbf{A}, +, \circ)$ je množina čtvercových matic řádu n s operacemi sčítání a násobení matic. Zjistěte, zda tato struktura je okruhem a určete další vlastnosti.

Výsledek: $(\mathbf{A}, +, \circ)$ je okruh s jednotkou, jednotkou je matice $\mathbf{E}$. Regulárními prvky jsou regulární matice (matice s nenulovým determinantem). Okruh je nekomutativní a má dělitele nuly.

(7) Nechť $\varphi : F \to G$ je homomorfní zobrazení okruhů. Dokažte

(a) $\varphi(o_F) = o_G$, kde o_F resp. o_G je nulový prvek okruhu F resp. G.

(b) Pro každé $a \in F$ je $\varphi(-a) = -\varphi(a)$.

(c) Je-li F okruhem s jednotkou, pak také G je okruhem s jednotkou a platí $\varphi(e_F) = e_G$.

(d) Pro regulární prvky a z okruhu F jsou i prvky $\varphi(a)$ regulární a platí $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$.

Návod: Rovnost (a) vyplývá z rovnosti $\varphi(a) = \varphi(a + o_F)$, vlastností homomorfního zobrazení a grupového axiomu (b) vzhledem k operaci sčítání. Pro důkaz vlastnosti (ii) využijte zřejmé rovnosti $\varphi(-a) = \varphi(o_F - a)$, vlastností homomorfního zobrazení a předchozí vlastnosti (a). Vlastnost (c) vyplývá z rovností $\varphi(a) = \varphi(a \circ e_F) = \varphi(e_F \circ a)$ vlastností homomorfního zobrazení a definice jednotky. Pro důkaz (d) využijte vztahů $\varphi(e_F) = e_G$, $\varphi(e_F) = \varphi(a \circ a^{-1}) = \varphi(a^{-1} \circ a)$ a vlastností homomorfního zobrazení.

(8) Dokažte, že množina $(o_{(n)}, +, \circ)$ zbytkových tříd modulo n (viz příklad 3) je komutativním okruhem s jednotkou, který má dělitele nuly. Určete nulový prvek, jednotku, opačný prvek k prvku Z_i, charakterizujte regulární prvky a prvky k nim inverzní.

Návod a výsledky: Prověřte axiomy okruhu na základě vlastností operací $+$ a $\circ$ definovaných v příkladu 3 pro zbytkové třídy modulo n. Platí $Z_0 = o$, $Z_0 = e$, $-Z_i = Z_{n-i}$, regulárními jsou prvky Z_i, pro něž existuje $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ tak, že $i.k = p.n$, $p = 0, 1, 2, \ldots$. Pak $Z_k = Z_i^{-1}$.

(9) Dokažte, že množina $\mathbb{R}[x]$ polynomů jedné reálné proměnné s reálnými koeficienty (viz příklad 4) s operacemi sčítání a násobení polynomů je komutativním okruhem s jednotkou. Charakterizujte regulární prvky.

Návod: Prověřte axiomy okruhu.

4.3 Vektorové prostory, izomorfismus vektorových prostorů

Nechť $\mathbb{P}$ je pole. Jeho prvky $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \in \mathbb{P}$ budeme nazývat skaláry. Nechť dále $(\mathrm{V}, +)$ je modul (aditivní abelovská grupa), jeho prvky $a, b, \ldots$ budeme nazývat vektory. Definujme zobrazení zvané násobení vektoru skalárem

$$\mathrm{V} \times \mathbb{P} \ni [a, \alpha] \longrightarrow \alpha a \in \mathrm{V}$$

vlastnostmi

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & (a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha & \text{linearita vzhledem ke skalárnímu činiteli} \\ \text{(ii)} & a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta & \text{linearita vzhledem k vektorovému činiteli} \\ \text{(iii)} & a(\alpha\beta) = (a\alpha)\beta & \text{asociativita} \\ \text{(iv)} & a^1 = a & \text{(1 je jednotka tělesa } \mathbb{P}) \end{array} \qquad (4.3)$$

Modul $(\mathrm{V}, +)$ s operací násobení skalárem, vyhovující vztahům (2.3), nazýváme pravým vektorovým prostorem nad polem $\mathbb{P}$ neboli pravým $\mathbb{P}$ – vektorovým prostorem.

Zcela analogicky lze definovat levý $\mathbb{P}$ – vektorový prostor. Vzhledem ke komutativnosti operace $\circ$ pole $\mathbb{P}$ klademe $a\alpha = \alpha a$ a hovoříme o vektorovém prostoru nad polem $\mathbb{P}$. V dalším se budeme zabývat výhradně tímto případem a navíc budeme klást $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{P} = \mathbb{C}$. Používat budeme zápisu αa, obvyklého pro levý $\mathbb{P}$ – vektorový prostor. Z vlastností vektorového prostoru vyplývá

$$\alpha \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha a_i \; ; \; \left(\sum_{j=1}^{l} \alpha_j \right) a = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j a \; ; \; \alpha(a-b) = \alpha a - \alpha b \; ; \; 0a = o \tag{4.4}$$

kde 0 je nulový prvek pole $\mathbb{P}$, o je nulový prvek vektorového prostoru V.

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad polem $\mathbb{P}$. Říkáme, že zobrazení $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ je homomorfní nebo též lineární, platí-li pro libovolné vektory $a, b \in \mathrm{V}$ a libovolný skalár $\alpha \in \mathbb{P}$

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \qquad \varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a) \tag{4.5}$$

O homomorfním zobrazení φ hovoříme také často jako o tzv. homomorfismu, prostý homomorfismus na je izomorfismem. Podrobně se budeme vlastnostmi homomorfních zobrazení vektorových prostorů zabývat v kapitole 4.

Příklad 5: Nechť $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, $(\mathrm{V}, +)$ je množina matic typu m/n, $\mathbf{A} = (\alpha_i^j)$, $\alpha_i^j \in \mathbb{R}$, s operací sčítání matic definovanou v odstavci 1.1. Podle výsledku úlohy (5) Cvičení 2.1 je $(\mathrm{V}, +)$ abelovskou grupou. Definujeme násobení matice skalárem rovněž podle odstavce 1.1. Vzniklá algebraická struktura je vektorovým prostorem nad polem reálných čísel. Zcela analogicky definujeme vektorový prostor matic typu m/n nad polem $\mathbb{C}$.

Příklad 6: Nechť $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ je množina reálných funkcí jedné reálné proměnné spojitých na intervalu $[0, 1]$ s operacemi sčítání funkcí a násobení funkce reálným číslem, definovanými obvyklým způsobem: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ pro libovolné $f, g \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in [0, 1]$. Z algebraického hlediska je $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$.

Nechť V je vektorový prostor nad polem $\mathbb{P}$. Nechť $(a_1, \ldots, a_k)$ je konečný systém vektorů prostoru V. Vektor tvaru $\gamma^1 a_1 + \ldots + \gamma^k a_k$, kde $\gamma^1, \ldots, \gamma^k \in \mathbb{P}$, se nazývá lineární kombinací vektorů $a_1, \ldots, a_k$ s koeficienty $\gamma^1, \ldots, \gamma^k$. Konečný systém $(a_1, \ldots, a_k)$ vektorů prostoru V se nazývá lineárně závislým, jestliže existují skaláry $\gamma^1, \ldots, \gamma^k$, z nichž alespoň jeden je nenulový, takové, že platí

$$\gamma^1 a_1 + \cdots + \gamma^k a_k = 0.$$

V opačném případě, tj. v případě, že z rovnosti $\gamma^i a_i = 0$ vyplývá $\gamma^i = 0$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, k\}$, hovoříme o systému lineárně nezávislém. Nechť V je vektorový prostor nad polem $\mathbb{P}$. Předpokládejme, že v prostoru V existuje konečný systém vektorů $(e_1, \ldots, e_n)$ s vlastnostmi:

(i) systém $(e_1, \ldots, e_n)$ je lineárně nezávislý,
(ii) systém $(e_1, \ldots, e_n, a)$ je lineárně závislý pro libovolný vektor $a \in \mathrm{V}$, $a \neq 0$.

$(e_1, \ldots, e_n)$ se nazývá maximálním lineárně nezávislým systémem vektorů, nebo též bází vektorového prostoru V. Vektorový prostor V se nazývá prostorem konečné dimenze.

V odstavci 4.1, v němž se budeme problematikou bází podrobněji zabývat, uvidíme, že všechny báze v prostoru konečné dimenze mají stejný počet prvků, který definuje tzv. dimenzi (rozměr) vektorového prostoru V. Každý vektor $a \in \mathrm{V}$ je pak lineární kombinací báze, tj. například pro vektorový prostor dimenze n je $a = \alpha^i e_i$, $\alpha^i \in \mathbb{P}$ jsou jednoznačně určené složky vektoru a v dané bázi $(e_1, \ldots, e_n)$.

Poznámka: Vektorový prostor $\mathrm{V} = \{0\}$ má nulovou dimenzi, neboť v něm neexistuje báze (zdůvodněte).

Poznámka: Vektorový prostor $\mathrm{V} \neq \{0\}$, v němž neexistuje konečný systém vektorů s vlastnostmi (i) a (ii), se nazývá prostorem nekonečné dimenze.

Cvičení 4.3

(1) Dokažte vztahy (2.4).

Návod: Využijte vlastností operace násobení skalárem.

(2) Nechť $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ je homomorfní zobrazení vektorových prostorů V, W nad polem $\mathbb{P}$. Dokažte, že $\varphi(0_\mathrm{V}) = 0_\mathrm{W}$.

Návod: Využijte rovnosti $\varphi(a) = \varphi(a + 0_\mathrm{V})$, vlastností homomorfního zobrazení a grupových vlastností vektorových prostorů.

(3) Nechť $\mathcal{P}$ je množina polynomů s reálnými koeficienty jedné reálné proměnné s obvyklou operací sčítání polynomů. Násobení polynomu číslem definujeme rovněž běžným způsobem (pro $\mathcal{P}(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_0$ je $\alpha \mathcal{P}(x) = \alpha \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_0$. Dokažte, že $\mathcal{P}$ s operacemi sčítání a násobení skalárem je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$.

Návod: Prověřte axiomy vektorového prostoru.

(4) Nechť $\mathbb{R}^n$ je množina uspořádaných n-tic reálných čísel tvaru $\mathbb{R}^n \ni a = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$. Definujme operace sčítání n-tic a násobení n-tice reálným číslem takto:

$$c = a + b = (\alpha^1 + \beta^1, \ldots, \alpha^n + \beta^n) \qquad d = \alpha a = (\alpha\alpha^1, \ldots, \alpha\alpha^n)$$

Dokažte, že $\mathbb{R}^n$ spolu s operacemi uvedenými výše je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$.

Návod: Prověřte axiomy vektorového prostoru.

(5) Nechť $\mathcal{P}_n$ je množina polynomů jedné reálné proměnné s reálnými koeficienty nižšího stupně než n s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu skalárem, definovanými v úloze (3). Dokažte, že $\mathcal{P}_n$ je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}^n$ a je izomorfní s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^n$ uspořádaných n-tic (úloha (4)).

Návod: Pro $\mathcal{P}(x) = \mathbb{P}_n$ je $\mathcal{P}(x) = \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_0$. Polynom je tedy jednoznačně určen uspořádanou n-ticí $(\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_0)$. Na základě této skutečnosti definujte přirozený izomorfismus prostorů $\mathbb{P}_n$ a $\mathbb{R}^n$. Pokuste se najít ještě jiný izomorfismus.

(6) Dokažte, že každý vektorový prostor V_n dimenze n nad $\mathbb{P}$ je izomorfní s prostorem $\mathbb{P}^n$ uspořádaných n-tic tvaru $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \in \mathbb{P} \times \ldots \times \mathbb{P}$ s operacemi sčítání n-tic a násobení n-tice skalárem $\alpha \in \mathbb{P}$ (viz úloha (4)).

Návod: Zvolte bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ ve V_n a uvědomte si, že každý vektor $a \in \mathrm{V}_n$ je dán jednoznačným rozkladem tvaru $a = \alpha^1 e_1 + \ldots + \alpha^n e_n$, je tedy v dané bázi určen n-ticí $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$. Dokažte, že zobrazení

$$\varphi : \mathrm{V}_n \ni a \longrightarrow \varphi(a) = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \in \mathbb{P}$$

je izomorfismus.

(7) Nechť $\mathbb{E}^3$ je trojrozměrný euklidovský prostor ve smyslu elementární euklidovské geometrie, tj. prostor, v němž jsou definovány vzdálenosti a úhly. Libovolný bod A je zadán svými souřadnicemi $A = (x_A, y_A, z_A)$ ve zvolené afinní soustavě souřadnic $(0; x, y, z)$. Uspořádanou dvojici bodů $[A, B]$ nazveme vázaným vektorem. Vázaný vektor je určen svou velikostí a orientovanou přímkou AB (nositelkou). Součet dvou vázaných vektorů a násobek vektoru číslem definujeme obvyklým geometrickým způsobem. Volným vektorem $[A, B]$ rozumíme množinu všech vázaných vektorů stejné délky jako vektor $[A, B]$ a souhlasně kolineárních s vektorem $[A, B]$. Definujte součet volných vektorů a násobek volného vektoru číslem. Definujte nulový vektor a volný vektor opačný k danému volnému vektoru. Ukažte, že množina V_3 všech volných vektorů s operacemi součtu vektorů a skalárního násobku vektoru je vektorovým prostorem nad $\mathbb{R}$. Nechť a je volný vektor definovaný uspořádanou dvojicí $[A, B]$. Souřadnicemi vektoru a v dané afinní soustavě souřadnic rozumíme trojici čísel $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$. Určete souřadnice součtu $c = a + b$ a násobku $d = \alpha a$. Ukažte, že prostor volných vektorů je izomorfní s prostorem $\mathbb{R}^3$ (viz úloha (4)). Určete bázi ve V_3 spojenou s afinní souřadnicovou soustavou $(0; x, y, z)$.

Návod: K prověření axiomů vektorového prostoru pro případ množiny volných vektorů s operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru číslem definovanými geometricky použijte znalostí z oblasti euklidovské geometrie. Dále zvolte zobrazení $\mathrm{V}_3 \to \mathbb{R}^3$ přirozeným způsobem, který se nabízí na základě popisu vektoru pomocí jeho souřadnic a ukažte, že toto zobrazení je izomorfismem. (Euklidovský prostor $\mathbb{E}^3$ označujeme také symbolem $\mathbb{R}^3$.)

Kapitola 5

Soustavy lineárních rovnic

Řada úloh nejen z oblasti lineární a multilineární algebry, ale i z jiných matematických, fyzikálních nebo technických oborů, vede k problému nalezení všech řešení soustavy k lineárních algebraických rovnic o n neznámých. Tímto problémem se budeme nyní zabývat. Úvahy budeme provádět nad polem reálných nebo komplexních čísel.

5.1 Soustavy lineárních rovnic, ekvivalentní soustavy

Nechť k, n jsou přirozená čísla. Soustavou k lineárních algebraických rovnic o n neznámých rozumíme soubor rovnic tvaru

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1^1 x^1 & + & \alpha_2^1 x^2 & + & \dots & + & \alpha_n^1 x^n & = & \beta^1 \\ \alpha_1^2 x^1 & + & \alpha_2^2 x^2 & + & \dots & + & \alpha_n^2 x^n & = & \beta^2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & \vdots \\ \alpha_1^k x^1 & + & \alpha_2^k x^2 & + & \dots & + & \alpha_n^k x^n & = & \beta^k \end{array} \tag{5.1}$$

kde $\alpha_i^j, \beta^j \in \mathbb{P}$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$, $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ je soubor neznámých, matice koeficientů

$$\mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_n^k \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B^T} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 & \beta^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_n^k & \beta^k \end{array}\right)$$

představují tzv. *matici soustavy* a *rozšířenou matici soustavy.* (Matice $\mathbf{B^T}$ je získána „rozšířením" matice $\mathbf{A^T}$ o sloupec pravých stran rovnic soustavy $(\beta)^{\mathbf{T}} = (\beta^1, \dots, \beta^n)^{\mathbf{T}}$. Maticový zápis rovnic 5.1 je následující:

$$(x)\mathbf{A} = (\beta) \quad \text{nebo} \quad x^i \alpha_i^j = \beta^j \tag{5.2}$$

kde levá strana je lineární kombinací řádků $(\alpha_i) = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^k)$ matice $\mathbf{A}$ s koeficienty x^i.

Uspořádaná n-tice $(\chi) = (\chi^1, \dots, \chi^n) \in \mathbb{P} \times \dots \times \mathbb{P}$ se nazývá *řešením soustavy* 5.1, jsou-li po dosazení $x^i = \chi^i$, $i \in \{1, \dots, n\}$ splněny všechny rovnice soustavy. *Souberem řešení soustavy* rozumíme množinu všech jejích řešení. Soustava 5.1, pro kterou je $\beta^j = 0$ pro všechna $j \in \{1, \dots, k\}$, se nazývá *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní.*

Nechť $(x)\mathbf{A} = (\beta)$, $(x)\mathbf{A}' = (\beta')$ jsou dvě soustavy s neprázdným souborem řešení (tzv. *řešitelné soustavy*). Říkáme, že tyto soustavy jsou *ekvivalentní*, mají-li stejný soubor řešení (každé řešení soustavy $(x)\mathbf{A} = (\beta)$ je i řešením soustavy $(x)\mathbf{A}' = (\beta')$ a naopak). Praktický problém nalezení všech řešení dané soustavy se velmi často převádí na problém nalezení všech řešení vhodné soustavy ekvivalentní, která může mít mnohem jednodušší tvar.

Příklad 1: Ekvivalentní soustavy musí mít pochopitelně stejný počet neznámých, počtem rovnic se však mohou lišit. Například soustavy

$$x^1 + 2x^2 - x^3 = 1 \qquad \text{a} \qquad \begin{array}{rcl} 2x^1 + 4x^2 - 2x^3 & = & 2 \\ 4x^2 + 8x^2 - 4x^3 & = & 4 \end{array}$$

jsou soustavami ekvivalentními.

Věta 5.1. *Nechť $(x)\mathbf{A} = (\beta)$, $(x)\mathbf{A}' = (\beta')$ jsou soustavy o n neznámých s neprázdným souborem řešení. Jestliže existuje regulární matice $\mathbf{Q}$ taková, že $\mathbf{B'^T} = \mathbf{Q}\mathbf{B^T}$, kde $\mathbf{B^T}$ a $\mathbf{B'^T}$ jsou rozšířené matice soustav, pak jsou soustavy ekvivalentní.*

Důkaz: Nechť (χ) je libovolné řešení soustavy $(x)\mathbf{A} = (\beta)$, tj. $(\chi)\mathbf{A} = (\beta)$. Pro libovolnou matici $\mathbf{Q}$ pak platí $(\chi)\mathbf{A}\mathbf{Q}^\mathbf{T} = (\beta)\mathbf{Q}^\mathbf{T}$. Je-li $\mathbf{Q}$ taková matice, pro kterou je $\mathbf{B}'^\mathbf{T} = \mathbf{Q}\mathbf{B}^\mathbf{T}$ podle předpokladu věty, je $\mathbf{B}' = \mathbf{B}\mathbf{Q}^\mathbf{T}$ a tedy i $\mathbf{A}' = \mathbf{A}\mathbf{Q}^\mathbf{T}$, $(\beta') = (\beta)\mathbf{Q}^\mathbf{T}$ a n-tice (χ) je tedy řešení soustavy $(x)\mathbf{A}' = (\beta')$. Nechť naopak (χ') je řešením soustavy $(x)\mathbf{A}' = (\beta')$. Pak $(\chi')\mathbf{A}' = (\beta')$ a po vynásobení maticí $\mathbf{Q}^{-1\mathbf{T}}$ zprava dostáváme $(\chi')\mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1\mathbf{T}} = (\beta')\mathbf{Q}^{-1\mathbf{T}}$. Vzhledem k předpokladu věty je $\mathbf{B}'^\mathbf{T} = \mathbf{Q}\mathbf{B}^\mathbf{T}$, tj. $\mathbf{B} = (\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}'^\mathbf{T})^\mathbf{T} = \mathbf{B}'\mathbf{Q}^{-1\mathbf{T}}$. Odtud pak $\mathbf{A} = \mathbf{A}'\mathbf{Q}^{-1\mathbf{T}}$ a $(\beta) = (\beta')\mathbf{Q}^{-1\mathbf{T}}$, takže n-tice (χ') je řešením soustavy $(x)\mathbf{A} = (\beta)$. Soustavy jsou tedy ekvivalentní.

$\diamondsuit$

Z věty 5.1 vyplývají tyto důsledky:

(i) Nehcť $(x)\mathbf{A} = (\beta)$, $(x)\mathbf{A}' = (\beta')$ jsou řešitelné soustavy. Nechť jejich rozšířené matice $\mathbf{B}^\mathbf{T}$ a $\mathbf{B}'^\mathbf{T}$ jsou ekvivalentní z hlediska definice v odstavci 1.2, tj. matice $\mathbf{B}'$ lze získat z matice $\mathbf{B}$ konečným počtem řádkových elementárních úprav. Pak soustavy $(x)\mathbf{A} = (\beta)$, $(x)\mathbf{A}' = (\beta')$ jsou ekvivalentní.

(ii) Každá řešitelná soustava je ekvivalentní alespoň jedné soustavě s rozšířenou maticí ve schodovitém tvaru.

Cvičení 5.1

(1) Dokažte důsledky (i) a (ii) věty 5.1.

Návod: Využijte skutečnosti, že konečný počet řádkových elementárních úprav matice lze realizovat vynásobením matice zleva jistou regulární maticí, která je součinem elementárních matic (viz odstavec 1.2). Dále využijte věty 1.3 a věty 5.1.

(2) Nechť $(x)\mathbf{A} = (\beta)$ je soustava n rovnic o n neznámých, jajíž matice $\mathbf{A}^\mathbf{T}$ je regulární.(Taková soustava se nazývá *kramerovská.*) Dokažte, že tato soustava má právě jedno řešení a že toto řešení má tvar

$$(\chi) = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(\det \mathbf{B}_1, \ldots, \det \mathbf{B}_n),$$

kde matice $\mathbf{B}_i{}^\mathbf{T}$ vznikne nahrazením sloupce (α_i) v matici $\mathbf{A}^\mathbf{T}$ sloupcem pravých stran soustavy (β).

Návod: Z maticové rovnice $(x)\mathbf{A} = (\beta)$ vyjádřete matici (x) typu $1/n$ explicitně vynásobením maticí $\mathbf{A}^{-1}$ zprava. Dále využijte vztahů 1.8 a 1.5.

(3) Určete řešení následujících kramerovských soustav:

(i)

$$\begin{aligned} 3x^1 + 2x^2 + x^3 &= 5 \\ 4x^2 + 5x^3 &= 2 \\ x^1 + 3x^2 \phantom{{}+ 5x^3} &= 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} x^1 + 3x^2 - x^3 &= 4 \\ 2x^1 + x^2 \phantom{{}- x^3} &= 4 \\ x^1 - x^2 + 2x^3 &= 5 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} x^1 + 3x^2 &= 4 \\ 2x^1 + x^3 &= 0 \\ -x^1 + 2x^2 + x^3 &= \alpha \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} 4x^1 + x^2 - x^3 &= \beta^1 \\ - x^2 + x^3 &= \beta^2 \\ 2x^1 + 3x^2 - 2x^3 &= \beta^3 \end{aligned}$$

$(\beta) = (0,0,0); (3,5,-1); (2,-10,24)$

Výsledek: (i) $(\frac{69}{39}, -\frac{23}{39}, \frac{34}{39})$ (ii) $(1,2,3)$ (iii) $(\frac{-3\alpha+8}{11}, \frac{\alpha+12}{11}, \frac{6\alpha-16}{11})$
(iv) $(0,0,0); (2,5,10); (-2,8,-2)$

5.2 Frobeniova věta

Problém existence a jednoznačnosti řešení soustavy lineárních rovnic velmi úzce souvisí s hodností matice a rozšířené matice soustavy.

Věta 5.2. *Frobeniova věta. Soustava k rovnic o n neznámých má řešení právě tehdy, je-li hodnost její matice $\mathbf{A^T}$ rovna hodnosti matice rozšířené $\mathbf{B^T}$, tj.* $\mathrm{h}(\mathbf{A^T}) = \mathrm{h}(\mathbf{B^T})$.

Důkaz: Z důsledku (i) vět 1.4 a 1.5 vyplývá, že hodnost matice je rovna nejvyššímu možnému počtu jejích lineárně nezávislých sloupců, tj. $\mathrm{h}(\mathbf{A^T}) = \mathrm{h}(\mathbf{A})$, $\mathrm{h}(\mathbf{B^T}) = \mathrm{h}(\mathbf{B})$.

(i) Předpokládejme, že soustava $(x)\mathbf{A} = (\beta)$ má řešení, tj. že existuje n-tice $(\chi) = (\chi^1, \dots, \chi^n)$ taková, že platí $(\chi)\mathbf{A} = (\beta)$. Poslední sloupec (β) rozšířené matice soustavy je tedy lineární kombinací sloupců předchozích, koeficienty lineární kombinace jsou čísla χ^i. Je proto zřejmé, že $\mathrm{h}(\mathbf{A^T}) = \mathrm{h}(\mathbf{B^T})$.

(ii) Nechť naopak platí $\mathrm{h}(\mathbf{A^T}) = \mathrm{h}(\mathbf{B^T})$, hodnost obou matic je tedy určena nejvyšším počtem lineárně nezávislých sloupců matice $\mathbf{A^T}$. Poslední sloupec (β) matice $\mathbf{B^T}$ musí proto být lineární kombinací sloupců matice $\mathbf{A^T}$, tj. musí existovat čísla $\chi^1, \dots, \chi^n$ tak, že platí

$$\chi^1(\alpha_1) + \chi^2(\alpha_2) + \ldots + \chi^n(\alpha_n) = (\beta),$$

n-tice $(\chi) = (\chi^1, \dots, \chi^n)$ je řešením soustavy.

$\diamondsuit$

Bezprostředním důsledkem Frobeniovy věty je skutečnost, že libovolná homogenní soustava lineárních rovnic má neprázdný soubor řešení (je vždy řešitelná), neboť poslední sloupec rozšířené matice je nulový. Řešením každé homogenní soustavy je nulová n-tice $(\chi^1, \dots, \chi^n) = (0, \dots, 0)$, která představuje tzv. triviální řešení.

Předpokládejme, že $(x)\mathbf{A} = (\beta)$ je řešitelná soustava, tj. $\mathrm{h}(\mathbf{A^T}) = \mathrm{h}(\mathbf{B^T}) = h$ (platí $h \le \min(k,n)$). Podle důsledku (ii) věty 5.1 existuje ekvivalentní soustava $(x)\mathbf{A}' = (\beta')$, jejíž rozšířená matice je ve schodovitém tvaru. Předpokládejme, že neznámé jsou číslovány tak, že lineárně nezávislé jsou prvé sloupce $(\alpha_1), \ldots, (\alpha_h)$. Pak

$$\mathbf{B}'^{\mathbf{T}} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} \alpha_1^{1'} & \alpha_2^{1'} & \cdots & \alpha_h^{1'} & \alpha_{h+1}^{1}{}' & \cdots & \alpha_n^{1'} & \beta^{1'} \\ 0 & \alpha_2^{2'} & \cdots & \alpha_h^{2'} & \alpha_{h+1}^{2}{}' & \cdots & \alpha_n^{2'} & \beta^{2'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_h^{h'} & \alpha_{h+1}^{h}{}' & \cdots & \alpha_n^{h'} & \beta^{h'} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$a_i^{i'} \neq 0$ pro $i \in \{1, \ldots, k\}$. Odpovídající soustava rovnic má tvar

$$\begin{array}{ccccccccccc} \alpha_1^{1'}x^1 & + & \alpha_2^{1'}x^2 & + \ldots + & \alpha_h^{1'}x^h & + & \alpha_{h+1}^{1}{}'x^{h+1} & + \ldots + & \alpha_n^{1'}x^n & = & \beta^{1'} \\ & & \alpha_2^{2'}x^2 & + \ldots + & \alpha_h^{2'}x^h & + & \alpha_{h+1}^{2}{}'x^{h+1} & + \ldots + & \alpha_n^{2'}x^n & = & \beta^{2'} \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & \alpha_h^{h'}x^h & + & \alpha_{h+1}^{h}{}'x^{h+1} & + \ldots + & \alpha_n^{h'}x^n & = & \beta^{h'} \end{array} \tag{5.3}$$

Řešením této soustavy je každá n-tice $(\chi^1, \ldots, \chi^n)$, pro kterou jsou hodnoty $\chi^1, \ldots, \chi^h$ dány vztahy

$$\begin{array}{rcl} \chi^h & = & \frac{\beta^{h'} - \alpha_{h+1}^{h}{}'\chi^{h+1} - \ldots - \alpha_n^{h'}\chi^n}{\alpha_h^{h'}} \\ \\ \chi^{h-1} & = & \frac{\beta^{h-1'} - \alpha_h^{h-1'}\chi^h - \alpha_{h+1}^{h-1'}\chi^{h+1} - \ldots - \alpha_n^{h-1'}\chi^n}{\alpha_{h-1}^{h-1'}} \\ \vdots & & \\ \chi^1 & = & \frac{\beta^{1'} - \alpha_2^{1'}\chi^2 - \ldots - \alpha_h^{1'}\chi^h - \alpha_{h+1}^{1}{}'\chi^{h+1} - \ldots - \alpha_n^{1'}\chi^n}{\alpha_1^{1'}} \end{array} \tag{5.4}$$

a hodnoty $\chi^{h+1}, \ldots, \chi^n$ jsou libovolné. Postupným dosazováním za $\chi^h, \chi^{h-1}, \ldots, \chi^1$ dostaneme

$$\begin{array}{rcl} \chi^1 & = & \gamma^1 - \gamma_{h+1}^1\chi^{h+1} - \ldots - \gamma_n^1\chi^n \\ \vdots & & \\ \chi^h & = & \gamma^h - \gamma_{h+1}^h\chi^{h+1} - \ldots - \gamma_n^h\chi^n \end{array}$$

$\gamma^i, \gamma_{h+1}^i, \ldots, \gamma_n^i \in \mathbb{P}$ pro $i \in \{1, \ldots, h\}$. Všechna řešení výchozí soustavy jsou charakterizována předpisem

$$(\gamma^1 - \sum_{i=h+1}^{n} \gamma_i^1\chi^i, \gamma^2 - \sum_{i=h+1}^{n} \gamma_i^2\chi^i, \ldots, \gamma^h - \sum_{i=h+1}^{n} \gamma_i^h\chi^i, \chi^{h+1}, \ldots, \chi^n) \tag{5.5}$$

kde $\chi^{h+1}, \ldots, \chi^n$ jsou libovolné hodnoty tzv. *volných neznámých* a koeficienty $\gamma^i, \gamma_{h+1}^i, \ldots, \gamma_n^i$, $i \in \{1, \ldots, h\}$ jsou jednoznačně určeny rozšířenou maticí soustavy resp. jejím schodovitým tvarem. Výše uvedený postup představuje i praktický návod na nalezení řešení soustavy.

Věta 5.3. *Nechť $(x)\mathbf{A} = (\beta)$ je soustava k rovnic o n neznámých. Soustava má právě jedno řešení právě tehdy, když $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{B}) = n$. Soustava má nekonečně mnoho řešení právě tehdy, když $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{B}) < \min(k, n)$. Soustava nemá žádné řešení právě tehdy, když $\mathrm{h}(\mathbf{B}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}) + 1$.*

Důkaz: Důkaz věty 5.3 vyplývá bezprostředně z věty 5.2 a vztahů 5.4 a 5.5.

$\diamondsuit$

Příklad 2: Řešme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x^1 & + & 2x^2 & - & x^3 & + & x^4 & - & 5x^5 & = & 0 \\ -2x^1 & - & 4x^2 & + & 2x^3 & + & 4x^4 & + & 4x^5 & = & -6 \\ -x^1 & - & 2x^2 & + & x^3 & + & 5x^4 & - & x^5 & = & -6 \end{array}$$

$$\mathbf{B}^{\mathbf{T}} = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 4 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 1 & 5 & -1 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tedy platí $\mathrm{h}(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}) = \mathrm{h}(\mathbf{B}^{\mathbf{T}}) = 2$. Soustava má řešení, která jsou charakterizována libovolnou volbou tří volných neznámých. Pro vyjádření zbývajících neznámých však nelze použít přímo vztahů 5.4, neboť v našem případě nejsou prvé dva sloupce $(\alpha_1), (\alpha_2)$ matice $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$ nezávislé. Je tedy nutno buď přečíslovat neznámé nebo volné neznámé volit jinak než jako $\chi^{h+1}, \ldots, \chi^n$. Realizujeme druhou možnost a za volné neznámé označíme χ^5, χ^2, χ^3. Pak $\chi^4 = -1 + \chi^5$, $\chi^1 = 1 - 2\chi^2 + \chi^3 + 4\chi^5$. Řešení mají tedy tvar

$$(\chi) = (1 - 2\chi^2 + \chi^3 + 4\chi^5, \chi^2, \chi^3, 1 - \chi^5, \chi^5); \qquad \chi^2, \chi^3, \chi^5 \in \mathbb{R}$$

Cvičení 5.2

(1) Předpokládejte, že $(x)\mathbf{A} = (\beta)$ je řešitelná soustava k rovnic o n neznámých. Vyjádřete koeficienty $\gamma^i, \gamma^i_j, i \in \{1, \ldots, h\}, j \in \{h+1, \ldots, n\}$ ve vztazích 5.5 explicitně pomocí prvků schodovitého tvaru rozšířené matice soustavy.

Návod: Ze vztahů 5.3 vyplývá

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1^{1'}x^1 & + & \alpha_2^{1'}x^2 & + & \ldots & + & \alpha_h^{1'}x^h & = & \beta^{1'} - \alpha_i^{1'}x^i \\ & & \alpha_2^{2'}x^2 & + & \ldots & + & \alpha_h^{2'}x^h & = & \beta^{2'} - \alpha_i^{2'}x^i \\ & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \alpha_h^{h'}x^h & = & \beta^{h'} - \alpha_i^{h'}x^i \end{array}$$

$i \in \{h+1, \ldots, n\}$. Pro určitou volbu volných neznámých $(\chi^{h+1}, \ldots, \chi^n)$ dostáváme pro $(x^1, \ldots, x^h)$ soustavu rovnic $(x)\mathbf{A}_h = (\vartheta)$, kde $(\vartheta) = (\vartheta^1, \ldots, \vartheta^h) = ((\beta^{j'} - \alpha_i^{j'}x^i))$, ${\mathbf{A}_h}^{\mathbf{T}} = (\alpha_l^{j'})$, $l, j \in \{1, \ldots, h\}$, $\alpha_l^{j'} = 0$ pro $l > j$. Vzhledem k tomu, že matice ${\mathbf{A}_h}^{\mathbf{T}}$ je regulární, využijte pro další výpočet například vztahů pro řešení kramerovských soustav (Cvičení 5.1, úloha (2)). Pro praktický výpočet může být užitečný i vztah $(\chi^1, \ldots, \chi^h) = (\vartheta){\mathbf{A}_h}^{-1}$.

(2) Proveďte podrobně důkaz věty 5.3.

Návod: Pro případ $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{B})$ si uvědomte souvislost mezi počtem volných neznámých a mohutností souboru řešení (podstatné je, zda je počet volných neznámých nulový nebo nenulový). Dále uveďte v souvislost počet volných neznámých a hodnost matic **A**, **B**. Pro $\mathrm{h}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{h}(\mathbf{B})$ si uvědomte, že žádný jiný případ, než $\mathrm{h}(\mathbf{B}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}) + 1$ nemůže nastat. Zdůvodnění neexistence řešení plyne přímo z Frobeniovy věty.

(3) Nechť $(x)\mathbf{A} = (0)$ je homogenní soustava k rovnic o n neznámých. Stanovte podmínku nutnou a postačující k tomu, aby soustava měla i jiné řešení než triviální. Jaký tvar má tato podmínka pro $k = n$?

Návod: Využijte věty 5.3.

(4) Určete všechna řešení následujících soustav rovnic. Použijte úpravy matice $\mathbf{B^T}$ na schodovitý tvar.

(i)

$$\begin{aligned} 3x + y &= -1 \\ 2x + y &= 2 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} -2x + y &= 2 \\ -4x - 2y &= -4 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} x^1 + x^2 + 2x^3 &= -1 \\ 2x^1 - x^2 + 2x^3 &= -4 \\ 4x^1 + x^2 + 4x^3 &= -2 \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 + 3x^3 &= 4 \\ 2x^1 + x^2 - x^3 &= 3 \\ 3x^1 + 3x^2 + 2x^3 &= 10 \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} 2x^1 + x^2 - 4x^3 &= 0 \\ 3x^1 + 5x^2 - 7x^3 &= 0 \\ 4x^1 - 5x^2 - 6x^3 &= 0 \\ 7x^1 - 13x^3 &= 0 \end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 &= 0 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 &= 0 \\ x^1 + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 &= 0 \\ x^1 + 4x^2 + 10x^3 + 20x^4 &= 0 \end{aligned}$$

Výsledek: (i) (-3,8) (ii) $(\chi, 2 + 2\chi)$, $\chi \in \mathbb{R}$ (iii) (1,2,-2) (iv) nemá řešení (v) (0,0,0) (vi) (0,0,0,0)

(5) Nechť $\mathbb{R}^n$ je vektorový prostor uspořádaných reálných n-tic, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ jsou vektory (n-tice), $a_i = (\alpha_i) = (\alpha_i^1, \ldots, \alpha_i^n)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$. Formulujte podmínku nutnou a postačující pro to, aby vektory $a_1, \ldots, a_k$ byly lineárně závislé. Jaký tvar má tato podmínka pro $k = n$?

Návod: Vektory $a_1, \ldots, a_k$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existují čísla $\chi^1, \ldots, \chi^k$ tak, že alespoň jedno z nich je různé od nuly a platí $\chi^1 a_1 + \ldots + \chi^k a_k = \mathbf{o}$. Rozepište tuto vektorovou rovnici do složek. Získáte tím homogenní soustavu n rovnic o k neznámých $\chi^1, \ldots, \chi^k$. Podmínka nutná a postačující pro lineární závislost vektorů $a_1, \ldots, a_k$ je tedy totožná s podmínkou nutnou a postačující pro to, aby daná homogenní soutava měla netriviální řešení.

(6) Nechť V_3 je vektorový prostor volných vektorů z úlohy (7) Cvičení 2.3. Předpokádejte, že vektory jsou určeny svými souřadnicemi v afinní soustavě $(0; x, y, z)$ a zapište podmínku nutnou a postačující pro to, aby nenulové vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ byly komplanární, tj. rovnoběžné s touž rovinou.

Návod: Uveďte do souvislosti komplanárnost tří vektorů a jejich lineární závislost a využijte výsledku úlohy (5).

Výsledek: Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V_3$ jsou komplanární právě tehdy, je-li determinant matice třetího řádu, utvořené z jejich souřadnic, roven nule.

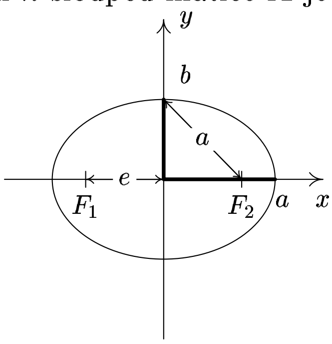
5.3 Prostor řešení soustav lineárních rovnic

V tomto odstavci formulujeme tvrzení, která umožní naprosto obecně charakterizovat všechna řešení soustavy lineárních rovnic.

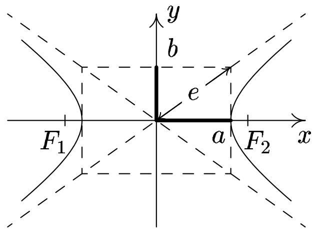
Nechť $(x)\mathbf{A} = (0)$ je homogenní soustava k rovnic o n neznámých. Každé řešení $(\chi^1, \ldots, \chi^n)$ této soustavy lze chápat jako prvek vektorového prostoru V_n uspořádaných n-tic nad $\mathbb{P}$ (úloha (4) Cvičení 2.3). Označme $S = \{(\chi) \in V_n | (\chi)$ je řešením soustavy $(x)\mathbf{A} = (0)\}$. S je tedy množina všech řešení dané soustavy. Zřejmě $(0) \in S$ (viz odstavec 5.2). Přímým dosazením se přesvědčíme, že pro libovolné $(\chi_1), (\chi_2) \in S$ je i $(\chi_1)+(\chi_2) \in S$ a $\alpha(\chi_1) \in S$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{P}$:

$$(\chi_1)\mathbf{A} = (0),\ (\chi_2)\mathbf{A} = (0) \ \Rightarrow\ ((\chi_1) + (\chi_2))\mathbf{A} = (\chi_1)\mathbf{A} + (\chi_2)\mathbf{A} = (0),$$
$$(\alpha(\chi_1))\mathbf{A} = \alpha(\chi_1)\mathbf{A} = (0).$$

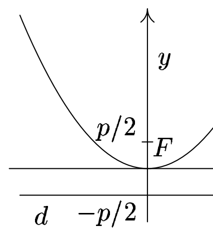
Odtud vyplývá, že množina S všech řešení dané homogenní soustavy má strukturu vektorového prostoru vzhledem k operacím sčítání n-tic a násobení n-tice skalárem. Stanovíme ještě dimenzi prostoru S. Nechť $h = \mathrm{h}(\mathbf{A}, (h \leq \min(k, n))$. Předpokládejme, že neznámé jsou očíslovány tak, že prvých h sloupců matice $\mathbf{A}$ je lineárně nezávislých. Řešení sou-



(i2)



(i3)



(ii1)

stavy má pak tvar 5.5, v němž je třeba dosadit $\gamma^1 = \ldots = \gamma^h = 0$.

$$(\chi) = (-\gamma_i^1\chi^i, -\gamma_i^2\chi^i, \ldots, -\gamma_i^h\chi^i, \chi^{h+1}, \ldots, \chi^n), \quad i \in \{h+1, \ldots, n\}, \tag{5.6}$$

kde $\chi^{h+1}, \ldots, \chi^n$ jsou volné neznámé. Pro danou volbu volných neznámých jsou již neznámé $(\chi^1, \ldots, \chi^h)$ určeny jednoznačně. Jakoukoliv volbu volných neznámých $\chi^{h+1}, \ldots, \chi^n$ lze vyjádřit ve tvaru lineární kombinace

$$(\chi^{h+1}, \ldots, \chi^n) = \chi^{h+1}(1, 0, \ldots, 0) + \chi^{h+2}(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + \chi^n(0, \ldots, 0, 1).$$

Všechny uspořádané $(n-h)$-tice $(\chi^{h+1},\dots,\chi^n)$ tedy tvoří vektorový prostor dimenze $(n-h)$. Prostor S má tedy rovněž dimenzi $(n-h)$. Získané výsledky shrnuje následující věta:

Věta 5.4. *Všechna řešení homogenní soustavy k rovnic o n neznámých tvoří $(n-h)$-rozměrný vektorový podprostor prostoru n-tic s operacemi součtu n-tic a násobení n-tice skalárem.*

Vztah 5.6 představuje tzv. *obecné řešení homogenní soustavy.*

Poznámka: Báze prostoru S je tvořena například n-ticemi

$$\begin{array}{l}
(-\gamma^1_{h+1}, -\gamma^2_{h+1}, \dots, -\gamma^n_{h+1}, 1,\ 0,\ 0, \dots, 0)\\
(-\gamma^1_{h+2}, -\gamma^2_{h+2}, \dots, -\gamma^n_{h+2}, 0,\ 1,\ 0, \dots, 0)\\
\quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\
(\ -\gamma^1_n,\ -\gamma^2_n,\ \dots,\ -\gamma^n_n,\ 0, \dots\dots\dots, 1)
\end{array}$$

Uvažujme nyní o nehomogenní soustavě $(x)\mathbf{A} = (\beta)$. Nechť $(\chi_1), (\chi_2)$ jsou dvě různá řešení této soustavy, tj. $(\chi_1)\mathbf{A} = (\beta)$, $(\chi_2)\mathbf{A} = (\beta)$. Odtud pak $((\chi_1) - (\chi_2))\mathbf{A} = (0)$. n-tice $(\chi_1) - (\chi_2)$ je tedy řešením tzv. *homogenizované* soustavy $(x)\mathbf{A} = (0)$. Každé řešení nehomeogenní soustavy rovnic je tedy tvaru $(\chi) = (\chi_p) + (\chi_0)$, kde (χ_0) je obecné řešení homogenizované soustavy a (χ_p) je libovolné řešení soustavy nehomogenní — tzv. *partikulární řešení*. Předpisem $(\chi) = (\chi_p) + (\chi_0)$ je určeno *obecné řešení nehomogenní soustavy* (tj. všechna možná řešení dané nehomogenní soustavy).

Cvičení 5.3

(1) Řešte soustavy rovnic

(i)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & x^2 & + & 3x^3 & - & x^4 & = & 3\\
x^1 & + & 3x^2 & - & x^3 & + & 2x^4 & = & 5\\
-2x^1 & - & 5x^2 & + & 2x^3 & + & x^4 & = & -4\\
-x^1 & - & x^2 & + & 4x^3 & + & 2x^4 & = & 4
\end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
7x^1 & - & 4x^2 & + & 9x^3 & + & 2x^4 & + & 2x^5 & = & 0\\
5x^1 & + & 8x^2 & + & 7x^3 & - & 4x^4 & + & 2x^5 & = & 0\\
3x^1 & - & 8x^2 & + & 5x^3 & + & 4x^4 & + & 2x^5 & = & 0\\
7x^1 & - & 2x^2 & + & 2x^3 & + & x^4 & - & 5x^5 & = & 0
\end{array}$$

Výsledek:

(i) $(\chi) = (-14 + 15\chi^4, 6 - 5\chi^4, -1 + 2\chi^4, \chi^4)$

(ii) $(\chi) = (\chi^1, \chi^2, -\chi^1, 2\chi^2, \chi^1)$

(2) Řešení soustavy rovnic z úlohy (1i) vyjádřete jako součet obecného řešení homogenizované soustavy a partikulárního řešení nehomogenní soustavy.

Výsledek: $(\chi) = (-14, 6, -1, 0) + (15\chi^4, -5\chi^4, 2\chi^4, \chi^4)$

5.4 Příklady soustav lineárních rovnic v geometrických aplikacích

Nutnost řešení soustav lineárních rovnic vyvstává například při studiu lineárních geometrických útvarů v euklidovském prostoru. Budeme se zabývat lineárními útvary v $\mathbb{R}^3$, tj. rovinami a přímkami. Rovnice útvarů budeme vyjadřovat v obecné afinní soustavě souřadnic $(0; x, y, z)$. Speciálním případem afinní soustavy je soustava kartézská, v níž je třeba řešit úlohy vyžadující výpočet vzdáleností nebo úhlů.

Přímka p v $\mathbb{R}^3$ je určena bodem $A = (x_A, y_A, z_A)$ a nenulovým směrovým vektorem $\mathbf{a} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$. (Vektory zde chápeme ve smyslu úlohy (7) Cvičení 2.3.). *Rovina* ϱ je určena bodem $B = (x_B, y_B, z_B)$ a nekolineárními směrovými vektory $\mathbf{b} = (\beta^1, \beta^2, \beta^3)$, $\mathbf{c} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$. Přímka p je v souřadnicové soustavě $(0; x, y, z)$ zadána *parametrickými rovnicemi přímky* takto:

$$p = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = x_A + \alpha^1 t, y = y_A + \alpha^2 t, z = z_A + \alpha^3 t, t \in \mathbb{R}\}$$

t je *parametr bodu X na přímce p*. Rovina ϱ je zadána *parametrickými rovnicemi roviny* takto:

$$\varrho = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = x_B + \beta^1 r + \gamma^1 s, y = y_B + \beta^2 r + \gamma^2 s,$$
$$z = z_B + \beta^3 r + \gamma^3 s; r, s \in \mathbb{R}\}$$

r, s jsou *parametry bodu X v rovině ϱ*. Často používáme symbolického zápisu

$$p: \ X = A + \mathbf{a}t, \qquad \varrho: \ X = B + \mathbf{b}r + \mathbf{c}s \tag{5.7}$$

Soustavu parametrických rovnic roviny přepišme do tvaru

$$\beta^1 r + \gamma^1 s = x - x_B, \quad \beta^2 r + \gamma^2 s = y - y_B, \quad \beta^3 r + \gamma^3 s = z - z_B$$

Jedná se o soustavu tří rovnic, kterou pro daný bod $X \in \varrho$ můžeme chápat jako soustavu o dvou neznámých r, s. Nutnou a postačující podmínkou její řešitelnosti je podmínka

$$\mathrm{h}\begin{pmatrix} \beta^1 & \gamma^1 \\ \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta^3 & \gamma^3 \end{pmatrix} = \mathrm{h}\begin{pmatrix} \beta^1 & \gamma^1 & x - x_B \\ \beta^2 & \gamma^2 & y - y_B \\ \beta^3 & \gamma^3 & z - z_B \end{pmatrix}.$$

Poněvadž jsou vektory $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ nekolineární tj. lineárně nezávislé, je hodnost matice soustavy automaticky rovna dvěma a podmínka řešitelnosti je tedy dána vztahem

$$\det\begin{pmatrix} \beta^1 & \gamma^1 & x - x_B \\ \beta^2 & \gamma^2 & y - y_B \\ \beta^3 & \gamma^3 & z - z_B \end{pmatrix} = 0,$$

který geometricky znamená komplanaritu vektorů $[B, X], \mathbf{c}, \mathbf{b}$. Odtud dostáváme *obecnou rovnici roviny*, která již neobsahuje parametry:

$$\varrho = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0\}$$

kde

$$\alpha = \det\begin{pmatrix} \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta^3 & \gamma^3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \det\begin{pmatrix} \beta^3 & \gamma^3 \\ \beta^1 & \gamma^1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \det\begin{pmatrix} \beta^1 & \gamma^1 \\ \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix},$$

$$\delta = \det\begin{pmatrix} \beta^1 & \gamma^1 & -x_B \\ \beta^2 & \gamma^2 & -y_B \\ \beta^3 & \gamma^3 & -z_B \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

Vzhledem k tomu, že hodnost matice tvořené souřadnicemi vektorů $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ je rovna dvěma, je alespoň jedno z čísel α, β, γ různé od nuly. Označme levou stranu rovnice roviny symbolem $A(X)$.

Řešitelnost soustavy rovnic $\alpha^1 t = x - x_A$, $\alpha^2 t = y - y_B$, $\alpha^3 t = z - z_A$, kterou dostaneme pro neznámou t z parametrických rovnic přímky, je zaručena podmínkou

$$\mathrm{h}\begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} = \mathrm{h}\begin{pmatrix} \alpha^1 & x - x_A \\ \alpha^2 & y - y_A \\ \alpha^3 & z - z_A \end{pmatrix} = 1$$

tedy

$$\begin{aligned} -\alpha^2 x + \alpha^1 y + (\alpha^2 x_A - \alpha^1 y_A) &= 0 \\ -\alpha^3 y + \alpha^2 z + (\alpha^3 y_A - \alpha^2 z_A) &= 0 \\ -\alpha^3 x + \alpha^1 z + (\alpha^3 x_A - \alpha^1 z_A) &= 0 \end{aligned}$$

Tyto rovnice jsou závislé. Vzhledem k tomu, že vektor $\mathbf{a}$ je nenulový, je alespoň jedno z čísel $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ nenulové a alespoň dvě z těchto rovnic jsou rovnicemi nerovnoběžných rovin. Přímka p je průsečnicí těcho rovin. Přímku lze tedy zadávat *soustavou obecných rovnic přímky* ve tvaru

$$p = \{X \in \mathbb{R}^3, X = (x, y, z) | \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0, \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0\}, \tag{5.9}$$

kde

$$\mathrm{h}\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = 2. \quad \text{Zdůvodněte.}$$

Příklad 3: $A = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 1)$, $\mathbf{c} = (3, 0, -1)$. Rovina ϱ určená bodem A a vektory $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ má parametrické rovnice $x = 3s$, $y = 1 + 2r$, $z = 1 + r - s$ a obecnou rovnici

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 3 & x \\ 2 & 0 & y-1 \\ 1 & -1 & z-1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{tj.} \quad -2x + 3y - 6z + 3 = 0.$$

Přímka p určená bodem A a vektorem $\mathbf{b}$ má parametrické rovnice $x = 0$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 + t$ a soustavu obecných rovnic například $x = 0$, $y - 2z + 1 = 0$. Podle zadání by přímka p měla ležet v rovině ϱ. Jak se o tom přesvědčíte?

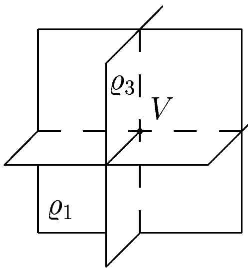
Příklad 4: Nechť ϱ je rovina o rovnici $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ a $\mathbf{a} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ vektor; stanovíme podmínku nutnou a postačující pro to, aby vektor $\mathbf{a}$ byl rovnoběžný s rovinou ϱ. Pro vektor $\mathbf{a}$ platí $\mathbf{a} \| \varrho$ právě tehdy, když existují body $A, X \in \varrho$ takové, že $(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$. Pro tyto body je ovšem splněna rovnice roviny ϱ, tj. $\alpha x_A + \beta y_A + \gamma z_A + \delta = 0$, $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$. Odečtením dostáváme $\alpha\alpha^1 + \beta\alpha^2 + \gamma\alpha^3 = 0$. Vektor $\mathbf{a}$ je tedy rovnoběžný s rovinou právě tehdy, platí-li $\alpha\alpha^1 + \beta\alpha^2 + \gamma\alpha^3 = 0$.

Příklad 5: Vzájemná poloha tří rovin. Jsou dány roviny

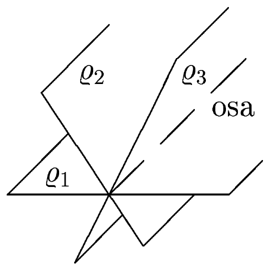
$$\begin{aligned} \varrho_1: \quad & \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 &= 0 \\ \varrho_2: \quad & \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 &= 0 \\ \varrho_3: \quad & \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 &= 0 \end{aligned}$$

Vzájemná poloha těchto tří rovin je z algebraického hlediska určena řešením soustavy tří rovnic o neznámých x, y, z (hledají se společné body rovin $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$). Z geometrického hlediska připadají v úvahu tyto možnosti vzájemné polohy:

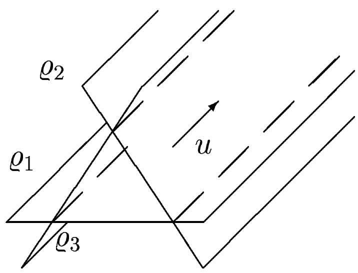
(i) Roviny mají společný právě jeden bod, definují tzv. trs rovin prvního druhu. Společný bod je vrcholem trsu.



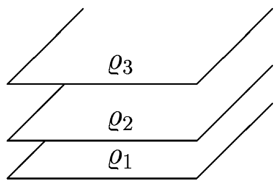
(ii) Roviny mají společnou přímku a definují svazek rovin prvního druhu. Společná přímka se nazývá osou svazku.



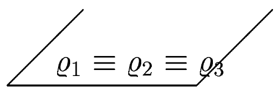
(iii) Roviny nemají společný žádný bod, mají však společný právě jeden směr, tj. existuje vektor $\mathbf{u} = (\vartheta^1, \vartheta^2, \vartheta^3)$ rovnoběžný s každou z rovin $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ a žádný vektor nekolineární s vektorem $\mathbf{u}$ již není rovnoběžný se všemi rovinami $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ současně. Roviny $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ definují trs rovin druhého druhu.



(iv) Roviny nemají společný žádný bod a jsou rovnoběžné, definují svazek rovin druhého druhu.



(v) Roviny jsou totožné.



Rozebereme jednotlivé případy z algebraického hlediska. Soustava rovnic, určující společné body rovin, je nehomogenní soustava s maticí

$$\mathbf{B^T} = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_1 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} & \delta_1 \\ \mathbf{A^T} & \delta_2 \\ & \delta_3 \end{array}\right)$$

Soustava rovnic určující společné směry (viz. příklad 5.4) je homogenní a její matice je $\mathbf{A^T}$.

(i) Nehomogenní soustava má právě jedno řešení právě tehdy, je-li $\mathrm{h}(\mathbf{A^T}) = \mathrm{h}(\mathbf{B^T}) = 3$, tj. $\det \mathbf{A} \neq 0$.

(ii) Nehomogenní soustava má nekonečně mnoho řešení, odpovídajících bodům přímky. Příslušná homogenizovaná soustava má jednorozměrný prostor řešení, určený směrovým vektorem této přímky. Je tedy $\mathrm{h}(\mathbf{A^T}) = \mathrm{h}(\mathbf{B^T}) = 2$.

(iii) Homogenní soustavá má jednorozměrný prostor řešení, tj. $\mathrm{h}(\mathbf{A^T}) = 2$, nehomogenní soustava řešení nemá, tj. $\mathrm{h}(\mathbf{B^T}) = 3$.

(iv) Nehomogenní soustava nemá řešení, odpovídající soustava homogenní má dvojrozměrný prostor řešení. Je tedy $\mathrm{h}(\mathbf{A^T}) = 1$, $\mathrm{h}(\mathbf{B^T}) = 2$.

(v) Nehomogenní soustava má nekonečně mnoho řešení, odpovídající bodům roviny. Příslušná soustava homogenní má dvojrozměrný prostor řešení. Platí $\mathrm{h}(\mathbf{A^T}) = \mathrm{h}(\mathbf{B^T}) = 1$.

Shrnutí:

vzájemná poloha rovin	$\mathrm{h}(\mathbf{A^T})$	$\mathrm{h}(\mathbf{B^T})$
trs rovin prvního druhu	3	3
svazek rovin prvního druhu	2	2
trs rovin druhého druhu	2	3
svazek rovin druhého druhu	1	2
totožné roviny	1	1

Nechť například

$$\begin{aligned} \varrho_1 &: 5x - 2y \phantom{{}+z} + 4 = 0 \\ \varrho_2 &: 3x \phantom{{}-2y} + z - 5 = 0 \\ \varrho_2 &: 8x - 2y + z + 7 = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B^T} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -5 \\ 8 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

$\mathrm{h}(\mathbf{A})^{\mathbf{T}} = 2$, $\mathrm{h}(\mathbf{B})^{\mathbf{T}} = 3$. Roviny tvoří trs druhého druhu, společný směr je řešením homogenní soustavy rovnic $5x - 2y = 0$, $3x + z = 0$, tedy $\mathbf{u} = (2t, 5t, -6t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Příklad 6: Vzájemná poloha dvou přímek. Jsou dány přímky

$$p: \quad \begin{array}{lrcl} \varrho_1: & \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 & = & 0 \\ \varrho_2: & \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 & = & 0 \end{array} \quad \mathrm{h}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = 2$$

$$q: \quad \begin{array}{lrcl} \varrho_3: & \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 & = & 0 \\ \varrho_4: & \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z + \delta_4 & = & 0 \end{array} \quad \mathrm{h}\begin{pmatrix} \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{pmatrix} = 2$$

Vzájemná poloha dvou přímek je dána vzájemnou polohou čtyř rovin. Z geometrického hlediska mohou nastat tyto možnosti:

(i) Přímky p, q jsou mimoběžné.

(ii) Přímky p, q jsou různoběžné.

(iii) Přímky p, q jsou rovnoběžné.

(iv) Přímky p, q jsou totožné.

Z algebraického hlediska jde o soustavu čtyř rovnic pro tři neznámé x, y, z, jejíž matice je

$$\mathbf{B^T} = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_1 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} & \delta_1 \\ \mathbf{A^T} & \delta_2 \\ & \delta_3 \\ & \delta_4 \end{array}\right)$$

Matice odpovídající homogenní soustavy je $\mathbf{A^T}$.

(i) Nehomogenní soustava nemá řešení, neboť roviny ϱ_1, $\varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ nemají žádný společný bod. Roviny nemají ani žádný společný směr, takže homogenizovaná soustava nemá jiné řešení než triviální. Je tedy $\mathrm{h}(\mathbf{A^T}) = 3$, $\mathrm{h}(\mathbf{B^T}) = 4$.

(ii) Nehomogenní soustava má právě jedno řešení, určující průsečík přímek, tj. $\mathrm{h}(\mathbf{A^T}) = \mathrm{h}(\mathbf{B^T}) = 3$.

(iii) Roviny ϱ_1, $\varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ nemají žádný společný bod, takže nehomogenní soustava nemá řešení. Mají však společný směr, shodný se směrem rovnoběžek p, q, takže odpovídající homogenní soustava má jednorozměrný prostor řešení. Je tedy $\mathrm{h}(\mathbf{A^T}) = 2$, $\mathrm{h}(\mathbf{B^T}) = 3$.

(iv) Nehomogenní soustava má nekonečně mnoho řešení, odpovídajících bodům přímky. Příslušná homogenní soustava má jednorozměrný prostor řešení, určený směrovým vektorem této přímky. Je tedy $\mathrm{h}(\mathbf{A^T}) = \mathrm{h}(\mathbf{B^T}) = 2$.

Shrnutí:

vzájemná poloha rovin	$h(\mathbf{A^T})$	$h(\mathbf{B^T})$
mimoběžné přímky	3	4
různoběžné přímky	3	3
rovnoběžné přímky	2	3
totožné přímky	2	2

Nechť například

$$\begin{aligned} p: &\quad x + z - 1 = 0, \quad x - 2y + 3 = 0 \\ q: &\quad 3x + y - z + 13 = 0, \quad y + 2z - 8 = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{B^T} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & -6 & 24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h(\mathbf{A^T}) = 3$, $h(\mathbf{B^T}) = 3$, přímky p, q jsou tedy různoběžky. Jejich průsečík je dán řešením odpovídající soustavy rovnic. Matice vzniklá úpravou matice $\mathbf{B^T}$ na schodovitý tvar je maticí ekvivalentní soustavy, jejímž řešením je trojice $P = (3, 0, -4)$. Touto trojicí jsou určeny souřadnice průsečíku přímek p, q.

Při řešení příkladů o vzájemné poloze rovin a přímek jsme použili vět 5.2, 5.3 a 5.4.

Nyní budeme charakterizovat svazky a trsy rovin. *Svazkem rovin prvního druhu* rozumíme množinu všech takových rovin v $\mathbb{R}^3$, které mají společnou právě jednu přímku p, zvanou *osa svazku*. Svazek rovin prvního druhu je tedy zadán svou osou p, resp. libovolnými dvěma rovinami svazku.

Věta 5.5. *Rovina ϱ o rovnici $A(X) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ patří do svazku $\mathcal{S}_1(\varrho_1, \varrho_2)$ rovin prvního druhu určeného rovinami ϱ_1, ϱ_2 o rovnicích $A_1(X) = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0$, $A_2(X) = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0$ právě tehdy, když existují čísla λ_1, λ_2 z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že platí*

$$A(X) = \lambda_1 A_1(X) + \lambda_2 A_2(X) \quad \text{tj.}$$

$$\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2,\ \beta = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2,\ \gamma = \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2,\ \delta = \lambda_1\delta_1 + \lambda_2\delta_2.$$

Důkaz: Nechť roviny ϱ_1, ϱ_2 určují svazek rovin prvního druhu. Pak hodnost matice typu 2/4 tvořené koeficienty $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, $i \in \{1, 2\}$ je stejná jako hodnost matice typu 2/3 tvořené pouze koeficienty $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ a je rovna dvěma. Nalezení společných bodů rovin $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ je ekvivalentní řešení soustavy rovnic o matici

$$\mathbf{B^T} = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_1 & \delta_2 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} & \delta_1 \\ \mathbf{A^T} & \delta_2 \\ & \delta \end{array}\right)$$

Řešení této soustavy vytvářejí přímku právě tehdy, je-li $\mathrm{h}(\mathbf{A^T}) = \mathrm{h}(\mathbf{B^T}) = 2$, tj. je-li třetí řádek matice $\mathbf{B^T}$ lineární kombinací prvých dvou řádků. Koeficienty lineární kombinace označme λ_1, λ_2. Požadavek, aby alespoň jeden z těchto koeficientů byl různý od nuly, vyplývá z toho, že v opačném případě bychom dostali $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 0$, což by bylo ve sporu se skutečností, že $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ je rovnicí roviny.

$\diamondsuit$

Svazkem rovin druhého druhu rozumíme množinu všech takových rovin, v $\mathbb{R}^3$, které jsou rovnoběžné se zadanou rovinou ϱ_1.

Věta 5.6. *Rovina ϱ o rovnici $A(X) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ patří do svazku $\mathcal{S}_2(\varrho_1)$ rovin druhého druhu určeného rovinou ϱ_1 o rovnici $A_1(X) = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0$ právě tehdy, když existuje číslo $\lambda_1 \neq 0$ takové, že $\alpha = \lambda_1\alpha_1$, $\beta = \lambda_1\beta_1$, $\gamma = \lambda_1\gamma_1$.*

Důkaz: Viz. Cvičení 5.4.

$\diamondsuit$

Trsem rovin prvního druhu nazýváme množinu všech takových rovin v $\mathbb{R}^3$, které mají společný právě jeden bod, zvaný *vrchol trsu*. Trs prvního druhu je zadán buď svým vrcholem nebo třemi rovinami $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ vyhovujícími případu (i) z příkladu 5.4.

Věta 5.7. *Rovina ϱ o rovnici $A(X) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ patří do trsu $\mathcal{T}_1(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ rovin prvního druhu určeného rovinami $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ o rovnicích $A_1(X) = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0$, $A_2(X) = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0$, $A_3(X) = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 = 0$, právě tehdy, když existují čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že platí*

$$A(X) = \lambda_1 A_1(X) + \lambda_2 A_2(X) + \lambda_3 A_3(X) \quad \text{tj.}$$

$$\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3,\ \beta = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3,$$

$$\gamma = \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \lambda_3\gamma_3,\ \delta = \lambda_1\delta_1 + \lambda_2\delta_2 + \lambda_3\delta_3.$$

Důkaz: Vzhledem k předpokladu, že $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ tvoří trs rovin prvního druhu, platí

$$\mathrm{h}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \mathrm{h}\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_1 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{array}\right) = 3$$

$\varrho \in \mathcal{T}_1(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ právě tehdy, když soustava rovnic, tvořená rovnicemi rovin $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho$ má právě jedno řešení, určující vrchol trsu. Podmínkou nutnou a postačující pro to je

$$\mathrm{h}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \mathrm{h}\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_1 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right) = 3$$

Čtvrtý řádek matice tvořené koeficienty všech čtyř rovin, tedy je lineární kombinací prvých tří řádků. Požadavek, aby alespoň jeden z koeficientů $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ lineární kombinace byl nenulový, vyplývá opět ze skutečnosti, že čísla $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ určují rovnici roviny.

$\diamondsuit$

Trsem rovin druhého druhu nazýváme množinu všech rovin v $\mathbb{R}^3$, které mají společný právě jeden směr a žádný bod. Trs rovin druhého druhu je zadán například třemi rovinami, které nemají společný žádný bod, mají však společný právě jeden směr (případ (iii) v příkladu 5.4).

Věta 5.8. *Rovina ϱ o rovnici $A(X) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ patří do trsu $\mathcal{T}_2(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ rovin druhého druhu určeného rovinami $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ o rovnicích $A_1(X) = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0$, $A_2(X) = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0$, $A_3(X) = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta_3 = 0$, právě tehdy, když existují čísla $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ která nejsou řešením soustavy rovnic $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 = 0$, $\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3 = 0$, $\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \lambda_3\gamma_3 = 0$, taková, že platí*

$$A(X) = \lambda_1 A_1(X) + \lambda_2 A_2(X) + \lambda_3 A_3(X) \quad \text{tj.}$$

$$\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3, \ \beta = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3,$$
$$\gamma = \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \lambda_3\gamma_3, \ \delta = \lambda_1\delta_1 + \lambda_2\delta_2 + \lambda_3\delta_3.$$

Důkaz: Roviny $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ tvoří trs druhého druhu, takže podle výsledku příkladu 5.4 je

$$\mathrm{h}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = 2 \quad \mathrm{h}\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_1 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{array}\right) = 3$$

$\varrho \in \mathcal{T}_2(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ právě tehdy, když směr společný rovinám $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ je rovnoběžný i s rovinou ϱ, tj.

$$\mathrm{h}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = 2 \quad \mathrm{h}\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_1 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{array}\right) = 3$$

Poslední řádek rozšířené matice je tedy lineární kombinací prvých třech řádků. Koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ určující tuto lineární kombinaci, nesmějí být řešením soustavy rovnic $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 = 0$, $\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3 = 0$, $\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \lambda_3\gamma_3 = 0$ proto, že levé strany těchto rovnic mají být koeficienty v rovnici roviny ϱ.

$\diamondsuit$

Příklad 7: Určete rovnici roviny, která prochází přímkou $p\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - z = 0, x + y - z + 5 = 0\}$ a je rovnoběžná s přímkou $q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 7t, y = 2 - t, z = -1 + 4t, t \in \mathbb{R}\}$. Přímka p je osou svazku prvního druhu určeného rovinami $\varrho_1 : A_1(X) = 2x - z = 0$, $\varrho_2 : A_2(X) = x + y - z + 5 = 0$. Hledaná rovina ϱ má přímkou p procházet, musí tedy náležet do svazku. Levou stranu rovnice roviny ϱ hledáme podle věty 5.5 ve tvaru

$$\begin{aligned} A(X) &= \lambda_1 A_1(X) + \lambda_2 A_2(X) = \lambda_1(2x - z) + \lambda_2(x + y - z + 5) \\ A(X) &= x(2\lambda_1 + \lambda_2) + y\lambda_2 - z(\lambda_1 + \lambda_2) + 5\lambda_2 \end{aligned}$$

Proto

$$\varrho: \quad (2\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_2 y - (\lambda_1 + \lambda_2)z + 5\lambda_2 = 0$$

Poslední rovnice charakterizuje všechny možné roviny náležející danému svazku. Máli však být rovina ϱ rovnoběžná s přímkou q, musí směrový vektér této přímky $\mathbf{a} = (7, -1, 4)$ splňovat rovnici roviny ϱ bez absolutního členu:

$$\mathbf{a} \| \varrho \Rightarrow (2\lambda_1 + \lambda_2) \cdot 7 + \lambda_2(-1) + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot 4 = 0 \Rightarrow 10\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

Volbou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -5$ získáme rovnici roviny ϱ:

$$\varrho: \quad -3x - 5y + 4z - 25 = 0$$

Příklad 8: Bodem $M = (2, 3, 1)$ veďte přímku, která je příčkou mimoběžných přímek $p\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x+y = 0, x-y+z+4 = 0\}$, $q\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x+3y-1 = 0, y+z-2 = 0\}$. Nejprve prověříme mimoběžnost:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$\mathrm{h}(\mathbf{A}^\mathbf{T}) = 3$, $\mathrm{h}(\mathbf{B}^\mathbf{T}) = 4$, přímky p, q jsou tedy mimoběžné (viz. příklad 5.4).

Příčkou mimoběžných přímek p, q rozumíme každou takovou přímku r, která je různoběžná jak s přímkou p, tak s přímkou q. Příčkou mimoběžek je tedy každá taková přímka, která je průsečnicí rovin ϱ_1, ϱ_2 z nichž ϱ_1 náleží do svazku určeného osou p a ϱ_2 do svazku určeného osou q (jedná se o svazky rovin prvního duhu). Současně má na hledané příčce r ležet daný bod M. Musí tedy být $M \in \varrho_1$, $M \in \varrho_2$.

$$\varrho_1: \quad A_1(x) = \lambda_1(x + y) + \lambda_2(x - y + z + 4) = 0$$

$$M \in \varrho_1 \Rightarrow 5\lambda_1 + 4\lambda = 0, \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -5$$

$$\varrho_2: \quad A_2(x) = \lambda_1'(x + 3y - 1) + \lambda_2'(y + z - 2) = 0,$$

$$M \in \varrho_2 \Rightarrow 10\lambda_1' + 2\lambda = 0', \lambda_1' = 1, \lambda_2' = -5$$

$$\varrho_1: \quad -z + 9y - 5z - 20 = 0, \quad \varrho_2: \quad x - 2y - 5z + 9 = 0$$

$$r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -z + 9y - 5z - 20 = 0, x - 2y - 5z + 9 = 0\}$$

Cvičení 5.4

(1) Dokažte větu 5.6.

Návod: Uvědomte si, že roviny $\varrho_1 : \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0$, $\varrho : \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ jsou rovnoběžné právě tehdy, když soustava homogenních rovnic $\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0$, $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ má dvojrozměrný prostor řešení a použijte věty 5.4.

(2) Vysvětlete, proč ve větě 5.7, týkající se trsu prvního druhu, stačí u čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ požadovat, aby alespoň jedno z nich bylo různé od nuly, zatímco ve větě 5.8 o trsu druhého druhu je nutno požadovat, aby tato čísla nebyla řešením jisté soutavy rovnic. V obou případech je přitom účel tohoto požadavku stejný — aby výrazem $A(X) = \lambda_1 A_1(X) + \lambda_2 A_2(X) + \lambda_3 A_3(X)$ byla určena levá strana rovnice roviny.

Návod: Na základě hodnosti matice homogenní soustavy rovnic $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 = 0$, $\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3 = 0$, $\lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \lambda_3\gamma_3 = 0$ v případě věty 5.7 a 5.8 charakterizujte množinu řešení této soustavy v každém z obou případů. Vysvětlení rozdílu mezi formulací týkající se koeficientů $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ve větě 5.7 vyplývá z tohoto rozboru.

(3) Charakterizujte vzájemnou polohu přímky a roviny.

Návod: Převeďte úlohu na problém vzájemné polohy tří rovin.

(4) Ve svazku rovin určeném rovinami $\varrho_1 : x + 2y - 3z - 6 = 0$, $\varrho_2 : 2y + 5z - 4 = 0$ najděte rovinu, která je rovnoběžná s přímkou $p\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y = 0, 3x + z + 1 = 0\}$.

Výsledek: $\varrho : 16x + 50y - 3z - 132 = 0$

(5) Rozhodněte o vzájemné poloze přímky a roviny:

(i) $\varrho : 5x - z - 4 = 0$, $p : 3x + 5y - 7z + 16 = 0, 2x - y + z - 6 = 0$

(ii) $\varrho : y + 4z + 17 = 0$, $p : 2x + 3y + 6z - 10 = 0, x + y + z + 5 = 0$

Výsledek: (i) různoběžné, průsečík $(2, 4, 6)$ (ii) rovnoběžné

(6) Rozhodněte o vzájemné poloze trojice rovin

(i) $\varrho_1 : 2x - 4y + 5z - 21 = 0$, $\varrho_2 : x - 3z + 18 = 0$, $\varrho_3 : 6x + y + z - 30 = 0$

(ii) $\varrho_1 : 2x + y - z + 3 = 0$, $\varrho_2 : 3x - z = 0$, $\varrho_3 : 3y + 2z = 0$

Výsledek: (i) různoběžné, $P = (3, 5, 7)$, (ii) různoběžné $P = (1, -2, 3)$.

(7) Rozhodněte o vzájemné poloze dvojice přímek:

(i) $p : x + y + z - 1 = 0, 2x + 3y + 6z - 6 = 0$
$q : y + 4z = 0, 3x + 4y + 7z = 0$

(ii) $p : x = -1 + 3t, y = -3 - 2t, z = 2 - t$
$q : x = 2 + 2t, y = -1 + 3t, z = 1 - 5t$

Výsledek: (i) rovnoběžky, společný směr $\mathbf{u} = (3, -4, 1)$, (ii) mimoběžky

(8) Určete rovnici roviny ϱ, která patří do svazku určeného rovinami $\varrho_1 : 2x-3y+z-3 = 0$, $\varrho_2 : x+3y+2z+1 = 0$ a prochází průsečíkem rovin $\sigma_1 : 2x+y-z+3 = 0$, $\sigma_2 : 3x-z = 0$, $\sigma_3 : 3y + 2z = 0$.

Výsledek: $\varrho : 2x + 15y + 7z + 7 = 0$

(9) Určete rovnici roviny ϱ, která prochází průsečíkem rovin $\varrho_1 : 2x + y - z - 2 = 0$, $\varrho_2 : x - 3y + z + 1 = 0$, $\varrho_3 : x + y + z - 3 = 0$ a je rovnoběžná s rovinou $\sigma : x + y + 2z = 0$.

Výsledek: $\varrho : x + y + 2z + 9 = 0$

(10) Zjistěte, zda roviny $\varrho_1 : 5x - z + 3 = 0$, $\varrho_2 : 2x - y - 4z + 5 = 0$, $\varrho_3 : 3y + 2z - 1 = 0$, $\varrho_4 : 3x + 4y + 5z - 3 = 0$ patří do téhož trsu.

Výsledek: Roviny patří do téhož trsu. Jeho vrcholem je bod $V = (\frac{20}{11}, \frac{25}{11}, \frac{-13}{11})$.

(11) Určete příčku mimoběžek $p : x = 1+t, y = 2t, z = 3-t$, $q : x = 5+3t', y = -2+2t', z = 1 + t'$, která leží v rovině $\varrho : x = 1 + r, y = -6 + 2r + 3s, z = 2 - s$.

Výsledek: $x = -16 + 10t, y = -16 + 11t, z = 6 + 3t$

Část III
Lineární transformace (operátory) na vektorových prostorech

Vektorový prostor je algebraickou strukturou, s níž se ve fyzikálních aplikacích setkáváme takřka na každém kroku: od aplikací zcela přirozených a jednoduchých, vyplývajících ze skutečnosti, že řada fyzikálních veličin má přímo vektorový charakter a je tedy třeba a nimi jako a vektory počítat, k aplikacím, které již nejsou tak zcela triviální - objevuji se například v kvantové mechanice, kde je stav soustavy, jejíž chování sledujeme, popsán prvkem určitého vektorového prostoru, zatímco měřitelné fyzikální veličiny mají z matematického hlediska charakter lineárních transformací neboli operátorů ve vektorovém prostoru stavů. Lineární transformace vektorového prostoru $\mathfrak{U}$ do vektorového prostoru $\mathfrak{U}$ je homomorfní zobrazení $\mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$. Významné fyzikální aplikace v řadě oblastí má problém vlastních hodnot lineárních transformací vektorového prostoru $\mathfrak{U}$ do sebe. Tento problém je formulován jako úloha o nalezení všech takových vektorů a prostoru $\mathfrak{U}$, jimž je danou lineární transformací $\varphi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ přiřazen kolineární vektor $\varphi(a)$, takže platí $\varphi(a) = \lambda a$. Číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ nebo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá vlastní hodnota příslušná vlastnímu vektoru a. K vyřešení tohoto problému bude směřovat převážná část úvah této kapitoly [1].

[1] V této kapitole se budeme převážně zabývat pouze konečnými systémy vektorů. Systémů nekonečných (spočetných i nespočetných) si krátce všimneme v odstavci

Kapitola 6

Vlastnosti vektorových prostorů

6.1 Báze a dimenze vektorového prostoru, reprezentace vektoru v bázi, přechod mezi bázemi

Nechť $\mathfrak{U}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ resp. $\mathbb{R}$ (společné označení $\mathbb{P}$), a $a_1, \ldots, a_k \in \mathfrak{U}$ systém vektorů. Připomeňme, že lineární kombinací vektorů $a_1, \ldots, a_k$ jsme v odstavci 2.3 nazvali vektor b pro který je $b = \gamma^i a_i, \gamma^i \in \mathbb{P}, i \in \{1, \ldots, k\}$. Systém vektorů $a_1, \ldots, a_k$ je lineárně závislý, jestliže existují čísla $\gamma^1, \ldots, \gamma^k \in \mathbb{P}$, z nichž alespoň jedno je nenulové, taková, že platí $\gamma^1 a_1 + \gamma^2 a_2 + \ldots + \gamma^k a_k = 0$. V opačném případě je systém lineárně nezávislý.

Předpokládejme, že $(e_1, \ldots, e_n)$ je konečně1 lineárně nezávislý systém vektoru ve $\mathfrak{U}$ takový, že přidáním libovolného vektoru $a \in \mathfrak{U}$ vzniká již systém lineárně závislý. V takovém případě jsme v odstavci 2.3 hovořili o $(e_1, \ldots, e_n)$ jako o tzv. maximálním lineárně nezávislém systému vektorů neboli bázi ve vektorovém prostoru $\mathfrak{U}$. Vyvstává pochopitelně otázka vzájemného vztahu mezi různými bázemi prostoru $\mathfrak{U}$. Formulujeme nyní celkem přirozené, přece však velmi závažné, tvrzení, týkající se počtu prvku báze. Jeho důkaz (pro případ konečné báze) je poměrně jednoduchý a bude předmětem Cvičeni 4.1.

Věta 6.1. *Nechť (konečný) systém vektoru $(e_1, \ldots, e_n)$ je bází vektorového prostoru $\mathfrak{U}$. Pak každá báze prostoru $\mathfrak{U}$ má stejný počet n prvků, zvaný dimenze (rozměr) vektorového prostoru $\mathfrak{U}$. Izomorfní vektorové prostory mají stejnou dimenzi.*

Tvrzení lze zobecnit i na případ tzv. nekonečněrozměrných, vektorových prostoru, jejichž báze mají nekonečný počet prvku. Této problematiky si všimneme v odstavci 4.6, následující úvary se budov týkat výhradně prostoru konečné dimenze, tj. takových, jejichž báze mají konečný počet prvku. Vektorový prostor dimenze n budeme označovat $\mathfrak{U}_n$, píšeme $\dim \mathfrak{U}_n = n$. Nechť $(e_1, \ldots, e_n)$ je báze ve $\mathfrak{U}_n$. Pak libovolný vektor $a \in \mathfrak{U}_n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektoru báze $a = \alpha^i e_i = \alpha^1 e_1 + \ldots + \alpha^n e_n, \alpha^i \in \mathbb{P}$, neboť systém $(a, e_1, \ldots, e_n)$ je již lineárně závislý. Čísla $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ jsou určena jednoznačně a reprezentuji vektor a v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$. Nazývají se složkami nebo souřadnicemi vektoru a v dané bázi, vektory $\alpha^1 e_1, \ldots, \alpha^n e_n$ jsou průměty (projekce) vektoru a do směrů vektorů báze.

Každý vektor je tedy ve zvolené bázi reprezentován řádkovou matici $(\alpha) = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$, tvořenou složkami vektoru. Je zřejmé, že tentýž vektor má v různých bázích obecně různé složky, nemá proto smysl uvádět hodnoty složek bez údaje o bázi. Jestliže řádkové matice (α), (α') reprezentují vektor a v bázích $(e_1, \dots, e_n)$, $(e'_1, \dots, e'_n)$, vzniká otázka, jakým způsobem lze vypočítat prvky matice (α') pomocí prvku matice (α) a naopak. K tomu je ovšem třeba znát vztah mezi bázemi$(e_1, \dots, e_n)$ a $(e'_1, \dots, e'_n)$.

Věta 6.2. *Nechť $(e_1, \dots, e_n)$, $(e'_1, \dots, e'_n)$ jsou báze ve vektorovém prostoru $\mathfrak{U}_n$. Pak existuje regulární matice $\mathbf{T} = \left(\tau_i^j\right)$ řádu n taková, že $e'_i = \tau_i^j e_j$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Důkaz: Každý z vektorů e'_i je lineární kombinací báze $(e_1, \dots, e_n)$, tj. $e'_i = \tau_i^j e_j$. Označme $\mathbf{T} = \left(\tau_i^j\right)$ čtvercovou matici koeficientu všech rovnic pro e'_i. Vektory e_j jsou naopak lineárními kombinacemi báze $(e'_1, \dots, e'_n)$, tj. $e_j = \sigma_j^k e'_k$. $\mathbf{S} = \left(\sigma_j^k\right)$ je opět čtvercová matice z koeficientu; platí $e'_i = \tau_i^j e_j = \tau_i^j \sigma_j^k e'_k = (\mathbf{T}S)_i^k \, e'_k, e_i = \sigma_i^j e'_j = \sigma_i^j \tau_j^k e_k = (\mathbf{S}T)_i^k \, e'_k$ Z uvedených vztahů je zřejmé, že $(\mathbf{T}S)_i^k = \delta_i^k, (\mathbf{S}T)_i^k = \delta_i^k$, takže $\mathbf{T}S = \mathbf{S}T = \mathbf{E}$. Znamená to, že matice T a S jsou navzájem inverzní a jsou tedy automaticky také regulární.

$\diamondsuit$

Matice T resp. S se nazývají maticemi přechodu od báze $(e_1, \dots, e_n)$ k bázi $(e'_1, \dots, e'_n)$ resp. od báze $(e'_1, \dots, e'_n)$ k bázi $(e_1, \dots, e_n)$. Abychom snadno zjistili vztah mezi složkami vektoru a v různých bázích, přejděme k zjednodušenému vyjádření transformačních vztahu mezi vektory $(e_1, \dots, e_n)$, $(e'_1, \dots, e'_n)$ pomoci maticové symboliky. Symbolem (e) označme "sloupcovou matici" tvořenou vektory $e_1, \dots, e_n$, (e') bude označovat sloupec vektorů $e'_1, \dots, e'_n$.

Vztahy $e'_i = \tau_i^j e_j$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$ lze zřejmé formálně zapsat ve tvaru $(e') = \mathbf{T}\,(e)$ a analogicky $(e) = \mathbf{S}\,(e')$ Dále pak pro vektor $a \in \mathfrak{U}_n$ můžeme psát

$$a = \alpha^i e_i = \alpha'^j e'_j,$$

tj. $a = (\alpha)\,(e) = (\alpha')\,(e')$. Odtud dostáváme

$$(\alpha)\,(e) = (\alpha')\,(e') = (\alpha')\,\mathbf{T}\,(e) \quad \Rightarrow \quad (\alpha) = (\alpha')\,\mathbf{T}, (\alpha') = (\alpha)\,\mathbf{T}^{-1} = (\alpha)\,\mathbf{S}$$

Transformační vztahy mezi složkami vektoru a v různých bázích mají tedy tvar

$$(\alpha) = (\alpha')\,\mathbf{T}\alpha^i = \alpha'^j \tau_j^i i \in \{1, \dots, n\}$$
$$(\alpha') = (\alpha)\,\mathbf{T}^{-1}\alpha'^i = \alpha^j \sigma_j^i i \in \{1, \dots, n\}$$

Zvolme ve $\mathfrak{U}_n$ báze $(e_1, \dots, e_n)$, $(e'_1, \dots, e'_n)$, matici přechodu označme opět $\mathbf{T} = \left(\tau_i^j\right)$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Zvolené báze se nazývají ekvivalentními, je-li $\det T > 0$. Takto definovaná relace na množině bází prostoru $\mathfrak{U}_n$je skutečně ekvivalencí. Odpovídající rozklad obsahuje dvě třídy. Každá třída ekvivalentních bází se nazývá orientace vektorového prostoru $\mathfrak{U}_n$. Orientaci, která obsahuje bázi $(e_1, \dots, e_n)$ značíme $[e_1, \dots, e_n]$. Hovoříme o orientaci indukované bází $(e_1, \dots, e_n)$.

Cvičení 6.1

(1) Nechť $(e_1, \ldots, e_n)$ je báze prostoru $\mathfrak{U}$, $a \in \mathfrak{U}$ libovolný vektor. Ukažte, že vektor a je lineární kombinací vektorů báze, tj. $a = \alpha^1 e_1 + \ldots + \alpha^n e_n = \alpha^i e_i, \alpha^i \in \mathbb{P}$

Návod: Vyjděte ze skutečnosti, že vektory $(a, e_1, \ldots, e_n)$ jsou lineárně závislé, tj. v lineární kombinaci tvaru $\gamma a + \gamma^1 e_1 + \ldots + \gamma^n e_n = o$je alespoň jedno z čísel $\gamma, \gamma^1, \ldots, \gamma^n$ nenulové. Sporem ukažte, že $\gamma \neq 0$ a vyjádřete vektor a pomocí $e_1, \ldots, e_n$ explicitně. Sporem ukažte, že čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou dána jednoznačně.

(2) Dokažte následující tvrzení:

(a) Nechť $(a_1, \ldots, a_k)$ je systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathfrak{U}$. Obsahuje-li tento systém nulový vektor, pak je lineárně závislý.

(b) Nechť $(a_1, \ldots, a_k)$ je lineárně závislý systém vektorů ve $\mathfrak{U}$, $b_1, \ldots, b_m \in \mathfrak{U}$ libovolné vektory. Pak systém $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m)$ je lineárně závislý.

(3) Dokažte, že všechny báze vektorového prostoru konečné dimenze mají stejný počet prvků (prvé tvrzení věty 4.1). Přesněji: Nechť $(e_1, \ldots, e_n)$ je maximální lineárně nezávislý systém vektorů ve vektorovém prostoru $\mathfrak{U}$. Pak každý maximální lineárně nezávislý systém vektorů ve $\mathfrak{U}$ má právě n prvků.

Návod: Označme $(e_1, \ldots, e_n)$ libovolnou bázi prostoru $\mathfrak{U}$ a $(b_1, \ldots, b_k)$ libovolný lineárně nezávislý systém vektorů ve $\mathfrak{U}$. Každý z vektorů $b_j, j \in \{1, \ldots, k\}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci báze $(e_1, \ldots, e_n)$, tj. $b_j = \beta^i_j e_i$, kde β^i_j je i-tá složka j-tého vektoru. Z nezávislosti vektorů $b_1, \ldots, b_k$ nutně vyplývá, že $\gamma^1 b_1 + \ldots + \gamma^k b_k = o \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^1 = \ldots = \gamma^k = 0$. Do rovnice $\gamma^j b_j = o$ dosaďme za $b_j = \beta^i_j e_i$. Na základě lineární nezávislosti vektorů $e_1, \ldots, e_n$ lze již snadno ukázat že $\gamma^1 \beta^i_1 + \ldots + \gamma^k \beta^i_k = o$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$, což je homogenní soustava n rovnic pro k neznámých $\gamma^1, \ldots, \gamma^k$, o níž ovšem předem víme, že má pouze triviální řešení $\gamma^1 = \ldots = \gamma^k = 0$. Užitím výsledků z kapitoly 3 ukažte, že $k \leq n$. Budeme-li o vektorech $b_1, \ldots, b_k$ uvažovat jako o bázi, získáme analogickým postupem nerovnost $k \geq n$. Spojením obou výsledů dostáváme $k = n$.

(4) Dokažte, že konečněrozměrné izomorfní vektorové prostory $\mathfrak{U}$ a $\mathfrak{U}'$ nad $\mathbb{P}$ mají stejnou dimenzi.

Návod: Označme $\varphi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ izomorfismus prostoru $\mathfrak{U}$ a $\mathfrak{U}'$ a $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \in \mathfrak{U}'$ obrazy libovolně zvolené báze $(e_1, \ldots, e_n)$ prostoru $\mathfrak{U}$. Užitím vlastností izomorfismu ukažte, že rovnost $\gamma^1 \varphi(e_1) + \ldots + \gamma^n \varphi(e_n) = o$ je splněna právě tehdy, když $\gamma^1 = \ldots = \gamma^k = 0$, tj. že systém vektorů $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ je lineárně nezávislý. Dále ukažte, že libovolný vektor $a' \in \mathfrak{U}'$ je lineární kombinací vektorů $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$. Využijte přitom skutečnosti, že každý vektor $a' \in \mathfrak{U}'$ má svůj vzor $a \in \mathfrak{U}$, pro který $a' = \varphi(a)$. Uvažte, že vektor a je lineární kombinací báze $(e_1, \ldots, e_n)$, dosaďte za $a = \alpha^i e_i$ do rovnosti $a' = \varphi(a)$ a opět využijte vlastností izomorfismu. Z uvedených úvah vyplývá, že $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ je báze ve $\mathfrak{U}'$, takže $\dim \mathfrak{U}' = n$.

(5) Nechť $\mathbb{P}^n = \mathbb{P} \times \mathbb{P} \times \ldots \times \mathbb{P}$ je množina uspořádaných n-tic tvaru $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$, $\alpha^i \in \mathbb{P}$. Definujme operace sčítání n-tic a násobení n-tice skalárem $\lambda \in \mathbb{P}$ obvyklým způsobem, tj. $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) + (\beta^1, \ldots, \beta^n) = (\alpha^1 + \beta^1, \ldots, \alpha^n + \beta^n)$, $\lambda(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) = (\lambda\alpha^1, \ldots, \lambda\alpha^n)$. Ukažte, že $\mathbb{P}^n$ s uvedenými operacemi je vektorovým prostorem dimenze n nad $\mathbb{P}$.

(6) Ukažte, že libovolný vektorový prostor $\mathfrak{U}$ nad $\mathbb{P}$ dimenze n je izomorfní s $\mathbb{P}^n$. Dále ukažte, že všechny vektorové prostory téže (konečné) dimenze jsou izomorfní. Návod: Nalezněte konkrétní izomorfismus prostora $\mathfrak{U}$ a $\mathbb{P}^n$.

(7) Nechť vektory $a, b \in \mathfrak{U}_n$ jsou v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ reprezentovány složkami $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$, $(\beta^1, \ldots, \beta^n)$. Odvoďte vztahy pro složky vektorů $a + b, \lambda a, \lambda \in \mathbb{P}$ v téže bázi.

(8) (a) Nechť $(e_1, \ldots, e_n)^T = (e)$, $(e'_1, \ldots, e'_n)^T = (e')$, $(e''_1, \ldots, e''_n)^T = (e'')$ jsou báze ve $\mathfrak{U}_n$, matice přechodu od (e) k (e') je $\mathbf{T}_1$, matice přechodu od (e') k (e'') je $\mathbf{T}_2$. Odvoďte transformační vztah, mezi složkami (α), (α'') vektoru a $(\mathfrak{U}$ v bázích (e), (e'').

(b) Ve vektorovém prostoru $\mathfrak{U}_3$ jsou dány báze (e), (e'), (e'') takto: $e'_1 = (1,3,0)$, $e'_2 = (0,1,1)$, $e'_3 = (0,-3,-1)$, $e''_1 = (1,0,3)$, $e''_2 = (0,1,1)$, $e''_3 = (1,-1,0)$ vzhledem k bázi (e). Vektor a má vzhledem k bázi (e') složky (3, 17, 9). Určete jeho složky vzhledem k bázi (e''). Vektor b má vzhledem k bázi (e'') složky (1, 1, -1) . Určete jeho složky vzhledem k bázi (e').

Výsledek: $(\alpha) = (\alpha'')\,\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1, (\alpha'') = (\alpha)\,\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}_2^{-1} = (\alpha)\,\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 = (\alpha)\,(\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1)^{-1}$ $(e)\,\mathbf{T}\,(e'')$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} (\alpha'') = (\alpha')\,\mathbf{S}_2 = (3,-1,0)$$

$(\beta') = (\beta'')\,\mathbf{T}_2 = (0,5,1)$

(9) Nechť vektory $b_1, \ldots, b_k \in \mathfrak{U}$ jsou v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ representovány složkami $b_i = (\beta_i) = (\beta_i^1, \ldots, \beta_i^n)$. Dokažte, že vektory $b_1, \ldots, b_k$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když hodnost matice $\mathbf{B} = \left(\beta_i^j\right)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, je k.

(10) Najděte tři libovolné báze ve $\mathfrak{U}_n$. Konkretizujte pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

(11) Nechť P_{n+1} je množina všech polynomů jedné proměnné stupně nejvýše n s koeficienty z pole $\mathbb{P}$. Sčítání polynomů a násobení polynomu číslem definujeme obvyklým způsobem (viz úloha (5) Cvičení 2.3). Podle výsledku úlohy (5) Cvičeni 2.3 je P_{n+1} vektorovým prostorem nad $\mathbb{P}$ pro $\mathbb{P} = \mathbb{R}$. Dokažte, že P_{n+1} je vektorovým prostorem nad $\mathbb{P}$ i pro $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ a stanovte jeho dimenzi. Najděte libovolnou bázi vektorového prostoru

Výsledek: $\dim P_{n+1} = n + 1$, bázi je například systém $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

(12) Ukažte, že množina $\mathcal{A}(m/n)$ obdélníkových matic typu m/n nad $\mathbb{P}$ s operaci sčítání matic a násobeni matice skalárem, definovanými vztahy (1.1) je vektorovým prostorem nad $\mathbb{P}$. Určete jeho dimenzi a libovolnou bázi.

Výsledek: $\dim \mathcal{A}(m/n) = m \cdot n$, bází je například systém matice$_1 = A_{1,1}, \ldots, e_n = A_{1,n}, e_{n+1} = A_{2,1}, \ldots, e_{2n} = A_{2,n}, \ldots, e_{kn+p} = A_{k+1,p} = \ldots = e_{mn} = A_{m,n}$, kde $A_{i,j}$ je matice, která má na i-té řádkové a j-té sloupcové pozici číslo 1, ostatní její prvky jsou nulové. Libovolná matice $A \in \mathcal{A}(m/n), A = \left(\alpha_i^j\right)$, je lineární kombinaci matic $A_{i,j}, i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$, koeficienty lineární kombinace jsou α_i^j.

(13) Zjistěte, zda množina čtvercových matic $\mathcal{A}(n/n)$ nad $\mathbb{P}$ s operací maticového násobení a operací násobení matice skalárem je vektorovým prostorem.

(14) Nechť $(e_1, \ldots, e_n), (e'_1, \ldots, e'_n)$ jsou báze ve $\mathfrak{U}_n$, matice přechodu od (e) k (e') je T, $(b_1, \ldots, b_k)$je systém vektorů ve $\mathfrak{U}_n$. V bázi (e) je každý, z vektorů b_i reprezentován složkami $\left(\beta_i^j\right), i, j \in \{1, \ldots, n\}$, celý systém je tedy reprezentován maticí $\mathbf{B} = \left(\beta_i^j\right)$ typu k/n. V bázi (e') označíme příslušnou matici jako $\mathbf{B}' = \left(\beta'^j_i\right)$. Najděte vztah mezi maticemi B a $\mathbf{B}'$ a vztah mezi jejich hodnostmi.

Výsledek: $\mathbf{B}' = \mathbf{B}T^{-1}, h(\mathbf{B}') = h(\mathbf{B})$.

(15) Nechť $(b_1, \ldots, b_k)$ je lineárně nezávislý systém vektorů ve $\mathfrak{U}_n$, $k < n$. Pak existuji vektory $b_1, \ldots, b_n$ tak, že $(b_1, \ldots, b_n)$ je báze ve $\mathfrak{U}_n$. Dokažte.

(16) Dokažte, že relace, definující ekvivalentní báze ve $\mathfrak{U}_n$ je skutečně relací ekvivalence. Zjistěte, jaká podmínka platí pro matici přechodu T od báze $(e_1, \ldots, e_n)$ k bázi $(e'_1, \ldots, e'_n)$, náleží-li tyto báze různým orientacím vektorového prostoru $\mathfrak{U}_n$.

Návod: Prověřte reflexivitu, symetrii a tranzitivitu definované relace. Platí $\det \mathbf{T} < 0$.

6.2 Podprostory vektorových prostorů

Vektorovým podprostorem vektorového prostoru $\mathfrak{U}_n$ nad nazveme každou podmnožinu $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{U}_n$ prostoru $\mathfrak{U}_n$, která má vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem, definovaným na $\mathfrak{U}_n$, strukturu vektorového prostoru. Podmnožina $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{U}_n$ vektorového prostoru $\mathfrak{U}_n$ je jeho vektorovým podprostorem právě tehdy, když $\mathfrak{L}$ s každými dvěma vektory $a, b \in \mathfrak{L}$ obsahuje i jejich libovolnou lineární kombinaci $c = \alpha a + \beta b, \alpha, \beta \in \mathbb{P}$. Nejjednoduššími podprostory jsou tzv. triviální podprostory, tj. $\mathfrak{U}_n \subseteq \mathfrak{U}_n$, $\{o\} \subseteq \mathfrak{U}_n$. Podprostory libovolné dimenze $k, 0 \leq k \leq n$ můžeme získat pomocí systému lineárně nezávislých vektorů $b_1, \ldots, b_k$ takto:

$$\mathfrak{L}_k = [\![b_1, \ldots, b_k]\!] = \left\{ \; b \in \mathfrak{U}_n \;\middle|\; b = \beta^1 b_1 + \ldots + \beta^k b_k, \beta^i \in \mathbb{P} \; \right\}.$$

Snadno se ukáže, že $\mathfrak{L}_k$ je skutečně podprostorem ve $\mathfrak{U}_n$ a $\dim \mathfrak{L}_k = k$ (viz Cvičeni 4.2).

Jsou-li vektory $b_1, \ldots, b_k$ lineárně závislé, lze výše uvedeným způsobem opět definovat podprostor vektorového prostoru $\mathfrak{U}_n$, jeho dimenze však bude nižší než k a bude rovna nejvyššímu počtu lineárně nezávislých vektorů v systému $(b_1, \ldots, b_k)$. $\mathfrak{L}_k$ se nezývá vektorovým podprostorem generovaným systémem $(b_1, \ldots, b_k)$ nebo lineárním obalem systému $(b_1, \ldots, b_k)$. Naopak, je-li $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{U}_n$ libovolný podprostor ve $\mathfrak{U}_n$ dimenze $k \leq n$, lze najít systém vektorů $(b_1, \ldots, b_k)$, který generuje podprostor $\mathfrak{L}$, tj. $\mathfrak{L} = [\![b_1, \ldots, b_k]\!]$. Takovým systémem je každá báze prostoru $\mathfrak{L}$. Uvažujme nyní o vektorovém podprostoru $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{U}_n$ generovaném systémem vektorů $(b_1, \ldots, b_m)$, který nemusí být obecně lineárně nezávislý. Jak zjistíme dimenzi prostoru $\mathfrak{L}$? V praktických příkladech je každý vektor zadán pomoci svých složek v jisté bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ vektorového prostoru $\mathfrak{U}_n$. Systém $(b_1, \ldots, b_m)$ bude tedy v této bázi zadán maticí $\mathbf{B} = \left(\beta_i^j\right)$ typu m/n, kde $b_i = \left(\beta_i^j\right)$ pro $i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}$. Hodnost matice B se přitom nezmění, přejdeme-li od báze $(e_1, \ldots, e_n)$ k jiné bázi $(e'_1, \ldots, e'_n)$ prostoru $\mathfrak{U}_n$. (viz úloha P14, Cvičení 4.1). Dimenze podprostoru $\mathfrak{L}$ je dána maximálním počtem lineárně nezávislých vektorů systému $(b_1, \ldots, b_m)$ a je tedy rovna hodnosti matice B.

Předpokládejme, že $\mathfrak{L}_1$ a $\mathfrak{L}_2$ jsou vektorové podprostory prostoru $\mathfrak{U}_n$, potom množinu $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 = \{b \in \mathfrak{U}_n | b = b_1 + b_2, b_1 \in \mathfrak{L}_1, b_2 \in \mathfrak{L}_2\}$ nazveme součtem podprostorů $\mathfrak{L}_1$ a $\mathfrak{L}_2$, množinu

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_0 &= [\![\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2]\!] \\ &= \big\{\beta^k b_k + \alpha^j a_j | k \in \{1, \ldots, r\}, j \in \{1, \ldots, s\}, (b_1, \ldots, b_r), \\ &\qquad \text{resp. } (a_1, \ldots, a_s) \text{ je libovolná báze v } \mathfrak{L}_1 \text{ resp. } \mathfrak{L}_2\big\}.\end{aligned}$$

nazýváme lineárním obalem sjednocení $\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2$. $[\![\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2]\!]$ je množina všech lineárních kombinace vektorů z $\mathfrak{L}_1$ a $\mathfrak{L}_2$. Ve Cvičení 4.2 ukážeme, že pojem součtu podprostorů $\mathfrak{L}_1$ a $\mathfrak{L}_2$ a pojem lineárního obalu jejich sjednocení splývají, tj. $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2$.

Poznámka: Definici součtu vektorových podprostorů prostoru $\mathfrak{U}_n$ i definici lineárního obalu sjednocení lze rozšířit na libovolný počet k vektorových podprostorů $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_k$.

Věta 6.3. *Nechť $\mathfrak{L}$ je vektorovým podprostorem dimenze k ve $\mathfrak{U}_n$. Pak existuje vektorový podprostor $\mathfrak{L}' \subseteq \mathfrak{U}_n$ dimenze $(n-k)$ takový, že $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}' = \{o\}, \mathfrak{L} + \mathfrak{L}' = \mathfrak{U}_n$. Naopak jestliže pro podprostory $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}' \subseteq \mathfrak{U}_n$ platí $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}' = \{o\}, \mathfrak{L} + \mathfrak{L}' = \mathfrak{U}_n$, je* $\dim \mathfrak{L} + \dim \mathfrak{L}' = n$. *Podprostor $\mathfrak{L}'$ se nazývá doplňkem podprostoru $\mathfrak{L}$ ve $\mathfrak{U}_n$.*

Důkaz:

(i) Prvou část tvrzení dokážeme tak, že podprostor $\mathfrak{L}'$ uvedených vlastností zkonstruujeme. Nechť $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{U}_n$ je podprostorem ve $\mathfrak{U}_n$, $\dim \mathfrak{L} = k$. Zvolme libovolnou bázi $(e_1, \ldots, e_k)$ v $\mathfrak{L}'$. Podle výsledku úlohy P15 Cvičení 4.1 existuje soubor vektorů $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ takových, že $(e_1, \ldots, e_n)$ je bází ve $\mathfrak{U}_n$. Označme $\mathfrak{L}' = [\![e_{k+1}, \ldots, e_n]\!]$. Z nezávislosti generujících vektorů vyplývá, že $\dim \mathfrak{L}' = (n-k)$. Nechť $b \in \mathfrak{U}_n$ je libovolný vektor. Platí $b = \beta^1 e_1 + \ldots + \beta^k e_k + \beta^{k+1} e_{k+1} + \ldots + \beta^n e_n$, vektor b je tedy součtem vektorů $b_1 = \beta^1 e_1 + \ldots + \beta^k e_k \in \mathfrak{L}$ a $b_2 = \beta^{k+1} e_{k+1} + \ldots + \beta^n e_n \in \mathfrak{L}'$. Odtud vyplývá, že $\mathfrak{U}_n$ je součtem podprostorů $\mathfrak{L}$ a $\mathfrak{L}'$, tj. $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}' = \mathfrak{U}_n$. Nechť dále $c \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}'$. Pak $c \in \mathfrak{L}$ a $c \in \mathfrak{L}'$, tj. $c = \gamma^1 e_1 + \ldots + \gamma^k e_k = \gamma^{k+1} e_{k+1} + \ldots + \gamma^n e_n$ odkud $\gamma^1 e_1 + \ldots + \gamma^k e_k \left(-\gamma^{k+1}\right) e_{k+1} + \ldots + (-\gamma^n) e_n = o$. Vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $e_1, \ldots, e_n$ tvořící bázi, musí být $\gamma^i = 0$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$, takže je $c = o$. Je proto $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}' = \{o\}$.

(ii) Nechť pro podprostory $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}' \subseteq \mathfrak{U}_n$ platí $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}' = \{o\}, \mathfrak{L} + \mathfrak{L}' = \mathfrak{U}_n$. Báze v $\mathfrak{L}'$ a $\mathfrak{L}'$ označme $(e_1, \ldots, e_k)$ a $(e_{k+1}, \ldots, e_r)$. Vzhledem k tomu, že $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}' = \{o\}$, je systém $(e_1, \ldots, e_r)$ lineárně nezávislý. Poněvadž je $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}' = \mathfrak{U}_n$, je $(e_1, \ldots, e_r)$ bází ve $\mathfrak{U}_n$, tj. $r = n$. (Podrobněji viz Cvičení 4.2.)

$\diamondsuit$

Věta 6.4. *Nechť $\mathfrak{L}_1$ a $\mathfrak{L}_2$ jsou podprostory vektorového prostoru $\mathfrak{U}_n$ nad $\mathbb{P}$. Množiny $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 = [\![\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2]\!]$ a $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$ s operacemi sčítání vektorů na násobení vektoru skalárem (přenesenými - indukovanými z $\mathfrak{U}_n$) jsou vektorovými podprostory ve $\mathfrak{U}_n$ a platí* $\dim(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2) = \dim \mathfrak{L}_1 + \dim \mathfrak{L}_2 - \dim(\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2)$

Důkaz: Prověření struktury vektorového prostoru u množin $\mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$, $[\![\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2]\!]$ je velice jednoduché a bude provedeno v rámci Cvičení 4.2. Soustředíme se proto na důkaz vztahu pro dimenze podprostorů $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$. Označme, $r = \dim \mathfrak{L}_1, s = \dim \mathfrak{L}_2, m = \dim(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2), k = \dim(\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2)$ Vzhledem k tomu, že $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2 \subseteq \mathfrak{L}_1$, je $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$ vektorovým podprostorem prostoru $\mathfrak{L}_1$. Podle věty existuje podprostor $\mathfrak{L}'$ dimenze $\dim \mathfrak{L}' = (r-k)$takový, že $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}' = \{o\}$. Analogicky je možné usoudit, že existuje podprostor $\mathfrak{L}''$ prostoru $\mathfrak{L}_2$ dimenze $\dim \mathfrak{L}'' = (s-k)$, pro který $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'' = \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}'' = \{o\}$. Součet podprostorů $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ lze vyjádřit takto: $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L} + \mathfrak{L}' + \mathfrak{L}''$

Skutečně, je-li vektor $a \in \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2$ pak $a = a_1 + a_2$, kde $a_1 \in \mathfrak{L}_1, a_2 \in \mathfrak{L}_2$. Déle je $a_1 = c + a', c \in \mathfrak{L}, a' \in \mathfrak{L}'$ a $a_2 = b + a'', b \in \mathfrak{L}, a'' \in \mathfrak{L}''$. Pak $a = (c+b) + a' + a''$, kde $c + b \in \mathfrak{L}, a' \in \mathfrak{L}', a'' \in \mathfrak{L}''$, takže $a \in \mathfrak{L} + \mathfrak{L}' + \mathfrak{L}''$. Jestliže je naopak $a \in \mathfrak{L} + \mathfrak{L}' + \mathfrak{L}''$, je tvaru $a = b + a' + a''$ kde $b \in \mathfrak{L}, a' \in \mathfrak{L}', a'' \in \mathfrak{L}''$, tj. $b + a' \in \mathfrak{L}_1, a'' \in \mathfrak{L}_2$. Odtud $a \in \mathfrak{L}_1+\mathfrak{L}_2$. Ukážeme, že platí $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2 = \{o\}$: Nechť $a \in \mathfrak{L}' \cap \mathfrak{L}''$. Poněvadž je $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}+\mathfrak{L}'$ a $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L} + \mathfrak{L}''$, je také $a \in \mathfrak{L}_1, a \in \mathfrak{L}_2$, odkud $a \in \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}$. Vzhledem k tomu, že $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}' = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}'' = \{o\}$, musí být $a = o$. Vyjádřili jsme tedy prostor $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2$ jako součet prostorů $\mathfrak{L}+\mathfrak{L}'+\mathfrak{L}''$, z nichž každé dva Mají společný pouze nulový vektor. Jednoduchým zobecněním věty dostáváme vztah $m = \dim(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2) = \dim \mathfrak{L} + \dim \mathfrak{L}' + \dim \mathfrak{L}'' = k + (r-k) + (s-k) = \dim \mathfrak{L}_1 + \dim \mathfrak{L}_2 + \dim \mathfrak{L}$

$\diamondsuit$

Příklad 1: Uvažme vektorový prostor $P_n(x)$ všech polynomů jedné proměnné x stupně nejvýše $(n-1)$ s koeficienty z pole $\mathbb{P}$ ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{P} = \mathbb{C}$) (viz úloha P11 Cvičení 4.1) . Je $\dim P_n(x) = n$, bází je například systém polynomy $(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$. Označme $\mathfrak{L}$ podprostor polynomů proměnné x nejvýše stupně $(k-1)$, kde $k \leq n$. $\dim \mathfrak{L} = k$, $\mathfrak{L} = [\![1, x, \ldots, x^{k-1}]\!]$. Doplňkem $\mathfrak{L}$ v $P_n(x)$ je podprostor $\mathfrak{L}' = [\![x^k, \ldots, x^{n-1}]\!]$, tj. podprostor všech polynomů tvaru $P(x) = \alpha_k x^k + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}, \alpha_k, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{P}, \dim \mathfrak{L}' = (n-k)$.

Příklad 2: Ve $\mathfrak{U}_6$ jsou dány podprostory $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$

$$\mathfrak{L}_1 = [\![(2,1,1,0,0,1), (2,2,1,1,0,0), (2,-1,1,-2,0,3)]\!],$$
$$\mathfrak{L}_2 = [\![(0,1,0,1,0,-1), (4,2,2,0,0,2), (1,1,0,2,1,0)]\!]$$

Najdeme dimenzi a bázi jejich součtu a průniku a určíme jejich doplňky ve $\mathfrak{U}_6$. Označme $\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_0$.

$$\dim \mathfrak{L}_1 = \mathrm{h}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{h}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$
$$\mathfrak{L}_1 = [\![(2,1,1,0,0,1), (2,2,1,1,0,0)]\!]$$

$$\dim \mathfrak{L}_2 = \mathrm{h}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{h}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\mathfrak{L}_2 = [\![(0,1,0,1,0,-1)\,,(2,2,1,1,0,0)\,,(1,1,0,2,1,0)]\!]$$

$$\dim \mathfrak{L} = \mathrm{h}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{h}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\dim \mathfrak{L}_0 = \dim \mathfrak{L}_1 + \dim \mathfrak{L}_2 - \dim \mathfrak{L} = 2 + 3 - 3 = 2$$

Báze v $\mathfrak{L}_1$ je tvořena například

$$a_1 = (2,1,1,0,0,1)\,, a_2 = (2,2,1,1,0,0)\,,$$

báze v $\mathfrak{L}_2$ vektory

$$b_1 = (0,1,0,1,0,-1)\,, b_2 = (2,2,1,1,0,0)\,, b_3 = (1,1,0,2,1,0)\,.$$

Je tedy $a_2 = b_2, a_1 = b_2 - b_1,$, takže $\mathfrak{L}_1$ je podprostorem v $\mathfrak{L}_2$. Pak $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_1$ a bází v $\mathfrak{L}_0$ jsou rovněž vektorya_1, a_2. $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_2$, bázi v $\mathfrak{L}$ tvoří vektory b_1, b_2, b_3, Označíme-li $\mathfrak{L}'$ resp. $\mathfrak{L}''$ doplněk $\mathfrak{L}_1$ resp. $\mathfrak{L}_2$ ve $\mathfrak{U}_6$, pak $\dim \mathfrak{L}' = 4$,

$$\mathfrak{L}' = [\![(0,0,0,1,0,0)\,,(0,0,0,1,1,0)\,,(0,0,0,1,0,1)\,,(1,1,0,2,1,0)]\!]$$

$\dim \mathfrak{L}'' = 3$,

$$\mathfrak{L}'' = [\![(0,0,0,1,0,0)\,,(0,0,0,1,1,0)\,,(0,0,0,1,0,1)]\!]\,.$$

Kapitola 7

Lineární transformace v prostorech se skalárním součinem

7.1 Unitární a ortogonální lineární transformace

Nechť $\mathbb{U}_n$ resp. $\mathbb{E}_n$ je unitární resp. euklidovský prostor. Lineární transformace $\phi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ se nazývá unitární resp. $\phi \in L(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n)$ se nazývá ortogonální vzhledem ke zvolenému skalárnímu součinu, jestliže pro každé dva vektory $a, b \in \mathbb{U}_n$ resp. $\mathbb{E}_n$ platí

$$(\phi(a), \phi(b)) = (a, b) \tag{7.1}$$

tj. jestliže lineární transformace ϕ zachovává hodnotu skalárního součinu.

Věta 7.1. *Lineární transformace $\phi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ je unitární právě tehdy, jestliže obrazy alespoň jedné ortonormální báze tvoří opět ortonormální bázi. Totéž tvrzení platí i pro ortogonální transformaci $\phi \in L(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n)$.*

Důkaz: (i) Nechť $(e_1, \ldots, e_n)$ je ortonormální báze v $\mathbb{U}_n$ vzhledem ke zvolenému skalárnímu součinu. Platí tedy $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ pro všechna $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Je-li $\phi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ unitární transformace, pak podle definice je $(\phi(e_i), \phi(e_j)) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Vektory $\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)$ tedy rovněž tvoří v $\mathbb{U}_n$ ortonormální bázi.

(ii) Předpokládejme, že pro lineární transformaci ϕ v $\mathbb{U}_n$ existuje ortonormální báze $(e_1, \ldots, e_n)$ taková, že obrazy $\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)$ tvoří rovněž ortonormální bázi. Nechť $a = \alpha^i e_i$, $b = \beta^i e_i$ jsou libovolné vektory v $\mathbb{U}_n$. Platí

$$(\phi(a), \phi(b)) = (\phi(\alpha^i e_i), \phi(\beta^j e_j)) = \alpha^i \beta^{j*}(\phi(e_i), \phi(e_j)) = \alpha^i \beta^{j*}(e_i, e_j) = \alpha^i \beta^{i*}$$

$$(a, b) = (\alpha^i e_i, \beta^j e_j) = \alpha^i \beta^{j*}(e_i, e_j) = \alpha^i \beta^{i*}$$

Je tedy zřejmé, že $(\phi(a), \phi(b)) = (a, b)$ pro libovolné vektory $a, b \in \mathbb{U}_n$, takže lineární transformace ϕ je unitární.

$\diamondsuit$

Důsledek 7.1.1. *Z věty 4.15 bezprostředně vyplývá, že unitární lineární transformace je vždy regulární (obrazy báze tvoří opět bázi).*

Následující věty řeší otázku reprezentace unitární lineární transformace v ortonormálních bázích.

Věta 7.2. *Lineární transformace ϕ v $\mathbb{U}_n$ resp. $\mathbb{E}_n$ je unitární resp. ortogonální právě tehdy, je-li alespoň v jedné ortonormální bázi reprezentována unitární resp. ortogonální maticí.*

Důkaz: (i) Nechť $\phi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ je unitární transformace, tj. $(\phi(a), \phi(b)) = (a, b)$ pro libovolné vektory $a, b \in \mathbb{U}_n$. Zvolme libovolnou ortonormální bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ v $\mathbb{U}_n$. Je-li $\mathbf{A} = (\alpha^i_j)$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ matice, která reprezentuje transformaci ϕ ve zvolené bázi, platí pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$ $\phi(e_i) = \alpha^i_j e_j$. Pro vektory $a = \alpha^i e_i$, $b = \beta^j e_j$ dostáváme s použitím vztahů (4.3) a (4.13)

$$(\phi(a), \phi(b)) = (\bar{\alpha})(\bar{\beta})^{\mathbf{T}*} = (\alpha)\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}*}(\beta)^{\mathbf{T}*} \qquad (a, b) = (\alpha)(\beta)^{\mathbf{T}*}.$$

Z rovnosti levých stran předchozích vztahů a z libovůle vektorů a, b vyplývá pro matici $\mathbf{A}$ vztah $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{E}$, takže $\mathbf{A}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{A}^{-1}$. Matice $\mathbf{A}$ je tedy unitární.

(ii) Nechť existuje ortonormální báze $(e_1, \ldots, e_n)$ v $\mathbb{U}_n$, v níž je daná lineární transformace ϕ reprezentována unitární maticí. Pro libovolné vektory $a, b \in \mathbb{U}_n$, $a = \alpha^i e_i$, $b = \beta^j e_j$ platí

$$(\phi(a), \phi(b)) = (\bar{\alpha})(\bar{\beta})^{\mathbf{T}*} = (\alpha)\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}*}(\beta)^{\mathbf{T}*} = (\alpha)\mathbf{E}(\beta)^{\mathbf{T}*} = (a, b).$$

Lineární transformace ϕ je tedy unitární. Při vynechání operace $*$ odpovídá důkaz věty 4.16 případu ortogonální transformace $\phi \in L(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n)$.

$\diamondsuit$

Věta 7.3. *Kompozice dvou unitárních lineárních transformací $\phi, \psi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ je opět unitární transformace. Inverzní transformace k unitární transformaci $\phi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$, $\phi^{-1} \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ je rovněž unitární.*

Důkaz: viz Cvičení 4.14.

$\diamondsuit$

Cvičení 7.1

(1) Ukažte, že pro případ euklidovského prostoru $\mathbb{E}_n$ stačí definovat ortogonální lineární transformaci vztahem $(\phi(a), \phi(a)) = (a, a)$ pro libovolný vektor $a \in \mathbb{E}_n$ a zdůvodněte, proč taková definice není dostačující pro případ unitární transformace.

Návod: Je třeba ukázat, že v případě $\mathbb{E}_n$ vyplývá ze vztahu $(\phi(a), \phi(a)) = (a, a)$ i vztah $(\phi(a), \phi(b)) = (a, b)$ pro libovolné vektory $a, b \in \mathbb{E}_n$. Abyste tento fakt ukázali, počítejte skalární součin $(\phi(a+b), \phi(a+b))$ a kromě podmínek linearity využijte rovností $(\phi(a), \phi(a)) = (a, a)$, $(\phi(b), \phi(b)) = (b, b)$. Z analogického výpočtu provedeného v $\mathbb{U}_n$ vyplyne, proč je v případě $\mathbb{U}_n$ nutno pro definici unitární transformace použít obecnějšího vztahu (4.25).

(2) Dokažte následující tvrzení: Je-li lineární transformace $\phi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ reprezentována v jisté ortonormální bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ unitární maticí, pak je reprezentována unitární maticí v každé ortonormální bázi.

Návod: Využijte vztahu (4.15) pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ reprezentující lineární transformaci ϕ v různých bázích. Uvažujte, že matice přechodu $\mathbf{T}$ mezi dvěma ortonormálními bázemi je unitární a ukažte, že v případě unitárnosti matice $\mathbf{A}$ je unitární i matice $\mathbf{A}' = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$. Proveďte výpočet matice $(\mathbf{A})'^{-1}$ a ukažte, že $(\mathbf{A})'^{-1} = (\mathbf{A})'^{\mathbf{T}}$.

(3) Zdůvodněte, proč je pojem unitárnosti resp. ortogonality lineární transformace závislý na konkrétní volbě skalárního součinu (mluvíme o unitárnosti resp. ortogonalitě lineární transformace vzhledem ke zvolenému skalárnímu součinu).

Návod: Předpokládejte, že ve vektorovém prostoru V_n jsou uvažovány dvě možnosti volby skalárního součinu $(\,, \,)$ a $(\,, \,)'$. Nechť $(e_1, \ldots, e_n)$ je báze ortonormální vzhledem k $(\,, \,)$ a $(e'_1, \ldots, e'_n)$ báze ortonormální vzhledem k $(\,, \,)'$. Obecně tedy matice přechodu od báze $(e_1, \ldots, e_n)$ k bázi $(e'_1, \ldots, e'_n)$ není unitární. K další úvaze použijte větu 4.16.

(4) Nechť je skalární součin v $\mathbb{U}_n$ reprezentován v obecné bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ maticí $\mathbf{G}$ (viz odstavec 4.3). Nechť $\phi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ je vzhledem ke zvolenému skalárnímu součinu unitární a v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ reprezentována maticí $\mathbf{A}$. Zjistěte vztah mezi maticemi $\mathbf{A}^{-1}$ a $\mathbf{A}^{\mathbf{T}*}$.

Návod: Použitím vztahu (4.3) vyjádřete skalární součiny $(\phi(a), \phi(b))$ a (a, b) pro libovolné vektory $a, b \in \mathbb{U}_n$ a porovnejte.

Výsledek:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{G}\mathbf{A}^{\mathbf{T}*}\mathbf{G}^{-1}$$

(5) Dokažte větu 4.17.

Návod: Užijte vět 4.12 a 4.16.

(6) Nechť $\phi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ je unitární lineární transformace, $\kappa \in \mathbb{C}$. Jakou podmínku je třeba klást na číslo κ, aby lineární transfomace $\kappa\phi$ byla unitární?

Návod: Využijte definice unitární transformace.

7.2 Samoadjungovaná a symetrická lineární transformace; spektrální reprezentace

Věta 7.4. *Nechť $\mathbb{U}_n$ je unitární prostor, $\phi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ lineární transformace. Pak existuje právě jedna lineární transformace $\phi^+ \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ taková, že pro libovolné vektory $a, b \in \mathbb{U}_n$ platí $(\phi(a), b) = (a, \phi^+(b))$.*

Důkaz: K důkazu využijeme skutečnosti, že každá lineární transformace ve vektorovém prostoru V_n je v dané bázi reprezentována jednoznačně určenou maticí řádu n. Nechť $(e_1, \ldots, e_n)$ je báze v unitárním prostoru $\mathbb{U}_n$, $a = \alpha^i e_i$, $b = \beta^j e_j \in \mathbb{U}_n$ libovolně zvolené vektory, $\mathbf{A} = (\alpha^i_j)$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ matice, která reprezentuje lineární transformaci ϕ v dané bázi. Matici reprezentující hledanou lineární transformaci ϕ^+ v téže bázi označme $\mathbf{A}^+$. Skalární součin nechť je v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ reprezentován maticí $\mathbf{G}$. Pak podle vztahu (4.3)

$$(\phi(a), b) = (\alpha)\mathbf{AG}(\beta)^{\mathbf{T}*} \qquad (a, \phi^+(b)) = (\alpha)\mathbf{GA}^{+\mathbf{T}*}(\beta)^{\mathbf{T}*}.$$

Na základě požadavku $(\phi(a), b) = (a, \phi^+(b))$ pro libovolné vektory $a, b \in \mathbb{U}_n$ dostáváme pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{A}^+$ vztah $\mathbf{AG} = \mathbf{GA}^{+T}$ a odtud

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{G}^{-1}\mathbf{AG})^{\mathbf{T}*} \tag{7.2}$$

Vztahem (4.26) je zadána právě jedna čtvercová matice A^+, která reprezentuje hledanou lineární transformaci ϕ^+ v bázi $(r_1, \ldots, e_n)$.

$\diamondsuit$

Poznámka: Jestliže je $(e_1, \ldots, e_n)$ bází ortonormální, pak $\mathbf{G} = \mathbf{E}$ a ze vztahu (4.26) vyplývá rovnost $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{\mathbf{T}*}$.

Lineární transformaci ϕ^+ nazýváme adjungovanou (sdruženou) k lineární transformaci ϕ vzhledem ke zvolenému skalárnímu součinu.

Zvláštní postavení v souvislosti s řešením problému vlastních hodnot a významné fyzikální aplikace mají tzv. samoadjungované ("samy k sobě sdružené") lineární transformace v $\mathbb{U}_n$. Samoadjungovaná lineární transformace je definována vztahem $\phi^+ = \phi$, tj.

$$(\phi(a), b) = (a, \phi(b)) \qquad \forall a, b \in \mathbb{U}_n \tag{7.3}$$

V případě euklidovského prostoru $\mathbb{E}_n$ je vztahem (4.27) definována tzv. symetrická lineární transformace. Následující tvrzení je bezprodtředním důsledkem definice samoadjungované lineární transformace a vztahu (4.26).

Věta 7.5. *Lineární transformace $\phi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ (resp. $\phi \in L(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n)$) je samoadjungovaná (resp. symetrická) právě tehdy, je-li reprezentována samoadjungovanou (resp. symetrickou) maticí alespoň v jedné ortonormální bázi.*

Poznámka: Je-li ϕ reprezentována v jisté ortonormální bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ samoadjungovanou maticí, pak je reprezentována samoadjungovanou maticí v každé ortonormální bázi.

Klíčovým výsledkem, týkajícím se samoadjungovaných a symetrických lineárních transformací, je existence jejich diagonální reprezentace, která je přímým důsledkem vět 1.20 a 4.19.

Věta 7.6. *Pro každou samoadjungovanou (resp. symetrickou) lineární transformaci v $\mathbb{U}_n$ (resp. $\mathbb{E}_n$) existuje ortonormální báze, v níž je tato transformace reprezentována diagonální maticí.*

Důkaz: Z věty 4.19 vyplývá, že samoadjungovaná (resp. symetrická) lineární transformace je alespoň v jedné ortonormální bázi reprezentována samoadjungovanou (resp. symetrickou) maticí. Každá samoadjungovaná matice nad $\mathbb{C}$ resp. každá symetrická matice nad $\mathbb{R}$ je ovšem maticí normální, neboť $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}*} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^{\mathbf{T}*}\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}$) a podle věty 1.20 ji tedy lze převést unitární (resp. ortogonální) podobnostní transformací na diagonální tvar. Závěr důkazu vyplývá ze skutečnosti, že unitární (resp. ortogonální) matice $\mathbf{T}$ převádí ortonormální bázi opět v bázi ortonormální.

$\diamondsuit$

Věta 4.20 spolu s větou 4.13 zaručují existenci ortonormální báze v $\mathbb{U}_n$ (resp. v $\mathbb{E}_n$), tvořené vlastními vektory samoadjungované (resp. symetrické) lineární transformace ϕ. Soustřeďme se nyní na úplné vyřešení problému vlastních hodnot a vlastních vektorů samoadjungované lineární transformace.

Věta 7.7. *Všechny charakteristické kořeny samoadjungované lineární transformace jsou reálné.*

Důkaz: Nechť $\phi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ je samoadjungovaná lineární transformace. Označme λ_0 její libovolný charakteristický kořen. Podle věty 4.12 je λ_0 také vlastní hodnotou dané transformace. Příslušný vlastní vektor označme b, tj. $\phi(b) = \lambda_0 b$. Platí: $(\phi(b), b) = (b, \phi(b))$ a tedy $\lambda_0(b, b) = \lambda_0^*(b, b)$. Vektor b je nenulový, a proto $\lambda_0 = \lambda_0^*$, tj. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Stejné tvrzení platí i pro symetrickou lineární transformaci, tj. $\phi \in L(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n)$, v důsledku čehož je každý její charakteristický kořen současně její vlastní hodnotou.

$\diamondsuit$

Věta 7.8. *Nechť $\phi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ resp. $\phi \in (\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n)$ je samoadjungovaná resp. symetrická lineární transformace. Platí*

(i) Vlastní vektory příslušné navzájem různým vlastním hodnotám jsou ortogonální.

(ii) Vlastní vektory příslušné k-násobnému charakteristickému kořenu λ_0 generují v $\mathbb{U}_n$ resp. $\mathbb{E}_n$ vektorový podprostor dimenze k.

Důkaz: (i) Nechť $\lambda_1 \neq \lambda_2$ jsou různé vlastní hodnoty samoadjungované resp. symetrické lineární transformace ϕ. Pak $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Odpovídající vlastní vektory označme b_1, b_2 (b_1 resp. b_2 je libovolný z vlastních vektorů příslušných hodnotě λ_1 resp. λ_2). Rovnici $\phi(b_1) = \lambda_1 b_1$ vynásobíme skalárně vektorem b_2 zprava a rovnici $\phi(b_2) = \lambda_2 b_2$ vektorem b_1 zleva:
Odečtením těchto rovností s využitím samoadjungovanosti lineární transformace ϕ dostáváme $(\lambda_1 - \lambda_2)(b_1, b_2) = 0$, a protože je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, je $(b_1, b_2) = 0$. Vektory b_1 a b_2 jsou tedy ortogonální.

(ii) Nechť λ_0 je k-násobný charakteristický kořen, tj. vlastní hodnota samoadjungované resp. symetrické lineární transformace ϕ. Vzhledem k tomu, že Jordanův normální tvar dané trasnformace je diagonální (věta 4.20), je počet invariatních faktorů charakteristické transformace $\phi - \lambda\mathrm{id}$, obsahujících kořenový činitel $(\lambda - \lambda_0)$ roven násobnosti kořene λ_0, tj. číslu k (λ_0 je nejvýše jednonásobným kořenem invariantních faktorů). Podle věty 4.14 generují vlastní vektory, které přísluší hodnotě λ_0, vektorový podprostor v $\mathbb{U}_n$ resp. $\mathbb{E}_n$ dimenze k.

$\diamondsuit$

Věta 4.22 dává přímý návod, jak zkonstruovat v $\mathbb{U}_n$ ortonormální bázi tvořenou vlastními vektory dané samoadjungované lineární transformace: Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, $1 \leq r \leq n$ jsou navzájem různé charakteristické kořeny s násobnostmi $k_1, \ldots, k_r$, $1 \leq k_i \leq n$, $k_1 + \ldots + k_r = n$. Každé z hodnot $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ přísluší vektorový podprostor L_i, $1 \leq i \leq r$ dimenze k_i, generovaný odpovídajícími vlastními vektory dané lineární transformace. Věta 4.22 vede k následujícím tvrzením, týkajícím se podprostorů L_i:

(i) Podprostory L_i, L_j jsou navzájem ortogonální pro všechna $i \neq j$, tj. každý vektor podprostoru L_i je orotognální ke každému vektoru podprostoru L_j.

(ii) $L_1 + L_2 + \ldots + L_r = \mathbb{U}_n$. V jednotlivých podprostorech $L_1, \ldots, L_r$ lze volit ortonormální báze z vlastních vektorů transformace: $L_1 = [u_1^{(1)}, \ldots, u_{k_1}^{(1)}], L_2 = [u_1^{(2)}, \ldots, u_{k_2}^{(2)}], \ldots, L_r = [u^{(r)}, \ldots, u_{k_r}^{(r)}]$. Vektory $u_j^{(i)}, 1 \leq j \leq k_i, 1 \leq i \leq r$ generují celý prostor $\mathbb{U}_n$ a tvoří v něm ortonormální bázi.

Zvolme nyní libovolný vektor $a \in \mathbb{U}_n$ a označme π_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$, ortogonální projekce na jednotlivé podprostory (viz úloha (3) Cvičení 4.10). Platí

$$a = \pi_1(a) + \ldots + \pi_r(a) \qquad \phi(a) = \phi(\pi_1(a)) + \ldots + \phi(\pi_r(a)).$$

Každý vektor $\pi_i(a) \in L_i$ je vlastním vektorem lineární transformace ϕ a přísluší vlastní hodnotě λ_i. Je tedy nakonec

$$\phi(a) = \lambda_1 \pi_1(a) + \ldots + \lambda_r \pi_r(a)$$

a vzhledem k libovolnosti vektoru a $\mathbb{U}_n$ (úloha (6) Cvičení 4.12)

$$\phi = \lambda_1 \pi_1 + \ldots + \lambda_r \pi_r \tag{7.4}$$

Vztah (4.28) představuje tzv. spektrální reprezentaci dané samoadjungované lineární transformace ϕ. Spektrální reprezentací transformace ϕ je tedy nazván její rozklad do tvaru lineární kombinace ortogonálních projekcí na podprostory jejích vlastních vektorů, přičemž koeficienty lineární kombinace jsou příslušné vlastní hodnoty.

Je-li ϕ zadána v ortonormální bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ pomocí reprezentující matice $\mathbf{A}$, pak vztah (4.28) dává

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \ldots + \lambda_r \mathbf{P}_r = \lambda_1 \mathbf{C}_1^{\mathbf{T}*} \mathbf{C}_1 + \ldots + \lambda_r \mathbf{C}_r^{\mathbf{T}*} \mathbf{C}_r \tag{7.5}$$

kde $\mathbf{P}_i = \mathbf{C}_i^{\mathbf{T}*} \mathbf{C}_i$, $i \in \{1, \ldots, r\}$ je matice projekce π_i v bázi $(e_1, \ldots, e_n), \mathbf{C}_i$ je matice tvořená složkami vektorů $u_1^{(i)}, \ldots, u_{k_i}^{(i)}$, generující podprostor L_i, zadaný rovněž v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ (viz vztah (4.10)). Vztah (4.29) umožňuje vyjádřit spektrální reprezentaci samoadjungované lineární transformace ϕ v dané bázi na základě znalosti matic $\mathbf{C}_i$, tj. vyžaduje kompletní vyřešení problému vlastních hodnot a vektorů.

Vlastností projekcí π_i lze však využít k jejich přímému vyjádření pomocí ϕ, aniž bychom počítali složky vlastních vektorů: Vyjdeme z vyjádření spektrální reprezentace

(4.28) a ze zřejmé rovnosti $\pi_1 + \ldots + \pi_r = \mathrm{id}$. Tuto rovnost postupně vynásobíme čísly $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ a odečteme od (4.28). Dostaneme:

$$\begin{aligned}
\phi - \lambda_1 \mathrm{id} &= (\lambda_2 - \lambda_1)\pi_2 + \ldots + (\lambda_r - \lambda_1)\pi_r \\
\phi - \lambda_2 \mathrm{id} &= (\lambda_1 - \lambda_2)\pi_1 + \lambda_3 - \lambda_2 + \ldots + (\lambda_r - \lambda_2)\pi_r \\
&\vdots \\
\phi - \lambda_{r-1} \mathrm{id} &= (\lambda_1 - \lambda_{r-1})\pi_2 + \ldots + (\lambda_{r-2} - \lambda_{r-1})\pi_{r-2} + (\lambda_r - \lambda_{r-1})\pi_{r-1}
\end{aligned}$$

Všimněme si, že v i-tém z těchto $(r-1)$ vztahů, kde i probíhá hodnoty $\{1, \ldots, r-1\}$, chybí na pravé straně i-tá projekce. Jestliže provedeme kompozici všech uvedených rovností (ve smyslu kompozice lineárních transformací) a uvážíme platnost dalšího zřejmého vztahu pro projekce $\pi_i \circ \pi_j = \pi_i \delta_{ij}$ (odstavec 4.10), dostaneme

$$(\phi - \lambda_1 \mathrm{id}) \circ (\phi - \lambda_2 \mathrm{id}) \circ \ldots \circ (\phi - \lambda_{r-1} \mathrm{id}) = (\lambda_r - \lambda_1)(\lambda_r - \lambda_2) \ldots (\lambda_r - \lambda_{r-1})\pi_r$$

Všechny hodnoty $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ jsou navzájem různé, máme tedy explicitní vyjádření projekce π_r:

$$\pi_r = \frac{(\phi - \lambda_1 \mathrm{id}) \circ (\phi - \lambda_2 \mathrm{id}) \circ \ldots \circ (\phi - \lambda_{r-1} \mathrm{id})}{(\lambda_r - \lambda_1)(\lambda_r - \lambda_2) \ldots (\lambda_r - \lambda_{r-1})} \tag{7.6}$$

a v bázi

$$\mathbf{P}_r = \frac{\prod_{i=1}^{r-1} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})}{\prod_{i=1}^{r-1} (\lambda_r - \lambda_i)} \tag{7.7}$$

(Znak $\prod$ v čitateli má význam maticového součinu.)
Analogickým způsobem lze získat vyjádření ostatních projekcí. Výsledné výrazy mají tvar (pro $i \in \{1, \ldots, r\}$):

$$\pi_i = \frac{(\phi - \lambda_1 \mathrm{id}) \circ \ldots \circ (\phi - \lambda_{i-1} \mathrm{id}) \circ (\phi - \lambda_{i+1} \mathrm{id}) \circ \ldots \circ (\phi - \lambda_r \mathrm{id})}{(\lambda_i - \lambda) \ldots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \ldots (\lambda_i - \lambda_r)} \tag{7.8}$$

$$\mathbf{P}_i = \frac{\prod_{j=1}^{\prime r} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E})}{\prod_{j=1}^{\prime r} (\lambda_i - \lambda_j)} \tag{7.9}$$

Symbol $\prod'$ značí součin s vynecháním indexu $j = i$. V čitateli je opět součin maticový.

Příklad 1: Najdeme spektální reprezentaci symetrické lineární transformace $\phi \in L(E_4, E_4)$ reprezentované v ortonormální bázi $(e_1, \ldots, e_4)$ maticí $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(viz úloha (5v) Cvičení 4.11). Spektrum je tvořeno hodnotami $\lambda_1 = 2$ o násobnosti $k_1 = 3$ a $\lambda_2 = -2$ o násobnosti $k_2 = 1$. Podprostory vlastních vektorů: $L_1 = [(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0,$

$[(1,-1,-1,-1)]$. V L_1 utvoříme ortonormální bázi ortogonalizačním procesem (proveďte), v L_2 vektor báze normujeme. Dostáváme pak

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Užitím vztahu (4.31 b) provedeme kontrolu:

$$\mathbf{P}_1 = \frac{\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{P}_2 = \frac{\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E}}{\lambda_2 - \lambda_1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Další kontrolu správnosti výpočtu je ověření vztahu $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 = 2.\mathbf{P}_1 + (-2).\mathbf{P}_2$. Tento vztah je splněn.

Cvičení 7.2

(1) Zdůvodněte, proč je pojem sdružené lineární transformace závislý na volbě konkrétního skalárního součinu v $\mathbb{U}_n$.

Návod: Diskutujte vztah (4.26).

(2) Nechť $\phi^+ \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ představuje transformaci sdruženou k $\phi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$. Ukažte, že pojem sdruženosti je vzájemný, tj. ϕ je sdružená k ϕ^+.

Návod: Užitím definice sdružené lineární tranformace a symetrie skalárního součinu ukažte, že $(\phi^+)^+ = \phi$. (Upravujte skalární součin $(\phi^+(a), b)$ a ukažte, že je roven $(a, \phi(b))$.

(3) Nechť $\phi, \phi^+ \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ jsou navzájem sdružené lineární transformace. Zjistěte, jaký je vztah mezi jejich spektry a soubory vlastních vektorů. Diskusi proveďte pro unitární prostor ($\mathbb{U}_n$ nad $\mathbb{C}$) a prověřte, zda je získaný výsledek v souhlasu s případem euklidovského prostoru ($\mathbb{E}_n$ nad $\mathbb{R}$).

Návod: (i) Vlastní hodnoty: Nechť $\phi, \phi^+ \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ jsou v ortonormální bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ reprezentovány maticemi $\mathbf{A}, \mathbf{A}^+$. Užijte vztahu (4.26) pro $\mathbf{G} = \mathbf{E}$ a ukažte, že jestliže je číslo λ_0 kořenem charakteristického polynomu lineární transformace ϕ, tj. polynomu $det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$, je číslo λ_0^* kořenem charakteristického polynomu lineární transformace ϕ^+, tj. polynomu $det(\mathbf{A}^+ - \xi\mathbf{E})$ včetně násobnosti. (Upravujte polynom $(det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}))^*$.) Pro $\phi, \phi^+ \in L(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n)$ odpadá operace $*$, takže charakteristické polynomy příslušné ϕ a

ϕ^+ jsou stejné, mají tedy stejné charakteristické kořeny. Tento výsledek není v rozporu s předchozím, neboť $det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ je v případě $\mathbb{E}_n$ polynomem s reálnými koeficienty, který s každým komplexním kořenem má za kořen současně číslo komplexně sdružené. Navíc je spektrum tvořenou pouze těmi charakteristickými kořeny, které jsou reálné.
(ii) Vlastní vektory: Označte jako a vlastní vektor lineární ransformace ϕ, který je jedním z vlastních vektorů příslušných hodnotě λ_a a b analogicky jeden z vlastních vektorů lineární transformace ϕ^+ příslušný vlastní hodnotě λ_b^+. Přímým výpočtem ukažte, že z rovnosti $(\phi(a), b) = (a, \phi^+(b))$ vyplývá, že $(\lambda_a - \lambda_b^{+*})(a, b) = 0$ a s využitím výsledku (i) diskutujte obě možnosti, při kterých uvedená rovnost může nastat.

(4) Dokažte: Lineární transformace $\phi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ je samoadjungovaná právě tehdy, jestliže pro alespoň jednu bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ v $\mathbb{U}_n$ platí $(\phi(e_i), e_j) = (e_i, \phi(e_j))$ pro všechna $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Návod: Zvolte libovolné vektory $a, b \in \mathbb{U}_n$ a vyjádřete je jako lineární kombinace báze. Využijte vztahu (4.27).

(5) Je-li lineární transformace $\phi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ reprezentována v ortonormální bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ samoadjungovanou maticí, pak je reprezentována samoadjungovanou maticí v každé ortonormální bázi v $\mathbb{U}_n$. Dokažte.

Návod: Předpokládejte samoadjungovanost matice $\mathbf{A}$ a výpočtem $\mathbf{A}'^{\mathbf{T}*}$ dokažte samoadjungovanost matice $\mathbf{A}' = \mathbf{TAT}^{-1}$, kde $\mathbf{T}$ je unitární matice.

(6) Proveďte důkaz věty 4.20 přímou konstrukcí báze tvořené vlastními vektory samoadjungované lineární transformace.

Návod: Předpokládejte, že $\phi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ je samoadjungovaná. Důkaz veďte matematickou indukcí vzhledem k dimenzi n prostoru $\mathbb{U}_n$ takto:

(i) n=1; uvědomte si řešení problému vlastních vektorů libovolné transformace v prostoru dimenze 1.

(ii) Indukční předpoklad: Předpokládejte platnost věty 4.20 pro $(n-1)$.

(iii) Důkaz pro n: Označte $L_{n-1} \subset \mathbb{U}_n (n-1)$-rozměrný podprostor v $\mathbb{U}_n$. Ortonormální bázi v L_{n-1} tvořenou vlastními vektory lineární transformace ϕ označte jako $(e_2, \ldots, e_n)$. (Poznámka: Ukažte nejprve, že $\phi(L_{n-1}) \subseteq L_{n-1}$; toto tvrzení platí pro libovolnou lineární transformaci ve V_n, existence ortonormální báze $(e_2, \ldots, e_n)$ v L_{n-1} je pak zajištěna indukčním předpokladem.) Dále označte L_1 ortogonální doplněk podprostoru L_{n-1} v $\mathbb{U}_n$ a $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ortonormální bázi v $\mathbb{U}_n$ (bázi $(e_2, \ldots, e_n)$ doplníte normovaným vektorem e_1, pro který je $L_1 = [e_1]$). Nyní je třeba ukázat, že e_1 je vlastním vektorem lineární transformace ϕ: Využitím samoadjungovanosti ϕ ukažte, že $(\phi(e_1), e_i) = 0$ pro každé $i \in \{2, \ldots, n\}$. Zdůvodněte, proč z této rovnosti vyplývá, že e_1 je vlastním vektorem ϕ.

(7) Dokažte, že pro případ euklidovského prostoru platí ve větě 4.20 i obrácené tvrzení: Nechť $\phi \in L(\mathbb{E}_n, \mathbb{E}_n)$ je lineární transformace. Jestliže v $\mathbb{E}_n$ existuje alespoň jedna ortonormální báze, v níž je ϕ reprezentována diagonální maticí, pak je ϕ symetrická. Zdůvodněte, proč toto obrácné tvrzení neplatí pro případ unitárního prostoru.

Návod: Předpokládejte, že daná lineární transformace ϕ je v ortonormální bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ v $\mathbb{E}_n$ reprezentována diagonální maticí $\mathbf{D}$. Dokažte, že matice $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}$ je symetrická v případě libovolné ortogonální matice $\mathbf{T}$ (vypočtěte $\mathbf{A}^T$). Jiná možnost důkazu spočívá v přímém využití věty 4.19. Pro případ $\mathbb{U}_n$ si uvědomte, že diagonální matice nemusí být nutně samoadjungovaná.

(8) Nechť V_n je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Dokažte následující tvrzení: Je-li lineární transformace $\phi \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$ reprezentována alespoň v jedné bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ diaonální maticí, pak ve V_n lze zvolit skalární součin tak, aby ϕ byla vzhledem k němu symetrická. Zobecněte toto tvrzení na případ prostoru V_n nad $\mathbb{C}$ s tím, že na diagonální reprezentující matici položíte dodatečný požadavek.

Návod: Využijte výsledku předchozí úlohy a věty 4.5.

(9) Podle návodu naznačeného v textu odstavce 4.15 proveďte podrobné odvození vztahů (4.31 a).

(10) Samoadjungované lineární transformace jsou v ortonormální bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ v $\mathbb{U}_n$ zadány svými reprezentujícími maticemi. Najděte jejich spektrální reprezentace (i) užitím vztahů (4.29), (ii) užitím vztahů (4.31 a).

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathbf{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{i} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iv)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(v)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{i} \\ 0 & 0 & -\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(vi)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(vii)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(viii)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(ix)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(x)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(xi)} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(xii)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(xiii)} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(xiv) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ (xv) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (xvi) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Výsledky:

(i) $\lambda_1 = 0,\ k_1 = 1,\ L_1 = [(-\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})]$
$\lambda_2 = 2,\ k_2 = 1,\ L_2 = [(\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})]$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $\lambda_1 = 0,\ k_1 = 1,\ L_1 = [(-\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})]$
$\lambda_2 = 1,\ k_2 = 1,\ L_2 = [(0, 1, 0)]$
$\lambda_3 = 2,\ k_3 = 1,\ L_3 = [(\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})]$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{i} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{i} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) $\lambda_1 = 5,\ k_1 = 1,\ L_1 = [(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})]$
$\lambda_2 = 10,\ k_2 = 1,\ L_2 = [(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})]$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(iv) $\lambda_1 = -2,\ k_1 = 1,\ L_1 = [(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})]$
$\lambda_2 = 3,\ k_2 = 1,\ L_2 = [(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})]$
$\lambda_3 = 6,\ k_3 = 1,\ L_3 = [(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})]$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(v) $\lambda_1 = 1,\ k = 2,\ L_1 = [(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)(0, 0, -\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}})]$
$\lambda_2 = -1,\ k_2 = 2,\ L_2 = [(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)(0, 0, \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})]$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{i} \\ 0 & 0 & -\mathbf{i} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathbf{i} \\ 0 & 0 & \mathbf{i} & 1 \end{pmatrix}$$

(vi) $\lambda_1 = 1,\ k = 3,\ L_1 = [(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0), (-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}})]$
$\lambda_2 = -3,\ k_2 = 1,\ L_2 = [(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})]$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(vii) $\lambda_1 = 0,\ k_1 = 2,\ L_1 = [(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})]$
$\lambda_2 = -2,\ k_2 = 1,\ L_2 = [(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})]$
$\lambda_3 = 2,\ k_3 = 1,\ L_3 = [(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)]$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(viii) $\lambda_1 = 5,\ k_1 = 1,\ L_1 = [(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$
$\lambda_2 = -5,\ k_2 = 1,\ L_2 = [(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$
$\lambda_3 = 3,\ k_3 = 1,\ L_3 = [(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$
$\lambda_4 = -3,\ k_4 = 1,\ L_4 = [(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ix) $\lambda_1 = 1,\ k = 2,\ L_1 = [(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})]$
$\lambda_2 = -1,\ k_2 = 2,\ L_2 = [(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})]$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(x) $\lambda_1 = 1,\ k_1 = 2,\ L_1 = [(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})]$
$\lambda_2 = -1,\ k_2 = 1,\ L_2 = [(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$
$\lambda_3 = 3,\ k_3 = 1,\ L_3 = [(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})]$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(xi) $\lambda_1 = 1,\ k_1 = 1,\ L_1 = [(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})]$
$\lambda_2 = -2,\ k_2 = 1,\ L_2 = [(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})]$
$\lambda_3 = 4,\ k_3 = 1,\ L_3 = [(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})]$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(xii) $\lambda_1 = -1,\ k_1 = 1,\ L_1 = [(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})]$
$\lambda_2 = 2,\ k_2 = 1,\ L_2 = [(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})]$
$\lambda_3 = 5,\ k_3 = 1,\ L_3 = [(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})]$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

(xiii) $\lambda_1 = 1,\ k_1 = 1,\ L_1 = [(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$
$\lambda_2 = -1,\ k_2 = 1,\ L_2 = [(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$
$\lambda_3 = 5,\ k_3 = 1,\ L_3 = [(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$
$\lambda_4 = 3,\ k_4 = 1,\ L_4 = [(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})]$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(xiv) $\lambda_1 = 1,\ k_1 = 1,\ L_1 = [(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})]$
$\lambda_2 = 4,\ k_2 = 1,\ L_2 = [(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})]$
$\lambda_3 = 7,\ k_3 = 1,\ L_3 = [(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})]$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

(xv) $\lambda_1 = 2,\ k_1 = 1,\ L_1 = [(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})]$
$\lambda_2 = 5,\ k_2 = 1,\ L_2 = [(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})]$
$\lambda_3 = 8,\ k_3 = 1,\ L_3 = [(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})]$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(xvi) $\lambda_1 = 2,\ k_1 = 2,\ L_1 = [(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{4}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}})]$
$\lambda_2 = -7,\ k_2 = 1,\ L_2 = [(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})]$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

(11) Nechť $L \subseteq \mathbb{U}_n$ je libovolný vektorový podprostor v $\mathbb{U}_n$ a π_L ortogonální projekce na L, $\pi_L \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$. Dokažte, že π_L je samoadjungovaná.

Návod: Označte jako L' ortogonální doplněk podprostoru L v $\mathbb{U}_n$. Rozklad libovolného vektoru $a \in \mathbb{U}_n$ na součet tvaru $a = a_L + a_{L'}$, $a_L \in L$, $a_{L'} \in L'$ je jednoznačný. Určete hodnotu skalárního součinu $(a_L, a_{L'})$. Zvolte vektory $a, b \in \mathbb{U}_n$ libovolně, $a = a_L + a_{L'}$, $b = b_L + b_{L'}$. Vypočtěte skalární součiny $(\pi_L(a), b)$ a $(a, \pi_L(b))$ a ukažte, že π_L vyhovuje definici samoadjungované lineární transformace.

(12) Řešte problém vlastních hodnot ortogonální projekce π_L, L je vektorovým podprostorem v $\mathbb{U}_n$.

Návod: Využijte rozkladu vektoru $a \in \mathbb{U}_n$ do tvaru součtu $a = a_L + a_{L'}$, $a_L \in L$, $a_{L'} \in L'$, kde L je ortogonální doplněk podprostoru L v $\mathbb{U}_n$ a definice ortogonální projekce.

Výsledek: Každý vektor $b \in L$ je vlastním vektorem projekce π_L příslušným vlastní hodnotě $\lambda = 1$, každý vektor $c \in L'$ je vlastním vektorem projekce π_L příslušným vlastní hodnotě $\lambda' = 0$.

(13) Nechť $\phi, \psi \in L(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ jsou samoadjungované lineární transformace. Zjistěte podmínky nutné a postačující pro to, aby lineární transformace $(\phi + \psi)$ resp. $\kappa\phi$, $\kappa \in \mathbb{C}$ resp. $\phi \circ \psi$ byla samoadjungovaná. Totéž proveďte pro případ symetrických lineárních transformací ϕ a ψ v $\mathbb{E}_n$.

Návod: Vyjádřete přímo z definice samoadjungované lineární transformace v $\mathbb{U}_n$ resp. symetické lineární transformace v $\mathbb{E}_n$.

Výsledek: Součet samoadjungovaných (resp. symetrických) lineárních transformací v $\mathbb{U}_n$ (resp. v $\mathbb{E}_n$) je samoadjungovaná (resp. symetrická) lineární transformace v $\mathbb{U}_n$ (resp. v $\mathbb{E}_n$). Skalární násobek samoadjungované transformace v $\mathbb{U}_n$ je samoadjungovanou lineární transformací v $\mathbb{U}_n$ právě tehdy, je-li skalár reálným číslem. V $\mathbb{E}_n$ je skalární násobek symetrické lineární transformace rovněž symetrickou lineární transformací v $\mathbb{E}_n$. Složení dvou samoadjungovaných (resp. symetrických) lineárních transformací v $\mathbb{U}_n$ (resp. v $\mathbb{E}_n$) je samoadjungovanou lineární transformací v $\mathbb{U}_n$ (resp. symetrickou lineární transformací v $\mathbb{E}_n$) právě tehdy, jestliže dané lineární transformace ϕ a ψ komutují, tj. je-li $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$.

Kapitola 8

Problém vlastních hodnot

V této kapitole se budeme zabývat dalšími vlastnostmi lineárních transformací vektorového prostoru V_n do sebe. Víme, že každá lineární transformace $\phi \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$ je v pevně zvolené bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ vektorového prostoru V_n reprezentována čtvercovou maticí řádu n, přičemž matice reprezentující tutéž lineární transformaci v různých bázích jsou podobné. Současně jsme v odstavci 1.9 formulovali kritéria pro to, aby daná čtvercová matice byla podobná jisté Jordanově matici, ve speciálním případě matici diagonální. Lze přirozeně očekávat, že i báze, v níž bude lineární transformace reprezentována takovou maticí speciálního tvaru, bude jistým způsobem pro danou lineární transformaci charakteristická. Nalezení takové báze je úzce spjato s problematikou tzv. vlastních hodnot a vlastních vektorů lineární transformace.

8.1 Vlastní hodnoty a vlastní vektory lineární transformace ve V_n

Nechť V_n je vektorový prostor nad $\mathbb{P}$ ($\mathbb{R} = \mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$), $\phi \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$ lineární transformace ve V_n. Nenulový vektor $b \in \mathrm{V}_n$ nazveme vlastním vektorem lineární transformace ϕ, jestliže existuje číslo $\lambda_0 \in \mathbb{P}$ takové, že platí

$$\phi(b) = \lambda_0 b \tag{8.1}$$

Je-li b vlastním vektorem transformace ϕ, je číslo λ_0 určeno jednoznačně a nazývá se vlastní hodnotou lineární transformace ϕ, příslušnou vlastnímu vektoru b.

Poznámka: Je-li b nulový vektor, je rovnost (4.20) splněna pro libovolné λ_0, proto nulový vektor nepovažujeme za vlastní.

Soubor vlastních hodnot lineární transformace ϕ nazýváme jejím spektrem.

Příklad 1: Zabývejme se problémem vlastních vektorů lineárních transformací z příkladu 15. Tyto transformace mají velmi názornou interpretaci:

(i) Vlastním vektorem nulové transformace $o \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$ je rovněž každý nenulový vektor $b \in \mathrm{V}_n$, příslušná vlastní hodnota je vždy nulová.

(ii) Vlastním vektorem identické transformace $\mathrm{id} \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$ je rovněž každý nenulový vektor $b \in \mathrm{V}_n$, příslušnou vlastní hodnotou je vždy číslo 1.

(iii) Nechť $\pi_{L,L'}$ je projekce (viz odstavec 4.10). Pro každý vektor $b \in L$ platí $\pi_{L,L'}(b) = b$, každý vektor $b \in L$ je tedy vlastním vektorem projekce $\pi_{L,L'}$ příslušným vlastní hodnotě 1. Pro $b' \in L'$ je $\pi_{L,L'}(b') = o$, je tedy i každý vektor $b' \in L'$ vlastním vektorem projekce $\pi_{L,L'}$, příslušnou vlastní hodnotou je číslo 0.

Zabývejme se nyní problémem praktického nalezení vlastních hodnot a vlastních vektorů dané lineární transformace. Jako obvykle budeme pracovat v libovolné, ale pevně zvolené bázi $(e_1, \dots, e_n)$ v prostoru V_n. Nechť $b \in \mathrm{V}_n$, tj. $b = \beta^i e_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Podmínka (4.20), vyjadřující požadavek, aby b byl vlastním vektorem lineární transformace $\phi \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$, má tvar

$$\phi(\beta^i e_i) = \lambda_0(\beta^i e_i) \Rightarrow \beta^i \phi(e_i) = \lambda_0 \beta^i e_i.$$

Označíme-li $\mathbf{A} = (\alpha^j_k)$, $j, k \in \{1, \dots, n\}$ matici, která reprezentuje ϕ v bázi $(e_1, \dots, e_n)$, pak $\phi(e_i) = \alpha^j_i e_j$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$ a z předchozích vztahů dostáváme

$$\beta^i(\alpha^j_i - \lambda_0 \delta^j_i) e_j = o$$

nebo maticově

$$(\beta)(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}) = (0). \tag{8.2}$$

Vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $e_1, \dots, e_n$ reprezentuje tento vztah soustavu rovnic

$$(\alpha^j_i - \lambda_0 \delta^j_i)\beta^i = 0 \tag{8.3}$$

pro neznámé složky $\beta^1, \ldots, \beta^n$ vlastního vektoru b. Jedná se o homogenní soustavu n lineárních rovnic o n neznámých, jejíž matice je $(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})^{\mathbf{T}}$. Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby tato soustava měla netriviální řešení (nenulový vektor) je nulovost matice determinantu matice soustavy.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})^{\mathbf{T}} = \det(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E}) = 0$$

Tato podmínka je ovšem splněna právě tehdy, je-li číslo λ_0 charakteristickým kořenem matice $\mathbf{A}$. Vzhledem k tomu, že podobné matice mají stejné charakteristické kořeny (věta 1.16), je zřejmé, že soubor hodnot λ_0, pro něž má soustava (4.21) netriviální řešení, je nezávislý na volbě báze. Hovoříme o charakteristických kořenech lineární transformace ϕ. Z téhož důvodu lze také invariantní faktory $e_1(\lambda), \ldots, e_n(\lambda)$ matice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$, nezávislé na bázi, považovat za charakteristické pro danou lineární transformaci ϕ. Je-li $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, tj. uvažujeme-li o V_n jako o prostoru nad polem komplexních čísel, je každý charakteristický kořen lineární transformace ϕ současně její vlastní hodnotou a naopak. Pro případ vektorového prostoru nad polem reálných čísel, tj. $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, mohou jako vlastní hodnoty sloužit podle definice pouze reálné charakteristické kořeny transformace ϕ. Na základě těchto úvah lze formulovat následující tvrzení:

Věta 8.1. *Nechť V_n je vektorový prostor nad polem $\mathbb{P}$, $\phi \in L(V_n, V_n)$ lineární transformace ve V_n. Pro $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ je číslo $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ vlastní hodnotou lineární transformace ϕ právě tehdy, je-li jejím charakteristickým kořenem. Je-li $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, pak číslo $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ je vlastní hodnotou transformace ϕ právě tehdy, je-li jejím reálným charakteristickým kořenem.*

Příklad 2: Předpokládejme, že lineární transformace ve V_2 je v bázi (e_1, e_2) reprezentována maticí $A = (\alpha_i^j)$, kde $\alpha_1^1 = 1$, $\alpha_1^2 = 1$, $\alpha_2^1 = 0$, $\alpha_2^2 = 1$. Najdeme její vlastní hodnoty a vlastní vektory:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1.$$

Soustava (4.21) má pro tento případ tvar

$$(\beta^1, \beta^2) \begin{pmatrix} \alpha_1^1 - \lambda_{1,2} & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 - \lambda_{1,2} \end{pmatrix} = (0,0) \Rightarrow (\beta^1, \beta^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,0).$$

Řešení soustavy: $(\beta^1, \beta^2) = (0, \beta^2)$, kde β^2 je libovolné číslo. Vlastním vektorem dané lineární transformace je tedy každý vektor kolineární s vektorem e_2.

Poznámka: Dvojnásobný charakteristický kořen $\lambda_{1,2} = 1$ je vlastní hodnotou ϕ jak v případě $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, tak i v případě $\mathbb{P} = \mathbb{R}$.

Příklad 3: Nechť (e_1, e_2) je báze kolmých jednotkových vektorů v euklidovské rovině, lineární transformace ϕ je definována jako rotace vektoru o úhel α (prověřte linearitu). Zřejmě je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

reprezentující maticí transformace ϕ v bázi (e_1, e_2). Rovnice pro charakteristické kořeny $(\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha = 0$ není při obecném úhlu α splněna pro žádné reálné λ. Pouze pro případ $\alpha = k\pi$ dostáváme $\lambda = (-1)^k$. Problém vlastních hodnot má tedy řešení jen pro $\alpha = k\pi$. V takovém případě je ovšem každý vektor euklidovské roviny vlastním vektorem dané lineární transformace ϕ (prověřte). Tento výsledek má i přirozenou geometrickou interpretaci (vysvětlete). Charakteristické kořeny dané transformace existují pro libovolné α, jsou však obecně komplexní: $\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm \mathbf{i}\sin\alpha$. Nemohou být proto vlastními hodnotami lineární transformace ve vektorovém prostoru nad polem reálných čísel.

Cvičení 8.1

(1) Nechť $\phi \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$ je regulární. Dokažte, že číslo $\lambda = 0$ nemůže být vlastní hodnotou lineární transformace ϕ.

Návod: Tvrzení vyplývá bezprostředně ze skutečnosti, že jádro regulární lineární transformace obsahuje pouze nulový vektor.

(2) Nechť $\phi \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$, V_n je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$. Nechť $f(x)$ je polynom stupně m.

(a) Dokažte, že $f(\phi)$ je rovněž lineární transformací ve V_n.

(b) Určete $\det f(\mathbf{A})$, je-li $\mathbf{A}$ libovolná z reprezentujících matic lineární transformace ϕ a znáte-li spektrum ϕ.

(c) Najděte spektrum lineární transformace $f(\phi)$.

Návod: (a) Využijte struktury prostoru $L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$ a výsledku úlohy (5) Cvičení 4.9.
(b) Nechť $\mathbf{A}$ je kterákoliv z reprezentujících matic lineární transformace ϕ, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ prvky spektra s násobnostmi $k_1, \ldots, k_r$. Zapište rozklad charakteristického polynomu $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ na kořenové činitele. Jsou-li $\xi_1, \ldots, \xi_s$ kořeny polynomu $f(x)$ s násobnostmi $l_1, \ldots, l_s$, zapište rozklad polynomu $f(x)$ na kořenové činitele a záměnou $x \to A$ utvořte maticový polynom $f(A)$. Jeho determinant je součinem determinantů $(\det(\mathbf{A} - \xi_i\mathbf{E}))^{l_i}$, $i \in \{1, \ldots, s\}$. Hodnotu $\det(\mathbf{A} - \xi_i\mathbf{E})$ zjistíte dosazením $\lambda = \xi_i$ do rozkladu charakteristického polynomu lineární transformace ϕ.

Výsledek:

$$\det f(\mathbf{A}) = konst. \prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{r}(\xi_i - \lambda_j)^{l_i + k_j} = \prod_{j=1}^{r} f(\lambda_j)^{k_j}.$$

Spektrum lineární transformace $f(\phi)$ tvoří hodnoty $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_r)$ s násobnostmi $k_1, \ldots, k_r$.

(3) Nechť ϕ, ψ jsou lineární transgormace ve V_n nad $\mathbb{C}$. Ukažte, že lineární transformace $\phi \circ \psi$ a $\psi \circ \phi$ mají stejné spektrum.

Návod: Ukažte, že lineární transformace $\phi \circ \psi$ a $\psi \circ \phi$ mají stejný charakteristický polynom, tj. $\det(\mathbf{AB} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\mathbf{BA} - \lambda\mathbf{E})$, kde $\mathbf{A}$ resp. $\mathbf{B}$ je reprezentující matice lineární transformace ϕ resp. ψ v libovolně zvolené bázi $(e_1, \ldots, e_n)$.

(4) Dokažte, že každý vlastní vektor lineární transformace $\phi \in L(V_n, V_n)$ je vlastním vektorem lineární transformace $f(\phi)$, kde f je polynom.

Návod: Předpokládejte, že vektor $b \in V_n$ je vlastním vektorem lineární transformace ϕ, tj. $\phi(b) = \lambda_b b$. Postupnou aplikací operátoru ϕ na tuto vektorovou rovnici ukažte, že vektor b je i vlastním vektorem lineární transformace ϕ^m, kde $m > 1$ je libovolné přirozené číslo. Jaká je odpovídající vlastní hodnota? Dále určete obraz vektoru b při lineární tarnsformaci $f(\phi) = \alpha^0 + \alpha^1\phi + \cdots + \alpha^k\phi^k$ a ukažte, že b je vlastním vektorem této transformace, příslušným vlastní hodnotě $f(\lambda_b)$.

(5) Určete spektrum a vlastní vektory lineární transformace ϕ, je-li v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ reprezentována maticí $\mathbf{A}$. Ve všech případech uvažujte vektorový prostor V_n nad $\mathbb{C}$ i vektorový prostor V_n nad $\mathbb{R}$.

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iv)} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(v)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(vi)} \begin{pmatrix} -7 & 2 & -1 & 0 \\ -23 & 3 & -8 & 1 \\ 10 & -2 & 3 & 0 \\ -24 & 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledek:

(i) $\lambda_1 = \mathbf{i}a$, $b_1 = (1, -\mathbf{i})$, $L_1 = [(1, -\mathbf{i})]$
$\lambda_2 = -\mathbf{i}a, b_2 = (1, \mathbf{i})$, $L_2 = [(1, \mathbf{i})]$

(ii) $\lambda_1 = 0$, $k_1 = q_1 = 1$, $L_1 = [(1, 1, 1)]$
$\lambda_2 = 3, k_2 = 2$, $q_2 = 1$, $L_2 = [(-2, 1, 4)]$

(iii) $\lambda_1 = 0$, $k_1 = 3$, $q_1 = 1, L_1 = [(-2, -1, 1)]$

(iv) $\lambda_1 = 2$, $k_1 = 3$, $q_1 = 2, L_1 = [(1, 2, 0), (1, 0, 1)]$

(v) $\lambda_1 = 2$, $k_1 = 3$, $L_1 = [(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)]$
$\lambda_2 = -2$, $k_2 = 1$, $L_2 = [(1, -1, -1, -1)]$

(vi) $\lambda_1 = \mathbf{i}$, $k_1 = 2$, $\lambda_2 = -\mathbf{i}, k_2 = 2$
Nad $\mathbb{R}$ nemá řešení (neexistují vlastní vektory).

(6) Dokažte následující tvrzení: Stopa (tj. součet všech diagonálních prvků) všech matic, reprezentujících danou lineární transformaci $\phi \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$ v různých bázích je stejná a je rovna součtu všech charakteristických kořenů dané lineární transformace včetně násobnosti (každý charakteristický kořen je do součtu započítáván tolikrát, kolikrát činí jeho násobnost).

Návod: Stopa matice $\mathbf{A} = (\alpha_i^j)$ je $Tr\mathbf{A} = \alpha_1^1 + \ldots + \alpha_n^n$. Vypočtete stopu matice $\mathbf{A}' = \mathbf{TAT}^{-1}$ a dokažte, že je rovna stopě matice $\mathbf{A}$. Využijte rovnosti $\mathbf{TT}^{-1} = \mathbf{E}$. Skutečnost, že $Tr\mathbf{A} = \lambda_1 k_1 + \ldots + \lambda_r k_r$, kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ jsou navzájem různé charakteristické kořeny a $k_1, \ldots, k_r$ jejich násobnosti, vyplývá z toho, že matice $\mathbf{A}$ je podobná svému Jordanovu normálnímu tvaru.

8.2 Kritéria existence diagonální reprezentace lineární transformace $\phi \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$

Věta 8.2. *Lineární transformace $\phi \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$ je v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ reprezentována diagonální maticí právě tehdy, jsou-li $e_1, \ldots, e_n$ vlastní vektory této lineární transformace.*

Důkaz: (i) Nechť $e_1, \ldots, e_n$ jsou vlastní vektory lineární transformace ϕ a nechť tvoří bázi ve V_n. Pak je $\phi(e_i) = \lambda_i e_i$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$ a reprezentující matice má tvar $\mathbf{A} = (a_i^j)$, $a_i^i = \lambda_i$, $a_j^i = 0$ pro $i \neq j$, pro $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

(ii) Předpokládejme, že lineární transformace ϕ je v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ reprezentována diagonální maticí, prvky v diagonále označme $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Z významu matice $\mathbf{A}$ vyplývá, že obrazy $c_1, \ldots, c_n$ vektorů báze $e_1, \ldots, e_n$ při transformaci ϕ mají tvar $c_i = \phi(e_i) = \lambda_i e_i$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$, takže vektory $e_1, \ldots, e_n$ jsou vlastními vektory lineární transformace ϕ.

$\diamondsuit$

Použitelnost tohoto kritéria je vázána na vyřešení otázky, za jakých předpokladů je možné z vlastních vektorů dané lineární transformace vytvořit bázi prostoru V_n. Odpověď na tuto otázku vyžaduje, abychom se zabývali problémem, jak charakterizovat soubor vlastních vektorů příslušných téže vlastní hodnotě a soubor vlastních vektorů příslušných různým vlastním hodnotám.

Věta 8.3. *Nechť V_n je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, $\phi \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$. Označme $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ všechny navzájem různé vlastní hodnoty lineární transformace ϕ.*

(i) Nechť q_p, $1 \leq p \leq r$, značí počet invariantních faktorů transformace ϕ, jejichž kořenem je vlastní hodnota λ_p. Pak vlastní vektory lineární transformace ϕ, které přísluší vlastní hodnotě λ_p, generují vektorový podprostor $L_p \subseteq \mathrm{V}_n$ dimenze q_p.

(ii) Nechť $b_1, \ldots, b_k$ jsou vlastní vektory lineární transformace ϕ, příslušné navzájem různým vlastním hodnotám $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $1 \leq k \leq r$. (Jako vektor b_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$ volíme libovolný z vlastních vektorů příslušných hodnotě λ_i.) Pak vektory $b_1, \ldots, b_k$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz: (i) Charakteristické kořeny transformace ϕ jsou prvky $\mathbb{C}$. Nad $\mathbb{C}$ tedy existuje Jordanův normální tvar matic, reprezentujících danou lineární transformaci v libovolných bázích (věta 1.18). Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ $(r \leq n)$ jsou navzájem různé charakteristické kořeny. Uvažujme o hodnotě λ_p, $1 \leq p \leq r$. Je zřejmé, že n-tice složek reprezentující ve zvolené bázi vlastní vektory příslušné hodnotě λ_p jsou řešením soustavy rovnic (4.21 a) pro $\lambda_0 = \lambda_p$ a podle věty 3.4 vytvářejí vektorový podprostor dimenze $(n - h_p)$ v $\mathbb{C}^n$, kde h_p je hodnost matice soustavy $(\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{E})^{\mathbf{T}}$. Matice $(\mathbf{A} - \lambda_p \mathbf{E})$ je ovšem ekvivalentní matici

$$\mathbf{D}(\lambda_p) = \begin{pmatrix} e_1(\lambda_p) & & 0 \\ & e_2(\lambda_p) & \\ & & \\ 0 & & e_n(\lambda_p) \end{pmatrix},$$

v níž $e_1(\lambda), \ldots, e_n(\lambda)$ jsou invariantní faktory charakteristické matice $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$. Při dosazení $\lambda = \lambda_p$ se v charakteristické matici anulují ty invariantní faktory, jichž je λ_p kořenem. Je tedy q_p řádků matice $\mathbf{D}(\lambda_p)$ nulových. Její hodnost je tedy $(n - q_p)$ a dimenze prostoru řešení soustavy (4.21 a) je $n - (n - q_p) = q_p$.

(ii) Důkaz druhé části tvrzení provedeme indukcí vzhledem k indexu k. Pro $k = 1$ je zřejmé, že tvrzení platí, neboť jeden (nenulový) vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ_1 tvoří lineárně nezávislý systém. Indukční předpoklad: Nechť $b_1, \ldots, b_k$ jsou vlastní vektory příslušné vlastním hodnotám $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, navzájem různým. ($b_i$ je libovolný z vlastních vektorů příslušných hodnotě λ_i.) Předpokládejme, že vektory $b_1, \ldots, b_k$ jsou lineárně nezávislé. Nechť $b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}$ jsou vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$. Dokážeme, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé. Nechť

$$\gamma^1 b_1 + \cdots + \gamma^{k+1} b_{k+1} = 0$$

Pak také

$$\gamma^1 \phi(b_1) + \cdots + \gamma^{k+1} \phi(b_{k+1}) = 0$$

a tedy

$$\gamma^1 \lambda_1 b_1 + \cdots + \gamma^k \lambda_k b_k + \gamma^{k+1} \lambda_{k+1} b_{k+1} = 0$$

Odečtením poslední rovnice od první rovnice vynásobené číslem λ_{k+1} dostaneme

$$\gamma^1 (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) b_1 + \cdots + \gamma^k (\lambda_k - \lambda_{k+1}) b_k = 0.$$

Vzhledem k předpokládané nezávislosti vektorů $b_1, \ldots, b_k$ a vzhledem k různosti hodnot $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ je $\gamma^1 = \ldots = \gamma^k = 0$. Z rovnosti $\gamma^1 b_1 + \cdots + \gamma^{k+1} b_{k+1} = 0$ pak vyplývá i rovnost $\gamma^{k+1} = 0$, neboť vektor b_{k+1} je nenulový jakožto vlastní vektor lineární transformace ϕ. Tím je lineární nezávislost systému $(b_1, \ldots, b_{k+1})$ dokázána.

$\diamondsuit$

Poznámka: Samozřejmým d?sledkem první části věty 4.14 je věta 1.19, která je kritériem existence diagonální reprezentace dané lineární transformace, tj. udává podmínku nutnou a postačující pro to, aby z vlastních vektorů lineární transformace bylo možné vytvořit bázi v prostoru V_n. Připomeňme, že touto podmínkou je, aby poslední invariantní faktor $e_n(\lambda)$ charakteristické matice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$, kde $\mathbf{A}$ je libovolná z matic reprezentujících lineární transformaci ϕ, měl pouze jednonásobné kořeny. Dimenze prostoru

L_p vlastních vektorů příslušných hodnotě λ_p je v takovém případě rovna násobnosti k_p charakteristického kořene λ_p (zdůvodněte).

Cvičení 8.2

(1) Ukažte, že pro singulární lineární transformaci $\phi \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$ má problém vlastních hodnot vždy řešení, tj. singulární lineární transformace má alespoň jeden vlastní vektor. Charakterizujte podprostor vlastních vektorů singulární lineární transformace takových, že jejich existence je zaručena podmínkou singulárnosti. Jaká vlastní hodnota odpovídá těmto vlastním vektorům?

Návod: Uvědomte si, jaký je obraz libovolného vektoru jádra lineární transformace ϕ a ukažte, že v případě singulární lineární transformace je $dimN(\phi) \geq 1$.

(2) Nechť $\phi, \psi \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$ jsou lineární transformace, které mají společný systém vlastních vektorů, který nechť generuje bázi ve V_n. Dokažte, že ϕ, ψ komutují, tj. $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$.

Návod: Označte $(e_1, \ldots, e_n)$ bázi ve V_n tvořenou společnými vlastními vektory lineárních transformací ϕ a ψ. Vyjádřete libovolný vektor $a \in \mathrm{V}_n$ jako lineární kombinaci báze. Užitím vztahů $\phi(e_i) = \lambda_i e_i$, $\psi(e_i) = \xi_i e_i$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$ ukažte, že $(\phi \circ \psi)(a) = (\psi \circ \phi)(a)$.

(3) Nechť systém vlastních vektorů každé z lineárních transformací $\phi, \psi \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$ generuje celý prostor V_n. Předpokládejte, že ϕ a ψ komutují. Ukažte, že systém vlastních vektorů je pro obě lineární transformace společný.

Návod: Nejprve dokažte, že dvě lineární transformace $\phi, \psi \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$ komutují právě tehdy, když komutují matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, reprezentující lineární transformace ϕ a ψ v téže (libovolné) bázi. Nechť $(e_1, \ldots, e_n)$ je báze ve V_n, tvořená například vlastními vektory transformace ϕ. V této bázi má reprezentující matice $\mathbf{D}$ lineární transformace ϕ diagonální tvar s vlastními hodnotami v diagonále. Označte je například $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Matici, repezentující v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ lineární transformaci ψ, označte $\mathbf{A} = (\alpha^i_j), i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Vypočtěte matice $\mathbf{DA}$ a $\mathbf{AD}$ a ukažte, že z podmínky komutace $\mathbf{DA} = \mathbf{AD}$ vyplývá pro všechna $i, k \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq k$, platnost některé z rovností $\alpha^k_i = 0, \lambda_i = \lambda_k$. Souborům hodnot $\lambda_{i_1} = \ldots = \lambda_{i_q}$ přísluší vždy podprostor vlastních vektorů $[e_{i_1}, \ldots, e_{i_q}]$. Bázi v tomto podprostoru lze volit libovolně, přičemž se nenaruší diagonální tvar matice, reprezentující lineární transformaci ϕ. Vzhledem k tomu, že vlastní vektory lineární transformace ψ generují rovněž celý prostor V_n, lze volbu báze v podprostoru $[e_{i_1}, \ldots, e_{i_q}]$ provést tak, aby ji tvořily vlastní vektory transformace ψ. Rozbor proveďte podrobněji.

(4) Nechť $\phi, \psi \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$ komutují. Dokažte, že pro každý vlastní vektor a transformace ϕ je i vektor $\psi(a)$ jejím vlastním vektorem a přísluší téže vlastní hodnotě jako vektor a. (Naopak, pro každý vlastní vektor b transformace ψ je také $\phi(b)$ jejím vlastním vektorem příslušným téže vlastní hodnotě.)

Návod: Na rovnost $\phi(a) = \lambda_p a$ aplikujte operátor ψ a využijte komutace.

(5) Na vhodném jednoduchém příkadu ukažte nezbytnost předpokladu v úloze (3), který vyžaduje, aby vlastní vektory každé z komutujících lineárních transformací, pro něž dokazujeme shodnost souboru vlastních vektorů, generovaly celý prostor V_n.

Návod: Vzhledem k tomu, že například identita komutuje s každou lineární transformací, stačí volit $\phi = \mathrm{id}$ a za ψ jakoukoliv lineární transformaci ve V_n, z jejíchž vlastních vektorů nelze utvořit bázi prostoru V_n. Je zřejmé, že takto zvolené komutující lineární transformace ϕ a ψ nemají společný soubor vlastních vektorů.

(6) Nechť $\phi \in L(V_n, V_n)$ je lineární transformace, z jejíchž vlastních vektorů lze utvořit bázi prostoru V_n. Prvkům spektra $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ s násobnostmi $k_1, \dots, k_r$ $(k_1 + \cdots + k_r = n)$ tedy přísluší podprostory vlastních vektorů $L_1, \dots, L_r$ o dimenzích $k_1, \dots, k_r$.

(a) Dokažte, že $L_1 + \cdots + L_r = V_n$ a $L_i \cap L_j = \{o\}$ pro všechna $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

(b) Ukažte, že lineární transformaci ϕ lze vyjádřit jako lineární kombinaci projekcí $\pi_1, \dots, \pi_r$ (definovaných v úloze (3) Cvičení 4.10).

Návod: (a) Užijte věty 4.14.

(b) Libovolný vektor $a \in V_n$ vyjádřete ve tvaru součtu $a = \pi_1(a) + \cdots + \pi_r(a)$. Na tuto rovnost aplikujte operátor ϕ a využijte skutečnosti, že každý vektor prostoru L_j je vlastním vektorem lineární transformace ϕ příslušným vlastní hodnotě λ_j.

Výsledek: $\phi = \lambda_1\pi_1 + \ldots + \lambda_r\pi_r$.

8.3 Jordanův normální tvar a podprostory generované vlastními vektory lineární transformace

V předchozím odstavci jsme formulovali kritéria pro existenci diagonální reprezentace dané lineární transformace $\phi \in L(V_n, V_n)$. Diagonální reprezentace je speciálním případem tzv. reprezentace Jordanovy, jejíž existenci pro každou lineární transformaci ve V_n nad $\mathbb{C}$ zaručuje věta 1.18. Vzniká přirozená otázka, jakým způsobem lze ve V_n zkonstruovat bázi, v níž je daná lineární transformace ϕ reprezentována Jordanovou maticí.

Nechť $\mathcal{J}$ je Jordanova matice dané lineární transformace a $(f_1, \dots, f_n)$ příslušná báze. Označení hodnot spektra transformace ϕ proveďme v souladu s označením v odstavci 1.9:

λ_i i-tá hodnota spektra, $i \in \{1, \dots, r\}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ jsou navzájem různé hodnoty,

k_i násobnost hodnoty λ_i,

q_i počet invariantních faktorů matice $\mathcal{J} - \lambda\mathbf{E}$ obsahujících elementární dělitele $(\lambda - \lambda_i)^{k_{ij}}$, $j \in \{1, \dots, q_i\}$, indexování hodnot $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ může být voleno tak, aby $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_r$,

k_{ij} označení lze opět volit tak, aby $k_{i1} \geq \ldots \geq k_{iq_i}$

Číslo q_i určuje počet Jordanových submatic příslušných hodnotě λ_i a současně dimenzi odpovídajícího podprostoru L_i vlastních vektorů, hodnoty k_{ij} jsou řády Jordanových submatic. Jordanova matice lineární transformace ϕ má tedy tvar

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & J_{1q_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & J_{rq_r} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Určíme obrazy báze $(f_1, \ldots, f_n)$ při zobrazení ϕ:

$$\begin{pmatrix} \phi(f_1) \\ \phi(f_2) \\ \vdots \\ \phi(f_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ 0 & & J_{rq_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

Z uvedeného zápisu je zřejmé, že jednotlivé bloky $\mathcal{J}_{ij}$ Jordanovy matice transformují v sebe podprostory Λ_{ij} odpovídající dimenze $\dim \Lambda_{ij} = k_{ij}, j \in \{1, \ldots, q_i\}, i \in \{1, \ldots, r\}$. Jednotlivé rovnice vztahu (4.22) mají tvar

$$\begin{aligned}
\phi(f_1) &= \lambda_1 f_1 + f_2 \\
\phi(f_2) &= \lambda_1 f_2 + f_3 \\
&\vdots \\
\phi(f_{k_{11}-1}) &= \lambda_1 f_{k_{11}-1} + f_{k_{11}} \\
\phi(f_{k_{11}}) &= \lambda_1 f_{k_{11}} \\
\\
\phi(f_{k_{11}+1})) &= \lambda_1 f_{k_{11}+1} + f_{k_{11}+2} \\
\phi(f_{k_{11}+2})) &= \lambda_1 f_{k_{11}+2} + f_{k_{11}+3} \\
&\vdots \\
\phi(f_{k_{11}+k_{12}-1}) &= \lambda_1 f_{k_{11}+k_{12}-1} + f_{k_{11}+k_{12}} \\
\phi(f_{k_{11}+k_{12}}) &= \lambda_1 f_{k_{11}+k_{12}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \phi(f_{k_{11}+\ldots+k_{rq_r-1}+1}) &= \lambda_r f_{k_{11}+\ldots+k_{rq_r-1}+1} + f_{\ldots+2} \\ &\vdots \\ \phi(f_n) = \phi(f_{k_{11}+\ldots+k_{rq_r}}) &= \lambda_r f_{k_{11}+\ldots+k_{rq_r}} = \lambda_r f_n \end{aligned}$$

Je vidět, že poslední rovnice každého bloku je rovnicí pro vlastní vektor. Všimněme si například prvního bloku. Jednotlivé vektory báze podprostoru Λ_{11} jsou řešením následujícího řetězce rovnic:

$$\begin{aligned} (\phi - \lambda_1 \mathrm{id})(f_{k_{11}}) &= o \\ (\phi - \lambda_1 \mathrm{id})(f_{k_{11}-1}) &= f_{k_{11}} \\ (\phi - \lambda_1 \mathrm{id})(f_{k_{11}-2}) &= f_{k_{11}-1} \\ &\vdots \\ (\phi - \lambda_1 \mathrm{id})(f_2) &= f_3 \\ (\phi - \lambda_1 \mathrm{id})(f_1) &= f_2 \end{aligned} \tag{8.5}$$

(Analogickým způsobem dostaneme báze v ostatních podprostorech Λ_{ij}.) Je-li ϕ zadána v předem zvolené bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ maticí $\mathbf{A}$ a označíme-li $(\epsilon_j), j \in \{1, \ldots, k_{11}\}$ n-tice složek hledaných vektorů f_j v téže bázi $(e_1, \ldots, e_n)$, pak z (4.23) dostáváme následující soustavy rovnic pro neznámé $(\epsilon_1) = (\epsilon_1^1, \ldots, \epsilon_1^n), \ldots, (\epsilon_{k_{11}}^1, \ldots, \epsilon_{k_{11}}^n)$:

$$\begin{aligned} (\epsilon_{k_{11}})(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) &= (0) \\ (\epsilon_{k_{11}-1})(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) &= (\epsilon_{k_{11}}) \\ &\vdots \\ (\epsilon_2)(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) &= (\epsilon_3) \\ (\epsilon_1)(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) &= (\epsilon_2) \end{aligned} \tag{8.6}$$

Analogické vztahy opět platí pro ostatní podprostory Λ_{ij}. Poznamenejme, že báze $(f_1, \ldots, f_n)$, v níž je ϕ reprezentována Jordanovou maticí, není určena jednoznačně (viz Cvičení 4.13), což je v souladu s nejednoznačností podobnostní transformace $\mathcal{J} = \mathbf{TAT}^{-1}$, konstatovanou v odstavci 1.9. Jordanova matice samotná samozřejmě jednoznačně určena je, až na pořadí bloků v hlavní diagonále.

Příklad 4: Lineární transformace $\phi \in L(\mathrm{V}_4, \mathrm{V}_4)$ je v bázi $(e_1, \ldots, e_4)$ reprezentována maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Najdeme podobnostní transformaci, která převádí matici $\mathbf{A}$ na Jordanův normální tvar a alespoň jednu bázi, v níž je dána lineární transformace ϕ reprezentována Jordanovou maticí.

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2-\lambda & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = [(3-\lambda)(-1-\lambda)+4][(2-\lambda)(-\lambda)+1] = (\lambda-1)^4.$$

Charakteristické kořeny (spektrum): $\lambda_1 = 1$, $k_1 = 4$.
Největší společní dělitelé minorů prvého až čtvrtého řádu:

$$d_1(\lambda) = 1,\ d_2(\lambda) = 1,\ d_3(\lambda) = (\lambda - 1)^2,\ d_4(\lambda) = (\lambda - 1)^4$$

Invariantní faktory: $e_1(\lambda) = e_2(\lambda) = 1$, $e_3(\lambda) = e_4(\lambda) = (\lambda - 1)^2$
Odtud $q_1 = 2$, $k_{11} = k_{12} = 2$, Jordanův normální tvar:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hledaná báze $(f_1, \ldots, f_4)$ splňuje rovnice (4.22):

$$\begin{array}{lll} \phi(f_1) = f_1 + f_2,\ \phi(f_2) = f_2 & (f_2 = \text{vlastní vektor}) & \Lambda_{11} = [f_1, f_2] \\ \phi(f_3) = f_3 + f_4, \phi(f_4) = f_4 & (f_4 = \text{vlastní vektor}) & \Lambda_{12} = [f_3, f_4] \end{array}$$

Vyřešíme nejprve rovnice pro vlastní vektory. Pro jednoduchost označme neznámé složky vlastního vektoru v bázi $(e_1, \ldots, e_4)$ jako (x, y, z, t). Pak

$$(x, y, z, t)(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E}) = (0)$$

Maticí této soustavy je matice $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})^{\mathbf{T}}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 & -17 \\ 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení soustavy: $(x, y, z, t) = (2y + 5t, y, t, t)$, za volné neznámé jsme volili y a t. Řešení generují podprostor dimenze $q_1 = 2$. Pro $y = 1$, $t = 0$ označíme řešení například f_2, pro $y = 0$, $t = 1$ jako f_4, je tedy

$$f_2 = (2, 1, 0, 0) \qquad f_4 = (5, 0, 1, 1)$$

Soustava rovnic pro f_1 resp. f_3 má při označení neznámých složek vektoru f_1 resp. f_3 v bázi $(e_1, \ldots, e_4)$ jako (X, Y, Z, T) tvar

$$(X, Y, Z, T)(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E}) = (2y + 5t, y, t, t)$$

Upravujeme matici soustavy:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 7 & -17 & 2y{+}5t \\ 1 & -2 & 1 & -6 & y \\ 0 & 0 & 1 & -1 & t \\ 0 & 0 & 1 & -1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 5 & -5 & 5t \\ 1 & -2 & 1 & -6 & y \\ 0 & 0 & 1 & -1 & t \\ 0 & 0 & 1 & -1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -6 & y \\ 0 & 0 & 1 & -1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Obecné řešení této soustavy:

$$f_1; f_3 = (X, Y, Z, T) = (2Y + 5T, Y, T, T) + (y - t, 0, t, 0)$$

Řešení $(2y+5t, y, t, t), (y-t+2Y+5T, Y, t+T, T)$, kde $(y,t), (Y,T)$ představují všechny nezávislé volby volných neznámých, charakterizují všechny báze ve V_4, v nichž je lineární transformace ϕ reprezentována svou Jordanovou maticí. Uvažme například následující volby neznámých:

$$(y,t) : (1,0), (0,1) \qquad (Y,T) : (1,0), (0,1)$$

Všechny jejich kombinace dávají následující možnosti volby báze $(f_1, \ldots, f_4)$, v níž je ϕ reprezentována Jordanovou maticí:

$$f_1 = (3,1,0,0), f_2 = (2,1,0,0), f_3 = (1,1,1,0), f_4 = (5,0,1,1)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -6 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = (6,0,1,1), f_2 = (2,1,0,0), f_3 = (1,1,1,0), f_4 = (5,0,1,1)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -6 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = (3,1,0,0), f_2 = (2,1,0,0), f_3 = (4,0,2,1), f_4 = (5,0,1,1)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = (6,0,1,1), f_2 = (2,1,0,0), f_3 = (4,0,2,1), f_4 = (5,0,1,1)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -6 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Další čtyři možnosti dostaneme záměnou indexů $(1,2) \leftrightarrow (3,4)$.

Poznámka: Pod každou z možností volby vektorů báze $(f_1, \ldots, f_4)$ je uvedena příslušná matice přechodu $\mathbf{T}$ a matice inverzní $\mathbf{T}^{-1}$, které realizují podobnostní transformaci $\mathcal{J} = \mathbf{TAT}^{-1}$.

Cvičení 8.3

(1) Na základě diskuze hodnosti matic vystupujících v soustavách rovnic (4.24) se pokuste o obecný rozbor řešení problému nalezení báze $(f_1, \ldots, f_n)$ ve V_n, v níž je daná lineární transformace $\phi \in L(\mathrm{V}_n, \mathrm{V}_n)$ reprezentována Jordanovou maticí.

Návod: Pro daný charakteristický kořen, například λ_1, označte h_1 hodnost matice $\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}$, kde $\mathbf{A}$ je matice reprezentující ϕ ve zvolené bázi $(e_1,\ldots,e_n)$. Dimenze prostoru řešení soustavy rovnic pro složky vlastních vektorů příslušných hodnotě λ_1 je $d_1=n-h_1$. Volné neznámé označte například $x_{k_1},\ldots,x_{k_{d_1}}, 1\le k_j\le n$. Diskutujte, jakou hodnost mohou mít rozšířené matice soustavy rovnic (4.24) a jaký tvar má jejich obecné řešení. Uveďte v souvislosti s volbou volných neznámých $x_{k_1},\ldots,x_{k_{d_1}}$ (existuje-li například index $j\in\{1,\ldots,d_1\}$ tak, že $k_j\le h_1\le k_{j-1}$, pak následující soustava rovnic v řetězci, mající na pravé straně vektor $(x^1,\ldots,x^n)$, má řešení jedině při volbě $x_{k_j}=\ldots=x_{k_{d_1}}=0$). Jaký tvar má při takové volbě obecné řešení soustavy?

(2) V následujících příkladech představuje $\mathbf{A}$ matici reprezentující danou lineární transformaci $\phi\in L(\mathrm{V}_n,\mathrm{V}_n)$ v bázi $(e_1,\ldots,e_n)$. Určete alespoň jednu bázi $(f_1,\ldots,f_n)$, v níž je ϕ reprezentována Jordanovou maticí. Příslušnou Jordanovu matici rovněž určete a najděte i odpovídající podobnostní transformaci $\mathcal{J}=\mathbf{TAT}^{-1}$.

$$\text{(i)}\begin{pmatrix}3&-1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&3&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\quad\text{(ii)}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\text{(iii)}\begin{pmatrix}7&1&-1&1\\-1&9&-1&1\\1&-1&9&-1\\1&-1&1&7\end{pmatrix}$$

$$\text{(iv)}\begin{pmatrix}-1&1&1\\-5&21&17\\6&-26&-21\end{pmatrix}\quad\text{(v)}\begin{pmatrix}4&5&-2\\-2&-2&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\quad\text{(vi)}\begin{pmatrix}3&7&-3\\-2&-5&2\\-4&-10&3\end{pmatrix}$$

$$\text{(vii)}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}\quad\text{(viii)}\begin{pmatrix}-4&2&10\\-4&3&7\\-3&1&7\end{pmatrix}$$

$$\text{(ix)}\begin{pmatrix}13&16&16\\-5&-7&-6\\-6&-8&-7\end{pmatrix}\quad\text{(x)}\begin{pmatrix}0&3&3\\-1&8&6\\2&-14&-10\end{pmatrix}$$

Výsledek: (i) Bází může být například systém vektorů $(f_1,\ldots,f_4)$:
$f_1=(0,1,0,0)$, $f_2=(1,-1,0,0)$, $f_3=(0,0,0,1)$, $f_4=(0,0,1,-1)$
Matice $\mathbf{T},\mathbf{T}^{-1}$ a $\mathcal{J}$ následují:

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

Obecný tvar matice $\mathbf{T}$:

$$\begin{pmatrix}p-r&r&q-s&s\\p&-p&q&-q\\v-w&w&u-t&t\\v&-v&u&-u\end{pmatrix}$$

kde čtveřice $(p,-p,q,-q)$ a $(v,-v,u,-u)$ jsou nezávislé, ale jinak libovolné. U dalších příkladů již uvádíme pouze příklad matice $\mathbf{T}$, odpovídající matici $\mathbf{T}^{-1}$, Jordanovu matici a obecný tvar matice $\mathbf{T}$ v uvedeném pořadí. Složky vektorů $f_1, \ldots, f_n$ tvořících bázi, v níž je ϕ reprezentována uvedenou Jordanovou maticí, jsou v řádcích matice $\mathbf{T}$.

$$\text{(ii)} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 14 & 32 \\ 0 & 8 & 4 & 32 \\ 0 & 0 & 16 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{32} & -\frac{3}{32} \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{32} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2u & 2v-6u & w-3v+5u & t \\ 0 & 4u & 4v-6u & 2w \\ 0 & 0 & 8u & 8v \\ 0 & 0 & 0 & 16u \end{pmatrix}$$

kde (u, v, w, t) jsou libovolná nenulová čísla.

$$\text{(iii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{(iv)} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u+\frac{1}{4}v & 5u+\frac{1}{4}v & 4u \\ -v & 5v & 4v \\ -2w & 6w & 5w \end{pmatrix}$$

(u, v, w) libovolná nenulová čísla.

$$\text{(v)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u & 2u+1 & -u-2 \\ v & 2v-1 & -v+1 \\ w & 2w & -w \end{pmatrix}$$

(u, v, w) libovolná, $w \neq 0$.

$$\text{(vi)} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ \mathbf{i}-1 & 2\mathbf{i}-3 & 1 \\ -1-\mathbf{i} & -3-2\mathbf{i} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & 2+\mathbf{i} & 2-\mathbf{i} \\ 2 & -1-\mathbf{i} & -1+\mathbf{i} \\ 2 & -2\mathbf{i} & 2\mathbf{i} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2u & -4u & u \\ (-1+\mathbf{i})v & (-3+2\mathbf{i})v & v \\ (-1-\mathbf{i})w & (-3-2\mathbf{i})w & w \end{pmatrix}$$

(u, v, w) libovolná nenulová čísla.

(vii) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3p+2q & p & q \\ -u+3v+2w & v & w \\ -u & -u & u \end{pmatrix}$$

(u, v, w, p, q) libovolná čísla, $u \neq 0$, $p \neq -q$.

(viii) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 & -6 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} t & -v+3u & -2t+v-4u \\ v & -u & u-2v \\ u & 0 & -2u \end{pmatrix}$$

(u, v, t) libovolná čísla, $u \neq 0$.

(ix) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} v & u & 2v-u \\ u & 0 & 2u \\ w & 2w & w \end{pmatrix}$$

(u, v, w) libovolná čísla, $u, w \neq 0$.

(x) $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 15 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{6}{9} \\ -1 & 1 & \frac{3}{9} \\ 1 & -\frac{12}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2u & 6u & 3u \\ -w-v & 2w+5v & 3v \\ -3w & 15w & 9w \end{pmatrix}$$

(u, v, w) libovolná čísla, $u, w \neq 0$.

Kapitola 9

Geometrické aplikace

Vyřešením problému diagonalizace symetrických matic, tj. problému nalezení diagonální reprezentace symetrických lineárních transformací v $\mathbb{E}_n$, získáváme velmi účinný aparát pro klasifikaci ploch 2. stupně v $\mathbb{R}^3$ (tzv. kvadrik) a křivek 2. stupně v $\mathbb{R}^2$ (kuželoseček). Pro typ těchto ploch a křivek je totiž rozhodující kvadratická část jejich kartézské rovnice, již lze v dané bázi jednoznačně reprezentovat symetrickou maticí. Nalezení odpovídající diagonální reprezentace je ekvivalentní určení takové ortonormální báze v $\mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^2$, v níž má kvadrika resp. kuželosečka zvláště jednoduchý (kanonický) tvar.

9.1 Kanonický tvar kvadratických forem na $\mathbb{U}_n$

Nechť $\mathbb{U}_n$ je unitární prostor, $\varphi \in (\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_n)$ samoadjungovaná transformace (vzhledem ke zvolenému skalárnímu součinu), tj. pro libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{U}_n$ platí $(\varphi(\mathbf{a}), \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \varphi(\mathbf{b}))$. V ortonormální bázi $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ je tato rovnost vyjádřena ve tvaru $(\alpha)\mathbf{A}(\beta)^{\mathbf{T}*} = (\alpha)\mathbf{A}^{\mathbf{T}*}(\beta)^{\mathbf{T}*}$, kde (α), (β) jsou n-tice složek vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ v dané bázi, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}*}$ je matice samoadjungované transformace φ v téže bázi. *Kvadratickou formou na $\mathbb{U}_n$, příslušnou dané samoadjungované transformaci φ* rozumíme zobrazení

$$\kappa : \mathbb{U}_n \ni \mathbf{a} \to \kappa(\mathbf{a}) = (\varphi(\mathbf{a}), \mathbf{a}) \in \mathbb{C}$$

Kvadratickou formu lze chápat jako funkci n proměnných, jimiž jsou složky $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ vektoru $\mathbf{a} \in \mathbb{U}_n$ vzhledem k určité bázi $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v $\mathbb{U}_n$. Je-li $\mathbf{G}$ matice skalárního součinu v dané bázi, pak podle (4.3) platí

$$\kappa(\mathbf{a}) = (\alpha)\mathbf{AG}(\alpha)^{\mathbf{T}*} \tag{9.1}$$

a po rozepsání

$$\kappa(\mathbf{a}) = \sum_{i,k,j=1}^{n} \alpha_i^k g_{kj} \alpha^i \alpha^{j*} \tag{9.2}$$

s použitím obvyklého označení pro prvky matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{G}$ a složky vektoru $\mathbf{a}$. Matici $\mathbf{K} = \mathbf{AG}$ nazýváme *maticí kvadratické formy v dané bázi.* Zjednodušení zápisu dosáhneme volbou ortonormální báze, v níž $\mathbf{G} = \mathbf{E}$ a $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}*}$. Pak

$$\kappa(\mathbf{a}) = (\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^{\mathbf{T}*} = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i^j \alpha^i \alpha^{j*} \tag{9.3}$$

nebo

$$\kappa(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^i |\alpha^i|^2 + \sum_{i,j=1, i<j}^{n} 2\Re(\alpha_i^j \alpha^i \alpha^{j*}) \tag{9.4}$$

s využitím samoadjungovanosti matice $\mathbf{A}$. Z 9.4 vyplývá, že kvadratická forma jakožto funkce proměnných $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ nabývá výhradně reálných hodnot.

Nechť $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ jsou dvě různé báze, $\mathbf{T}$ nechť je matice přechodu od první z nich ke druhé. Podle vztahu 9.1 dostaneme:

$$\kappa(\mathbf{a}) = (\alpha)\mathbf{AG}(\alpha)^{\mathbf{T}*} = (\alpha')\mathbf{TAG}((\alpha')\mathbf{T})^{\mathbf{T}*} = (\alpha')\mathbf{TAGT}^{\mathbf{T}*}(\alpha')^{\mathbf{T}*}.$$

V bázi $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ má tedy kvadratická forma κ matici

$$\mathbf{K}' = \mathbf{TAGT}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{TKT}^{\mathbf{T}*}. \tag{9.5}$$

Ve speciálním případě, kdy obě báze jsou ortonormální, je matice přechodu unitární, tj. $\mathbf{T}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{T}^{-1}$ a vztah 9.5 lze psát ve tvaru

$$\mathbf{K}' = \mathbf{A}' = \mathbf{TAT}^{\mathbf{T}*} = \mathbf{TAT}^{-1},$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{TAT}^{-1}. \tag{9.6}$$

Z důkazu věty (4.20) vyplývá, že pro každou samoadjungovanou matici $\mathbf{A}$ lze podobnostní transformaci s unitární maticí volit tak, aby $\mathbf{A}' = \mathbf{TAT}^{-1}$ byla maticí diagonální. Diagonální prvky matice $\mathbf{A}'$ jsou vlastními hodnotami transformace φ a báze $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ je tvořena vlastními vektory transformace φ (věty (4.13), (4.20)). Získaný závěr můžeme shrnout v následujícím teorému:

Věta 9.1. *Nechť κ je kvadratická forma na $\mathbb{U}_n$. Existuje ortonormální báze $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v $\mathbb{U}_n$ taková, že v ní má forma κ tvar*

$$\kappa(\mathbf{a}) = \lambda_1|\alpha^1|^2 + \lambda_n|\alpha^2|^2 + \ldots + \lambda_n|\alpha^n|^2. \tag{9.7}$$

Zápis 9.7 představuje tzv. *kanonický tvar kvadratické formy.*

Poznámka: Kvadratické formy se obvykle zadávají v ortonormální bázi buď zadáním příslušné samoadjungované matice $\mathbf{A}$, nebo (což je častější případ) přímo zápisem 9.3, z nehož lze matici $\mathbf{A}$ určit. Tuto úmluvu budeme v dalších kapitolách rovněž dodržovat.

V případě kvadratických forem na euklidovském prostoru $\mathbb{E}_n$ (resp. $\mathbb{R}_n$), který vede k významným geometrickým aplikacím v $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$, mívá zadání formy κ obvykle tvar

$$\kappa(\mathbf{a}) = \sum_{i,j=1, i<j}^{n} \gamma_{ij} x^i x^j. \tag{9.8}$$

Pak pro matici $\mathbf{A}$ (symetrickou) platí $\alpha^i_i = \gamma_{ii}$ pro $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha^i_j = \alpha^j_i = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ pro $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i < j$. Namísto označení $\mathbf{a} = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ zde figurují kartézské složky vektoru $\mathbf{a}$, jež jsou obvykle označovány $(x^1, \ldots, x^n)$, příp. $(y^1, \ldots, y^n)$, v $\mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^2$ pak (x, y, x) resp. (x, y).

Příklad 1: Kvadratická forma v $\mathbb{R}^3$ zadaná vztahem $\kappa(a) = \kappa(x, y, z) = x^2 - 5xy + 6xz - 7z^2 + 8yz$ (v ortonormální, tj. standardní bázi v $\mathbb{R}^3$) má matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & 3 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2: Kvadratická forma $\kappa(a) = \kappa(x^1, x^2, x^3, x^4)$ v $\mathbb{R}^4$ je zadána takto:

$$\kappa(x^1, x^2, x^3, x^4) = 2x^1x^2 + 2x^1x^3 - 2x^1x^4 - 2x^2x^3 + 2x^2x^4 + 2x^3x^4.$$

Její matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

reprezentuje v dané ortonormální bázi symetrickou lineární transformaci φ, jejíž vlastní hodnoty, určené rovnicí $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -3$. Ortonormální bází tvořenou vlastními vektory této transformace je například systém vektorů $\mathbf{e}'_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$, $\mathbf{e}'_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$, $\mathbf{e}'_3 = (-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\mathbf{e}'_4 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Složky vektorů $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_4$ jsou zadány v původní ortonormální bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$. Kanonický tvar kvadratické formy je:

$$\kappa(a) = \kappa(y^1, y^2, y^3, y^4) = (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 - 3(y^4)^2,$$

kde

$$(y^1, y^2, y^3, y^4) = (x^1, x^2, x^3, x^4) \cdot \mathbf{T}^{-1} = (x^1, x^2, x^3, x^4) \cdot \mathbf{T}^{\mathbf{T}},$$

tj.

$$\begin{aligned} y^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}x^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \\ y^2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}x^1 - \frac{1}{\sqrt{6}}x^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}x^3, \\ y^3 &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}x^1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^4, \\ y^4 &= \frac{1}{2}x^1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4. \end{aligned}$$

Na základě hodnot $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, určujících kanonický tvar 9.7 kvadratické formy, definujeme její další charakteristiky. Z věty (4.21) vyplývá, že hodnoty $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou reálné. *Hodností kvadratické formy* κ nazveme číslo $\mathrm{h} = \mathrm{h}(\mathbf{A})$, udávající hodnost její matice (v libovolné bázi). Označme k počet kladných a z počet záporných charakteristických kořenů z množiny $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ (včetně násobnosti). Rozdíl $s = k - z$ nazýváme *signaturou kvadratické formy* κ. Je-li $s = n = \dim \mathbb{U}_n$, nazýváme kvadratickou formu *pozitivně definitní.* (Platí pro ni zřejmě $k = h = n$, $z = 0$.) Forma se nazývá *negativně definitní* pro $s = -n$ $(k = 0,\ z = n = h)$, *pozitivně semidefinitní* pro $s = h < n$ $(k = h < n,\ z = 0)$, *negativně semidefinitní* pro $s - h > -n$ $(k = 0,\ z = h < n)$ a *indefinitní* pro $|s| < h$. Klasifikace kvadratických forem podle předchozí definice souvisí bezprostředně s vlastnostmi množiny hodnot, jichž mohou kvadratické formy nabývat.

Věta 9.2. *Kvadratická forma κ na $\mathbb{U}_n$ je pozitivně resp. negativně definitní právě tehdy, když pro každý vektor $a = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \in \mathbb{U}_n$ je $\kappa(\mathbf{a}) \geq 0$ resp. $\kappa(\mathbf{a}) \leq 0$, přičemž rovnost $\kappa(\mathbf{a}) = 0$ nastává právě tehdy, je-li $\mathbf{a} = \mathbf{o}$. Forma κ je pozitivně resp. negativně semidefinitní právě tehdy, když pro libovoný vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{U}_n$ platí $\kappa(\mathbf{a}) \geq 0$ resp. $\kappa(\mathbf{a}) \leq 0$, přičemž rovnost $\kappa(\mathbf{a}) = 0$ nastane i v jiných případech než pro $\mathbf{a} = \mathbf{o}$. Forma κ je indefinitní právě tehdy, když nabývá hodnot kladných, záporných i nulových.*

Důkaz: Důkaz plyne bezprostředně z kanonického tvaru 9.7 kvadratické formy.

◊

Cvičení 9.1

(1) Proveďte důkaz věty 9.2 zvlášť pro každý z pěti typů kvadratických forem. Prošetřete zvlášť případy, kdy $\kappa(\mathbf{a}) = 0$. Dokažte, že pro semidefinitní formu κ je $\kappa(\mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \in N(\varphi)$, kde φ je samoadjungovaná transformace příslušná formě κ.

Návod: Vyjděte z kanonického tvaru kvadratické formy 9.7: $\kappa(\mathbf{a}) = \lambda_1|\alpha^1|^2 + \ldots + \lambda_n|\alpha^n|^2$ a uvědomte si, že $|\alpha^i|^2 \geq 0$, přičemž rovnost nastane právě pro $\alpha^i = 0$. Pro semidefinitní formy o hodnosti $h < n$ určete tvar všech n-tic $(\alpha^1, \ldots \alpha^n)$, pro něž je $\kappa(\mathbf{a}) = 0$. Ukažte, že pro každou takovou n-tici je $(\alpha)\mathbf{D} = 0$, kde $\mathbf{D} = (\lambda_i \delta_i^j)$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ je matice kvadratické formy v diagonálním tvaru. Je tedy $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{o}$, tj. $\mathbf{a} \in N(\varphi)$. Za předpokladu $\mathbf{a} \in N(\varphi)$ vyplývá rovnost $\kappa(\mathbf{a}) = 0$ automaticky z definice kvadratické formy jakožto skalárního součinu $(\varphi(\mathbf{a}), \mathbf{a})$.

(2) Pro samoadjungované transformace zadané v úloze (10) cvičení (4.15) zapište odpovídající souřadnicové vyjádření kvadratických forem a určete kanonický tvar, hodnost a signaturu těchto forem. Proveďte jejich klasifikaci z hlediska vztahu signatury a hodnosti.

Výsledek:

a)

$$\begin{aligned}\kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{1*} + \mathbf{i}\alpha^{1*}\alpha^2 - \mathbf{i}\alpha^1\alpha^{2*} - \alpha^2\alpha^{2*}\\ \mathrm{KT}: \ \kappa(\mathbf{a}) &= 2\alpha'^2\alpha'^{2*};\ n = 2, h = 1, s = 1\end{aligned}$$

Forma je pozitivně semidefinitní.

b)

$$\begin{aligned}\kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{1*} - \mathbf{i}\alpha^1\alpha^{3*} + \alpha^2\alpha^{2*} + \mathbf{i}\alpha^3\alpha^{1*} + \alpha^3\alpha^{3*}\\ \mathrm{KT}: \ \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha'^2\alpha'^{2*} + 2\alpha'^3\alpha'^{3*};\ n = 3, h = 2, s = 2\end{aligned}$$

Forma je pozitivně semidefinitní.

c)

$$\begin{aligned}\kappa(\mathbf{a}) &= 9\alpha^1\alpha^{1*} - 2\alpha^1\alpha^{2*} - 2\alpha^{1*}\alpha^2 + 6\alpha^2\alpha^{2*}\\ \mathrm{KT}: \ \kappa(\mathbf{a}) &= 5\alpha'^1\alpha'^{1*} + 10\alpha'^2\alpha'^{2*};\ n = 2, h = 2, s = 2\end{aligned}$$

Forma je pozitivně definitní.

d)

$$\begin{aligned}\kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{1*} + \alpha^1\alpha^{2*} + 3\alpha^1\alpha^{3*} + \alpha^{1*}\alpha^2 + 5\alpha^2\alpha^{2*} +\\ &\quad +\alpha^2\alpha^{3*} + 3\alpha^3\alpha^{1*} + \alpha^2\alpha^{3*} + \alpha^3\alpha^{3*}\\ \mathrm{KT}: \ \kappa(\mathbf{a}) &= -2\alpha'^1\alpha'^{1*} + 3\alpha'^2\alpha'^{2*} + 6\alpha'^3\alpha'^{3*};\ n = 3, h = 3, s = 1\end{aligned}$$

Forma je indefinitní.

e)

$$\begin{aligned}\kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{2*} + \alpha^{1*}\alpha^2 + i\alpha^3\alpha^{4*} - i\alpha^{3*}\alpha^4\\ \mathrm{KT}: \ \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha'^1\alpha'^{1*} + \alpha'^2\alpha'^{2*} + -\alpha'^3\alpha'^{3*} - \alpha'^4\alpha'^{4*};\ n = 4, h = 4, s = 0\end{aligned}$$

Forma je indefinitní.

f)

$$\begin{aligned}\kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{2*} + \alpha^1\alpha^{3*} - \alpha^1\alpha^{4*} + \alpha^2\alpha^{1*} - \alpha^2\alpha^{3*} + \alpha^2\alpha^{4*} +\\ &\quad +\alpha^3\alpha^{1*} - \alpha^3\alpha^{2*} + \alpha^3\alpha^{4*} - \alpha^4\alpha^{1*} + \alpha^4\alpha^{2*} + \alpha^4\alpha^{3*}\\ \mathrm{KT}: \ \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha'^1\alpha'^{1*} + \alpha'^2\alpha'^{2*} + +\alpha'^3\alpha'^{3*} - 3\alpha'^4\alpha'^{4*};\ n = 4, h = 4, s = 2\end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
g)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{1*} - \alpha^1\alpha^{2*} - \alpha^2\alpha^{1*} + \alpha^2\alpha^{2*} - \\ &\quad -\alpha^3\alpha^{3*} + \alpha^3\alpha^{4*} + \alpha^4\alpha^{3*} - \alpha^4\alpha^{4*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= -2\alpha'^3\alpha'^{3*} + 2\alpha'^4\alpha'^{4*};\ n = 4, h = 2, s = 0 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
h)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= 4\alpha^1\alpha^{3*} + \alpha^1\alpha^{4*} + \alpha^2\alpha^{3*} + 4\alpha^2\alpha^{4*} + \\ &\quad +4\alpha^3\alpha^{1*} + \alpha^3\alpha^{2*} + 2\alpha^4\alpha^{1*} + 4\alpha^4\alpha^{2*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= 5\alpha'^1\alpha'^{1*} - 5\alpha'^2\alpha'^{2*} + 3\alpha'^3\alpha'^{3*} - 3\alpha'^4\alpha'^{4*};\ n = 4, h = 4, s = 0 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
i)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{2*} + \alpha^2\alpha^{1*} + \alpha^3\alpha^{4*} + \alpha^4\alpha^{3*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha'^1\alpha'^{1*} + \alpha'^2\alpha'^{2*} - \alpha'^3\alpha'^{3*} - \alpha'^4\alpha'^{4*};\ n = 4, h = 4, s = 0 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
j)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{1*} + \alpha^1\alpha^{2*} - \alpha^1\alpha^{4*} + \alpha^2\alpha^{1*} + \alpha^2\alpha^{2*} - \alpha^2\alpha^{3*} - \\ &\quad -\alpha^3\alpha^{2*} + \alpha^3\alpha^{3*} + \alpha^3\alpha^{4*} - \alpha^4\alpha^{1*} + \alpha^4\alpha^{3*} + \alpha^4\alpha^{4*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha'^1\alpha'^{1*} + \alpha'^2\alpha'^{2*} - \alpha'^3\alpha'^{3*} + 3\alpha'^4\alpha'^{4*};\ n = 4, h = 4, s = 2 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
k)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= 2\alpha^1\alpha^{1*} - 2\alpha^1\alpha^{2*} - 2\alpha^2\alpha^{1*} + \alpha^2\alpha^{2*} - 2\alpha^2\alpha^{3*} - 2\alpha^3\alpha^{2*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha'^1\alpha'^{1*} - 2\alpha'^2\alpha'^{2*} + 4\alpha'^3\alpha'^{3*};\ n = 3, h = 3, s = 1 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
l)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{1*} - 2\alpha^1\alpha^{2*} - 2\alpha^2\alpha^{1*} + 2\alpha^2\alpha^{2*} - \\ &\quad -2\alpha^2\alpha^{3*} - 2\alpha^3\alpha^{2*} + 3\alpha^3\alpha^{3*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= -\alpha'^1\alpha'^{1*} + 2\alpha'^2\alpha'^{2*} + 5\alpha'^3\alpha'^{3*};\ n = 3, h = 3, s = 1 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.
m)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= 2\alpha^1\alpha^{1*} - 2\alpha^1\alpha^{2*} + \alpha^1\alpha^{4*} - 2\alpha^2\alpha^{1*} + 2\alpha^2\alpha^{2*} + \alpha^2\alpha^{3*} + \\ &\quad +\alpha^3\alpha^{2*} + 2\alpha^3\alpha^{3*} - 2\alpha^3\alpha^{4*} + \alpha^4\alpha^{1*} - 2\alpha^4\alpha^{3*} + 2\alpha^4\alpha^{4*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha'^1\alpha'^{1*} - \alpha'^2\alpha'^{2*} + 5\alpha'^3\alpha'^{3*} + 3\alpha'^4\alpha'^{4*};\ n = 4, h = 4, s = 2 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.

n)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= 3\alpha^1\alpha^{1*} + 2\alpha^1\alpha^{2*} + 2\alpha^2\alpha^{1*} + 4\alpha^2\alpha^{2*} - \\ &\quad -2\alpha^2\alpha^{3*} - 2\alpha^3\alpha^{2*} + 5\alpha^3\alpha^{3*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha'^1\alpha'^{1*} + 4\alpha'^2\alpha'^{2*} + 7\alpha'^3\alpha'^{3*};\ n=3, h=3, s=3 \end{aligned}$$

Forma je pozitivně definitní.

o)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= 5\alpha^1\alpha^{1*} - 2\alpha^1\alpha^{2*} - 2\alpha^1\alpha^{3*} - 2\alpha^2\alpha^{1*} + \\ &\quad +6\alpha^2\alpha^{2*} - 2\alpha^3\alpha^{1*} + 4\alpha^3\alpha^{3*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= 2\alpha'^1\alpha'^{1*} + 5\alpha'^2\alpha'^{2*} + 8\alpha'^3\alpha'^{3*};\ n=3, h=3, s=3 \end{aligned}$$

Forma je pozitivně definitní.

p)

$$\begin{aligned} \kappa(\mathbf{a}) &= \alpha^1\alpha^{1*} - 2\alpha^1\alpha^{2*} + 2\alpha^1\alpha^{3*} - 2\alpha^2\alpha^{1*} - 2\alpha^2\alpha^{2*} + \\ &\quad +4\alpha^2\alpha^{3*} + 2\alpha^3\alpha^{1*} + 4\alpha^3\alpha^{2*} - 2\alpha^3\alpha^{3*} \\ \mathrm{KT}:\ \kappa(\mathbf{a}) &= 2\alpha'^1\alpha'^{1*} + 2\alpha'^2\alpha'^{2*} - 7\alpha'^3\alpha'^{3*};\ n=3, h=3, s=1 \end{aligned}$$

Forma je indefinitní.

(3) Nechť κ, λ jsou kvadratické formy na $\mathbb{U}_n$ a nechť forma λ je pozitivně definitní. Ukažte, že existuje báze $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ v $\mathbb{U}_n$ taková, že v ní obě zadané formy mají kanonický tvar. (Báze $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ nemusí být nutně ortonormální.)

Návod: Je-li λ pozitivně definitní kvadratická forma, pak existuje taková ortonormální báze $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, že v ní platí $\lambda(\mathbf{a}) = \lambda_1|\alpha_1|^2 + \ldots + \lambda_n|\alpha_n|^2$, kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$. V této bázi má kvadratická forma κ tvar $\kappa(\mathbf{a}) = (\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^{\mathbf{T}*}$, kde $\mathbf{A}$ je samoadjungovaná matice. Zvolte nyní bázi $(\mathbf{e}''_1, \ldots, \mathbf{e}''_n)$ tak, aby v ní forma λ byla dána zápisem $\lambda(\mathbf{a}) = |\alpha''_1|^2 + \ldots + |\alpha''_n|^2$. Jaká je odpovídající matice přechodu $\mathbf{T}$? Ukažte, že v bázi $(\mathbf{e}''_1, \ldots, \mathbf{e}''_n)$ je matice $\mathbf{A}'' = \mathbf{TAT}^{\mathbf{T}*}$ formy κ rovněž samoadjungovaná. Existuje tedy unitární matice $\mathbf{Q}$ taková, že $\mathbf{QA}''\mathbf{Q}^{\mathbf{T}*}$ je diagonální matice, takže v bázi $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$, pro niž $\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^n q_i^j \mathbf{e}''_j$ má forma κ kanonický tvar. Určete matici formy λ v bázi $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ a zjistíte, že λ je v uvedené bázi rovněž v kanonickém tvaru.

9.2 Klasifikace kvadrik a kuželoseček

Výsledky získané v odstavci 9.1 pro kvadratické formy na $\mathbb{U}_n$ nyní aplikujeme na případ euklidových prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ a využijeme jich při klasifikaci ploch a křivek druhého supně (tzv. kvadrik a kuželoseček). Budeme pracovat výhradně v ortonormálních bázích v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ (v tzv. kartézských soustavách souřadnic $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ zadaných počátkem P a ortonormální bází $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$). Skalární součin v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ je zaveden v souhlasu s euklidovskou geometrií, tj. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \sphericalangle (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ pro libovolné vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

Množina $\mathcal{K}$ všech bodů X v $\mathbb{R}^3$ resp. ($\mathbb{R}^2$), jejichž kartézské (též standardní) souřadnice x, y, z resp. (x, y) vyhovují rovnici

$$k(X) = k(x,y,z) = \alpha_1^1 x^2 + 2\alpha_1^2 xy + 2\alpha_1^3 xz + \alpha_2^2 y^2 + 2\alpha_2^3 yz +$$

$$+\alpha_3^3 z^2 + \beta_2 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \gamma = 0 \tag{9.9}$$

$$\text{resp.} \quad k(X) = k(x,y) = \alpha_1^1 x^2 + 2\alpha_1^2 xy \alpha_2^2 y^2 + \beta_1 x + \beta_2 y + \gamma = 0$$

V níž alespoň jedno z čísel $\alpha_i^j \neq 0$, se nazývá *kvadrika* resp. *kuželosečka.*

Poznámka: Rovnice 9.9 mohou zahrnovat i tzv. degenerované případy, například v $\mathbb{R}^2$: $x^2 = 0$ (rovnice osy y), $x^2+y^2 = 0$ (této rovnici vyhovuje jen pořátek soustavy souřadnic, $x^2 + y^2 + 1 = 0$ (této rovnici nevyhovuje žádný bod v $\mathbb{R}^2$).

Chápejme nyní souřadnice $(\alpha) = (x, y, z)$ resp. (x, y) jako složky vektoru $\mathbf{a} = X - P$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^2$ (přičemž prostor $\mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^2$ je pevně umístěn v počátku soustavy souřadnic P). Další úvahy povedeme pro kvadriku. Rovnici kvadriky 9.9 přepíšeme takto:

$$k(x,y,z) = k(\mathbf{a}) = (\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^{\mathbf{T}} + (\alpha)\mathbf{B} + \gamma = \kappa(\mathbf{a}) + \eta(\mathbf{a}) + \gamma = 0 \tag{9.10}$$

V tomto vztahu je κ kvadratická forma na $\mathbb{R}^3$, reprezentovaná v dané standardní bázi symetrickou maticí $\mathbf{A} = (\alpha_i^j)$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, η je lineární forma na $\mathbb{R}^3$, reprezentovaná maticí $\mathbf{B} = (\beta_j)$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Poznámka: Lineární formou na vektorovém prostoru V_n rozumíme zobrazení $\eta : \mathrm{V}_n \ni \mathbf{a} \to \eta(\mathbf{a}) \in \mathbb{C}$ resp. ($\mathbb{R}$) s vlastnostmi $\eta(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \eta(\mathbf{a})+\eta(\mathbf{b})$, $\eta(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\eta(\mathbf{a})$ pro libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathrm{V}_n$ a libovolné číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ resp. $\mathbb{R}$. V našem případě je $\mathrm{V}_n = \mathbb{R}^3$. Ve zvolené bázi $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ ve V_n je $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \alpha^i \mathbf{e}_i$ a $\eta(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \eta(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \eta_i = (\alpha)(\eta)$, kde (η) je sloupcová matice reprezentující lineární formu v dané bázi. Podrobněji viz odstavec (5.1)

Abychom získali názornou geometrickou představu o tom, jak vypadá plocha v $\mathbb{R}^3$ (resp. křivka v $\mathbb{R}^2$) reprezentovaná rovnicí 9.10, potřebujeme najít takovou ortonormální bázi v $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$), v níž má levá strana rovnice 9.10 co nejjednodušší tvar. Výrazné zjednodušení nabízí věta 9.7, podle níž existuje v $\mathbb{R}^3$ taková ortonormální báze $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, že v ní má kvadratická forma κ kanonický tvar. V kartézské soustavě souřadnic $(P; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, spojené s bodem P, má tedy rovnice kvadriky tzv. *seminormální tvar*

$$\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + \lambda_3 {z'}^2 + \beta'_1 x' + \beta'_2 y' + \beta'_3 z' + \gamma = 0 \tag{9.11}$$

Skutečně, je-li $\mathbf{T}$ matice přechodu od původní báze $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ k bázi $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, pak

$$k(\mathbf{a}) = (\alpha')\mathbf{TAT}^{\mathbf{T}}(\alpha')^{\mathbf{T}} + (\alpha')\mathbf{TB} + \gamma,$$

$$\text{kde } \mathbf{TAT}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{B}' = \mathbf{TB} = \begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \\ \beta'_2 \end{pmatrix}.$$

Další zjednodušení rovnice 9.11 se může týkat již jen lineární formy s absolutním členem. Připadají tedy v úvahu pouze takové transformace soustavy souřadnic, které ponechávají kvadratickou formu κ v kanonické tvaru, tj. mění pouze počátek soustavy souřadnic při zachování vektorů báze. Těmito transformacemi jsou *translace (posunutí)*. Přechod od soustavy souřadnic $(P; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ k $(P'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ je algebraicky popsán rovnicemi

$$a = t + b,$$

kde $a = X - P = (\alpha') = (X', Y', Z')$, $b = X - P' = (\alpha'') = (X'', Y'', Z'')$, $t = P' - P = (x_0, y_0, z_0) = (\alpha_0)$.

Všimněme si nyní obecně transformačních vlastností kvadratické a lineární formy při translaci. Využijeme toho, že definice kvadratické formy svazuje tuto formu s určitou symetrickou lineární transformací v $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\kappa(a) &= (\varphi(a), a) = (\varphi(t+b), t+b) = (\varphi(b), b) + (\varphi(t), t) + 2(\varphi(b), t) \\
\eta(a) &= \eta(t+b) = \eta(t) + \eta(b) \\
\kappa(a) &= (\alpha')\mathbf{A}'(\alpha')^{\mathbf{T}} = (\alpha'')\mathbf{A}'(\alpha'')^{\mathbf{T}} + (\alpha_0)\mathbf{A}'(\alpha_0)^{\mathbf{T}} + 2(\alpha'')\mathbf{A}'(\alpha_0)^{\mathbf{T}} = \\
&= (\alpha'')\mathbf{A}'(\alpha'')^{\mathbf{T}} + (\alpha'')2\mathbf{A}'(\alpha_0)^{\mathbf{T}} + (\alpha_0)\mathbf{A}'(\alpha_0)^{\mathbf{T}} \\
\eta(a) &= (\alpha')\mathbf{B}' = (\alpha'')\mathbf{B}' + (\alpha_0)\mathbf{B}'
\end{aligned}$$

Jestliže je trojice souřadnic $(\alpha'') = (X'', Y'', Z'')$ považována za proměnné a trojice (α_0), zadávající translační vektor t, za konstanty, pak vidíme, že při translaci přejde kvadratická forma v součet kvadratické formy, lineární formy a čísla, zatímco lineární forma v součet lineární formy a čísla.

Levá strana rovnice kvadriky bude mít tedy v souřadnicové soustavě $(P'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ tvar

$$\begin{aligned}
k(X) &= (\alpha'')\mathbf{A}'(\alpha'')^{\mathbf{T}} + (\alpha'')[\mathbf{B}' + 2\mathbf{A}'(\alpha_0)^{\mathbf{T}}] + [4(\alpha_0)\mathbf{B}' + (\alpha_0)\mathbf{A}'(\alpha_0)^{\mathbf{T}}] = \\
&= \kappa(b) + \eta'(b) + \gamma' \qquad (9.12)
\end{aligned}$$

Tento vztah platí obecně. Je-li však výchozím tvarem tvar seminormální, pak kvadratická forma κ je reprezentována maticí

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}' = \mathbf{TAT}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = (\lambda_i \delta_{ij}), \quad i, j = \{1, 2, 3\}.$$

Pro lineární formu η' je $\eta'(b) = \eta(b) + 2(\varphi(b), t)$ a forma η' je reprezentována maticí

$$\mathbf{B}'' = \mathbf{B}' + 2\mathbf{A}'(\alpha_0)^{\mathbf{T}} = \mathbf{TB} + 2\mathbf{TAT}^{\mathbf{T}}(\alpha_0)^{\mathbf{T}} = \mathbf{TB} + 2\begin{pmatrix} \lambda_1 x_0 \\ \lambda_2 y_0 \\ \lambda_3 z_0 \end{pmatrix}.$$

Číslo $\gamma' = \sqrt{\gamma + (\alpha_0)\mathbf{B}' + (\alpha_0)\mathbf{A}'(\alpha_0)^{\mathbf{T}}} = \gamma + (\alpha_0)\mathbf{TB} + \lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 + \lambda_3 z_0^2$.

Podle 9.11 je $\gamma' = k(t)$. Rovnici kvadriky po translaci tedy zapíšeme jako

$$\begin{aligned}
k(X) &= (\alpha'')\mathbf{D}(\alpha'')^{\mathbf{T}} + (\alpha'')[\mathbf{TB} + 2\mathbf{D}(\alpha_0)^{\mathbf{T}}] + \\
&\quad + [\gamma + (\alpha_0\mathbf{TB} + (\alpha_0)\mathbf{D}(\alpha_0)^{\mathbf{T}}] = 0 \\
k(X) &= \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + (\beta'_1 + 2\lambda_1 x_0)x'' + \\
&\quad + (\beta'_2 + 2\lambda_2 y_0)y'' + (\beta'_3 + 2\lambda_3 z_0)z'' + k(P') = 0 \qquad (9.13)
\end{aligned}$$

Rozborem tohoto vztahu nyní zjistíme, jak je nutno translaci $t = (x_0, y_0, z_0)$ volit, aby vedla k dalšímu zjednodušení rovnice kvadriky. Výsledky souvisí s hodností formy κ.

(i) Nechť $h = 3$, tj. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$. Pak matice $\mathbf{D}$ je regulární a v rovnici 9.13 lze volbou

$$(\alpha_0)^{\mathbf{T}} = -\frac{1}{2}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{TB} = -\frac{1}{2}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}' \tag{9.14}$$

dosáhnout anulování lineární formy ve vztahu 9.13 a rovnice kvadriky má pak v soustavě souřadnic $(P'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ tvar

$$\begin{aligned} k(X) &= (\alpha'')\mathbf{D}(\alpha'')^{\mathbf{T}} + k(P') = 0 \\ \text{tj. } k(X) &= \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + \mu = 0, \end{aligned} \tag{9.15}$$

kde $\mu = \gamma - \lambda_1 {x_0}^2 - \lambda_2 {y_0}^2 - \lambda_3 {z_0}^2$. Explicitní vyjádření souřadnic x_0, y_0, z_0 bodu P' v soustavě $(P; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$:

$$x_0 = -\frac{1}{2\lambda_1}\sum_{j=1}^{3}\tau_1^j\beta_j = -\frac{\beta_1}{2\lambda_1}, \quad y_0 = -\frac{1}{2\lambda_2}\sum_{j=1}^{3}\tau_2^j\beta_j = -\frac{\beta_2}{2\lambda_2},$$

$$z_0 = -\frac{1}{2\lambda_3}\sum_{j=1}^{3}\tau_3^j\beta_j = -\frac{\beta_3}{2\lambda_3}. \tag{9.16}$$

(ii) Nechť $h = 2$. Očíslujeme hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tak, aby $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. Předpokládejme, že $\beta_3' = \sum_{j=1}^{3}\tau_3^j\beta_j \neq 0$. Volbou x_0, y_0 podle vztahu 9.16 dosáhneme vymizení lineárních členů obsahujících x-ovou a y-ovou souřadnici bodu kvadriky, volbou $z_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{3}\tau_3^j\beta_j}(\gamma + \lambda_1 {x_0}^2 + \lambda_2 {z_0}^2) = \frac{1}{\beta_3'}(\gamma + \lambda_1 {x_0}^2 + \lambda_2 {y_0}^2)$ dosáhneme vymizení absolutního člemu. pak v $(P'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ platí

$$k(X) = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \beta_3' z'' = 0. \tag{9.17}$$

(iii) Nechť $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, $\beta_3' = \sum_{j=1}^{3}\tau_3^j\beta_j = 0$. Položíme opět souřadnice x_0, y_0 rovny výrazům ve vztahu 9.16, z_0 je libovolné. Pak

$$k(X) = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \zeta = 0, \tag{9.18}$$

kde jsme označili $\zeta = \gamma - \lambda_1 {x_0}^2 - \lambda_2 {y_0}^2$.

(iv) Nechť $h = 1$, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\beta_3' \sum_{j=1}^{3}\tau_3^j\beta_j \neq 0$ nebo $\beta_2' = \sum_{j=1}^{3}\tau_2^j\beta_j \neq 0$. Volíme x_0 opět podle vztahu 9.16. Rovnice kvadriky přejde na tvar

$$k(X) = \lambda_1 x''^2 + \beta_2' y'' + \beta_3' z'' + (\gamma - \lambda_1 {x_0}^2 - \beta_2' y_0 - \beta_3' z_0) = 0.$$

Je-li alespoň jedno z čísel β_2', β_3' různé od nuly, lze volit y_0 nebo z_0 tak, aby absolutní člen v rovnici kvadriky byl nulový, tj. buď $y_0 = \frac{1}{\beta_2'}(\gamma - \lambda_1 {x_0}^2 - \beta_3' z_0)$, z_0 libovolné, nebo $z_0 = \frac{1}{\beta_3'}(\gamma - \lambda_1 {x_0}^2 - \beta_2' y_0)$, y_0 libovolné. Po této úpravě přejde rovnice kvadriky na tvar

$$k(X) = \lambda_1 x''^2 + \beta_2' y'' + \beta_3' z'' = 0.$$

Dále je možné najít kartézskou soustavu souřadnic $(P'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3)$ tak, aby z rovnice kvadriky vymizel buď člen s y-ovou nebo člen se z-ovou souřadnicí.

Matice $\mathbf{T}'$, která zajišťuje přechod $(P'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) \to (P'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3)$, má tvar

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a kvadrika má v soustavě souřadnic $(P'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3)$ rovnici

$$k(X) = \lambda_2 x'''^2 + y'''(\beta'_2 \cos\alpha + \beta'_3 \sin\alpha) + z'''(-\beta'_2 \sin\alpha + \beta'_3 \cos\alpha) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že alespoň jedno z čísel β'_2, β'_3 je nenulové, lze úhel α zvolit tak, aby jeden z koeficientů u y''', z''' byl roven nule. Je-li například $-\beta'_2 \sin\alpha + \beta'_3 \cos\alpha = 0$, pak

$$k(X) = \lambda_2 x'''^2 + \xi y''' = 0, \tag{9.19}$$

kde $\xi = \beta'_2 \cos\alpha + \beta'_3 \sin\alpha = \sqrt{{\beta'_2}^2 + {\beta'_3}^2}$.

(v) Nechť $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\beta'_2 = \beta'_3 = 0$. Při volbě x_0 podle vztahu 9.16 docílíme následujícího tvaru rovnice kvadriky

$$k(X) = \lambda_1 x''^2 + \nu = 0, \tag{9.20}$$

kde $\nu = \gamma - \lambda_1 {x_0}^2$.

Diskuse vztahu 9.13 pro případ kuželoseček je obdobná. Klasifikaci kvadrik a kuželoseček lze tedy v prvé fázi provádět na základě následujícího tvrzení, které bezprostředně vyplývá z výše uvedeného rozboru.

Věta 9.3. *Nechť $\mathcal{K}$ je kvadrika v $\mathbb{R}^3$. Existuje taková kartézská soustava souřadnic v $\mathbb{R}^3$, že v ní má rovnice kvadriky $\mathcal{K}$ právě jeden z následujících tvarů:*

(i) $k(X) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda^3 z^2 + \mu = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu \in \mathbb{R},$

(ii) $k(X) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \beta z = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \beta \neq 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \beta \in \mathbb{R},$

(iii) $k(X) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \zeta = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \zeta \in \mathbb{R},$

(iv) $k(X) = \lambda_1 x^2 + \xi y = 0, \quad \lambda_1, \xi \neq 0,\ \lambda_1, \xi \in \mathbb{R},$

(v) $k(X) = \lambda_1 x^2 + \nu = 0, \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_1, \nu \in \mathbb{R}.$

Nechť $\mathcal{K}$ je kuželosečka v $\mathbb{R}^2$. Existuje taková kartézská soustava souřadnic v $\mathbb{R}^2$, že v ní má rovnice kuželosečky $\mathcal{K}$ právě jeden z následujících tvarů:

(i) $k(X) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \mu = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_1, \lambda_2, \mu \in \mathbb{R},$

(ii) $k(X) = \lambda_1 x^2 + \beta y = 0 \quad \lambda_1, \beta \neq 0,\ \lambda_1, \beta \in \mathbb{R},$

(iii) $k(X) = \lambda_1 x^2 + \nu = 0 \quad \lambda_1 \neq 0,\ \lambda_1, \nu \in \mathbb{R}.$

Tvary kuželoseček resp. kvadrik uvedené ve větě 9.3 nazýváme *normálními tvary rovnic kuželoseček* resp. *kvadrik.*

Příklad 3: Pro kuželosečku $\mathcal{K}$ v $\mathbb{R}^2$, zadanou rovnicí $k(X) = 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$ v kartézské soustavě souřadnic $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, určíme soustavu souřadnic $(P'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')$, v níž má rovnice kuželosečky normální tvar.

V souhlasu s označením v textu je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \gamma = 2.$$

Vlastní hodnoty symetrické transformace φ reprezentované v dané bázi maticí $\mathbf{A}$ jsou $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$, ortonormální báze tvořená vlastními vektory této transformace je $(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')$, kde $\mathbf{e}_1' = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $\mathbf{e}_2' = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. Matice $\mathbf{T}$ přechodu od báze $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ k bázi $(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')$ je

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Pak $\mathbf{B}' = \mathbf{TB} = \begin{pmatrix} -\frac{20}{\sqrt{5}} \\ -\frac{10}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \mathbf{TAT}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. V soustavě souřadnic $(P; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')$ má kuželosečka seminormální tvar

$$10x'^2 + 5y'^2 - \frac{20}{\sqrt{5}}x' - \frac{10}{\sqrt{5}}y' + 2 = 0.$$

Poněvadž je $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, lze volit translaci tak, aby nový počátek soustavy souřadni P' měl souřadnice $(\alpha_0) = (x_0, y_0)$ určené vztahem

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{TB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Pak $\mu = \gamma - \lambda_1 {x_0}^2 - \lambda_2 {y_0}^2 = -1$, takže normální tvar kuželosečky je typu (i):

$$10x''^2 + 5y''^2 - 1 = 0$$

v soustavě souřadnic $(P'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')$, kde $P' = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_1' = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $\mathbf{e}_2' = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ (vše v bázi $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$).

DOPLNIT OBRAZEK SITUACE!

Konkrétní tvar kvadriky nebo kuželosečky se řídí hodnotami čísel $\mu, b, \zeta, \xi, \gamma$ vystupujících v normálním tvaru a znaménky čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Věta 9.4. *Normální tvary kvadrik zahrnují tyto možnosti:*

(i1)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	*imaginární elipsoid*
(i2)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	*reálný elipsoid*
(i3)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	*dvojdílný hyperboloid*
(i4)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	*jednodílný hyperboloid*
(i5)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	*imaginární kužel*
(i6)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	*reálný kužel*
(ii1)	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0, p, q > 0$	*eliptický paraboloid*
(ii2)	$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0, p, q > 0$	*hyperbolický paraboloid*
(iii1)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	*imaginární eliptický válec*
(iii2)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	*reálný eliptický válec*
(iii3)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	*hyperbolický válec*
(iii4)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	*imaginární dvojice různoběžných rovin*
(iii5)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	*reálná dvojice různoběžných rovin*
(iv1)	$x^2 - 2py = 0, p > 0$	*parabolický válec*
(v1)	$x^2 + a^2 = 0$	*imaginární dvojice rovnoběžných rovin*
(v2)	$x^2 - a^2 = 0$	*reálná dvojice rovnoběžných rovin*
(v3)	$x^2 = 0$	*dvojná rovina*

Normální tvary kuželosečky zahrnují tyto možnosti:

(i1)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	*imaginární elipsa*
(i2)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	*reálná elipsa*
(i3)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	*hyperbla*
(i4)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	*imaginární dvojice různoběžných přímek*
(i5)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	*reálná dvojice různoběžných přímek*
(ii1)	$\frac{x^2}{p} - 2y = 0, p > 0$	*parabola*
(iii1)	$x^2 + a^2 = 0$	*imaginární dvojice rovnoběžných přímek*
(iii2)	$x^2 - a^2 = 0$	*reálná dvojice rovnoběžných přímek*
(iii3)	$x^2 = 0$	*dvojná přímka*

Důkaz: Větu 9.4 snadno dokážeme rozborem všech možností znamének čísel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a hodnot čísel $\mu, \beta, \zeta, \xi, \nu$.

$\diamondsuit$

Poznámka: Všimněme si, že název „imaginární“ přísluší těm rovnicím kvadrik nebo kuželoseček, jimž nevyhovuje žádný bod v $\mathbb{R}^3$ nebo $\mathbb{R}^2$.

Poznámka: Snadno lze ukázat, že řezy kvadrik souřadnicovými rovinami nebo rovinami s nimi rovnoběžnými jsou kuželosečky. Z tvaru těchto řezů vyplývá názvosloví pro kvadriky.

Poznámka: Názvosloví pro kvadriky uvedené ve větě 9.4 je sice běžně zavedené, správně by se však mělo např. místo reálný elipsoid říkat reálná elipsoidální procha apod., vzhledem k tomu, že jde skutečně o plochy v $\mathbb{R}^3$, nikoli o tělesa.

DOPLNIT OBRÁZKY TĚLES

Cvičení 9.2

(1) Proveďte podrobný rozbor vztahu 9.13 pro případ kuželosečky v $\mathbb{R}^2$ a dokažte tak větu 9.3 pro kuželosečky.

Návod: Sledujte rozbor provedený v textu pro případ kvadriky a aplikujte jej na případ kuželosečky tak, že vypustíte členy obsahující z-ové souřadnice.

(2) Proveďte podrobně důkaz věty 9.4 nejprve pro kuželosečky, potom pro kvadriky. Zjistěte, jaké útvary jsou řezy kvadrik rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami.

Návod: U kuželoseček i kvadrik rozeberte všechny možnosti znamének čísel λ_1, λ_2 (λ_1, λ_2, λ_3) i všechny možnosti znamének μ, β, ν, (μ, β, ζ, ξ, ν) včetně možnosti nulových hodnot pro některé z nich. Za účelem klasifikace řezů kvadrik rovinami rovnoběžnými s rovinami soustavy souřadnic řešte rovnice kvadrik spolu s rovnicemi x =kons. resp. y =konst., resp z =konst.

(3) V následujících případech najděte kartézskou soustavu souřadnic, v níž má kvadrika nebo kuželosečka normální tvar. Určete, o jakou kvadriku nebo kuželosečku se jedná.

a) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$ v $\mathbb{R}^2$
b) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$ v $\mathbb{R}^2$
c) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$ v $\mathbb{R}^3$
d) $4x^2 + 2xy + 2xz - 2y^2 + 5yz - 2z^2 - 22x - 19y + 8z + 1 = 0$ v $\mathbb{R}^3$
e) $x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 1 = 0$ v $\mathbb{R}^2$
f) $2x^2 + 5xy - 3y^2 + x + 10y - 3 = 0$ v $\mathbb{R}^2$
g) $4x^2 + y^2 - 4z^2 - 8x + 4y + 24z - 32 = 0$ v $\mathbb{R}^3$
h) $6x^2 - 4xy - 4xz + 7y^2 + 5z^2 - 36 = 0$ v $\mathbb{R}^3$
i) $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 5z^2 - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$ v $\mathbb{R}^3$
j) $x^2 + 4xy - 10xz - 2y^2 + 4yz + z^2 + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$ v $\mathbb{R}^3$
k) $x^2 + 2xy + 6xz + 5y^2 + 2yz + z^2 - 2x + 6y + 2z = 0$ v $\mathbb{R}^3$
l) $x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0$ v $\mathbb{R}^2$
m) $2x^2 - 3xy - 2y^2 + x + 3y - 1 = 0$ v $\mathbb{R}^3$
n) $4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y - 2 = 0$ v $\mathbb{R}^2$

Výsledek:

a) $9x^2 - y^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{y^2}{3} - 1 = 0$, hyperbola
$\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$, $\mathbf{e}_2' = (-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$, $P' = (2, -1)$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

b) $x^2 + 2\sqrt{2}y = 0$, parabola
$\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_2' = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}})$, $P' = (1, 1)$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e_2})$

c) $3x^2 + 6y^2 - 2z^2 + 1 = 0$, jednodílný hyperboloid
$\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{e}_2' = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $\mathbf{e}_3' = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $P' = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

d) $x^2 - y^2 - 2 = 0$, hyperbolický válec
$\mathbf{e}_1' = (\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}})$ $\mathbf{e}_2' = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_3' = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $P' = (\frac{22}{9}, \frac{8}{9}, \frac{19}{9})$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

e) $9x^2 - 3y^2 + 4 = 0$, hyperbola
$\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_2' = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $P' = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

f) $(5\sqrt{2} - 1)x^2 - (5\sqrt{2} + 1)y^2 = 0$, reálná dvojice různoběžných přímek
$\mathbf{e}_1' = (\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}})$ $\mathbf{e}_2' = (\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}})$, $P' = (-\frac{8}{7}, \frac{5}{7})$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

g) $4x^2 + y^2 - 4z^2 - 4 = 0$, jednodílný hyperboloid
$P' = (1, -2, 3)$ v $(P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, $\mathbf{e}_i' = \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$

h) $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 12 = 0$, reálný elipsoid
$\mathbf{e}_1' = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $\mathbf{e}_2' = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, $\mathbf{e}_3' = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $P' = (0, 0, 0)$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

i) $15x^2 + 5y^2 - 25z^2 + 4 = 0$, dvojdílný hyperboloid
$\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\mathbf{e}_2' = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\mathbf{e}_3' = (0, 0, 1)$, $P' = (0, 1, \frac{2}{5})$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

j) $3x^2 - 3y^2 - 1 = 0$, hyperbolický válec
$\mathbf{e}_1' = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_2' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{e}_3' = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $P' = (-\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, 0)$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

k) $6x^3 + 3y^2 - 2z^2 - 1 = 0$, jednodílný hyperboloid
$\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $\mathbf{e}_2' = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\mathbf{e}_3' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $P' = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

l) $2x^2 + 2 = 0$, imaginární dvojice rovnoběžných přímek
$\mathbf{e}_1' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{e}_2' = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $P' = (0, 0)$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

m) $x^2 - y^2 = 0$, reálná dvojice různoběžných přímek
$\mathbf{e}_1' = (\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$, $\mathbf{e}_2' = (\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}})$, $P' = (\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$

n) $20x^2 - 9 = 0$, reálná dvojice rovnoběžných přímek
$\mathbf{e}_1' = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $\mathbf{e}_2' = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $P' = (-\frac{1}{5}, -\frac{1}{10})$ v $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

9.3 Invarianty kvadrik a kuželoseček

Funkce koeficientů rovnice kvadriky resp. kuželosečky, které se nemění při přechodu od jedné kartézské soustavy souřadnic ke druhé, se nazývají *invarianty kvadriky* resp. *kuželosečky*. Funkce koeficientů rovnice kvadriky resp. kuželosečky, které se nemění při přechodu od jedné kartézské soustavy souřadnic ke druhé nezahrnujícím translaci, se nazývají *semiinvarianty kvadriky* resp. *kuželosečky*. Platí pro ně

$$F(\alpha_1^1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_3^3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma) = F(\alpha_1^{1'}, \alpha_1^{2'}, \ldots, \alpha_3^{3'}, \beta_1', \beta_2', \beta_3', \gamma').$$

Věta 9.5. *Funke*

$$I_1 = \alpha_1^1 + \alpha_2^2 = \mathrm{tr}\mathbf{A}, \qquad I_2 = \det \mathbf{A}, \qquad I_3 = \det \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \frac{1}{2}\beta_1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \frac{1}{2}\beta_2 \\ \frac{1}{2}\beta_1 & \frac{1}{2}\beta_2 & \gamma \end{pmatrix}$$

jsou invarianty kuželosečky, funkce

$$K_1 = \det \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \frac{1}{2}\beta_1 \\ \frac{1}{2}\beta_1 & \gamma \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \alpha_2^2 & \frac{1}{2}\beta_2 \\ \frac{1}{2}\beta_2 & \gamma \end{pmatrix}$$

je jejím semiinvariantem.

Pro kuželosečky typu (iii) je K_1 rovněž invariantem.

Důkaz: Nechť $k(a) = (\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^{\mathbf{T}} + (\alpha)\mathbf{B} + \gamma$ je rovnice kuželosečky.

Při transformaci souřadnic $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \to (P; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')$ popsané ortogonální maticí $\mathbf{T}$, platí $k(a) = (\alpha')\mathbf{TAT}^{-1}(\alpha')^{\mathbf{T}} + (\alpha')\mathbf{TB} + \gamma = (\alpha')\mathbf{A}'(\alpha')^{\mathbf{T}} + (\alpha')\mathbf{B}' + \gamma$. Označme $I_1 = \sum_{i=1}^{1} \alpha_i^i = \mathrm{tr}\mathbf{A}$ (stopa matice $\mathbf{A}$). Pak $I_1' = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i^{i'} = \sum_{i,j,k=1}^{2} \tau_i^j \alpha_j^k \sigma_k^i = \sum_{j,k=1}^{2} \alpha_j^k \sum_{i=1}^{2} \tau_i^j \sigma_k^i = \sum_{j,k=1}^{2} \alpha_j^k \delta_k^j = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j^j = I_1$. (Pozn.: invariantnost stopy matice při podobnostní transformaci je vlastností matic libovolného řádu n.) Funkce I_1 je tedy invariantem kvadriky vzhledem k transformaci souřadnic $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \to (P; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')$.

Dále platí: $I_2' = \det \mathbf{A}' = \det(\mathbf{TAT}^{-1}) = \det \mathbf{A} = I_2$. Funkce I_2 je rovněž invariantem kuželosečky vzhledem k uvažované transformaci souřadnic.

Dokážeme nyní invariantnost funkce I_3. Zaveďme následující označení, pomocí něhož přejdeme k úvahám v $\mathbb{R}^3$: $(\chi) = (x, y, 1)$ pro $(\alpha) = (x, y)$,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & 0 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\beta_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\beta_2 \\ \frac{1}{2}\beta_1 & \frac{1}{2}\beta_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Přímým výpočtem snadno ověříme, že platí $(\alpha)\mathbf{A}(\alpha)^{\mathbf{T}} = (\chi)\mathcal{A}(\chi)^{\mathbf{T}}$, $(\alpha)\mathbf{B} = (\chi)\mathcal{B}(\chi)^{\mathbf{T}}$, $\gamma = (\chi)\mathcal{G}(\chi)^{\mathbf{T}}$. Proto lze psát

$$k(a) = (\chi)(\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{G})(\chi)^{\mathbf{T}} = 0, \quad \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{G} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \frac{1}{2}\beta_1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_1^2 & \frac{1}{2}\beta_2 \\ \frac{1}{2}\beta_1 & \frac{1}{2}\beta_2 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Definujme transformaci mezi kartézskými soustavami souřadnic $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \to (P; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ v $\mathbb{R}^3$ pomocí ortogonální matice

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \tau_1^1 & \tau_1^2 & 0 \\ \tau_2^1 & \tau_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opět přímým výpočtem zjistíme, že $\mathcal{A}' = \mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{T}\mathcal{B}\mathcal{T}^{-1}$, $\mathcal{G}' = \mathcal{T}\mathcal{G}\mathcal{T}^{-1}$. Pak $k(a) = (\chi')\mathcal{T}(\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{G})\mathcal{T}^{-1}(\chi')^{\mathbf{T}} = 0$. Z rovnosti $\det(\mathcal{T}(\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{G})\mathcal{T}^{-1}) = \det(\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{G})$ vyplývá invariantnost funkce I_3 vzhledem k přechodu $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \to (P; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')$.

Zbývá dokázat invariantnost funkce K_1 vzhledem k uvažované transformaci soustavy souřadnic. Funkce K_1 je dána součtem algebraických doplňků prvků α_2^2 resp. α_1^1 v matici

$\mathcal{M} = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{G}$. Algebraickým doplňkem prvku γ je invariant I_2. K důkazu invariantnosti funkce K_1 tedy postačí důkaz invariantnosti funkce $K_1 + I_2$, která je, jak vyplývá z výše uvedených úvah, stopou matice adjungované k matici $\mathcal{M}$. Vzhledem k podobnosti matic $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}'$ při transformaci $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \to (P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ jsou také matice adj$\mathcal{M}$, adj$\mathcal{M}'$ podobné (viz definice a vlastnosti adjungovaných matic v odstavci 1.3). Platí tedy $\mathrm{tr}\mathcal{M}' = \mathrm{tr}(\mathcal{T}\mathcal{M}\mathcal{T}^{-1}) = \mathrm{tr}\mathcal{M} \Rightarrow K_1' + I_2' = K_1 + I_2$ a vzhledem k $I_2' = I_2$ je i $K_1' = K_1$.

Uvažujme nyní translaci soustavy souřadnic $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \to (P'; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, kde $\mathbf{t} = P' - P = (\alpha_0)$. Použitím vztahu 9.12 dostaneme při označení $(\alpha') = (\alpha) - (\alpha_0)$

$$k(X) = (\alpha')\mathbf{A}(\alpha')^{\mathbf{T}} + (\alpha')[\mathbf{B} + 2\mathbf{A}(\alpha_0)^{\mathbf{T}}] + k(P') = 0.$$

Invariantnost funkcí I_1 a I_2 je zřejmá okamžitě z invariantnosti matice kvadratické formy při translaci, invariantnost I_3 se prověří například přímým výpočtem determinantů matic $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$.

$\diamondsuit$

Věta 9.6. *Kuželosečku $\mathcal{K}$ v $\mathbb{R}^2$ lze převést transformací $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \to (P'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2')$ kartézských soustav souřadnic na normální tvar $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \mu = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ resp. $\lambda_1 x^2 + \beta y = 0$, $\lambda_1, \beta \neq 0$ resp. $\lambda_1 x^2 + \nu = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ právě tehdy, když $I_2 \neq 0$ resp. $I_2 = 0 \wedge I_3 \neq 0$ resp. $I_2 = I_3 = 0$.*

Důkaz: Vzhledem k invariantnosti funkcí I_1, I_2, I_3 stačí určit jejich hodnoty právě z normálních tvarů:

(i) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \mu = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$,

$$I_2 = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1\lambda_2, \quad I_3 = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \lambda_1\lambda_2\mu.$$

Odtud je zřejmé, že $I_2 \neq 0$, $\mu = I_3/I_2$. Je-li naopak $I_2 \neq 0$, musí být $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ a kuželosečka má tvar:

$$\lambda_1 x^1 + \lambda_2 y^2 + (I_3/I_2) = 0. \tag{9.21}$$

(ii) $\lambda_1 x^2 + \beta y = 0$, $\lambda_1, \beta \neq 0$,

$$I_2 = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad I_3 = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\beta \\ 0 & \frac{1}{2}\beta & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\lambda_1\beta^2 \neq 0$$

Přitom $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 = I_1$, takže $\beta^2 = -4I_3/I_1$ a kuželosečka má tvar:

$$\lambda_1 x^2 \pm 2\sqrt{|I_3/I_1|}y = 0. \tag{9.22}$$

(iii) $\lambda_1 x^2 + \nu = 0$, $\lambda_1 \neq 0$,

$$I_2 = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad I_3 = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} = 0,$$

$$K_1 = \det\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} = \lambda_1\nu,$$

tedy $\nu = K_1/I_1$ a kuželosečka má tvar:

$$\lambda_1 x^2 + K_1/I_1 = 0. \tag{9.23}$$

$\diamondsuit$

Jako důsledek věty 9.6 a jejího důkazu dostáváme následující tabulku klasifikace kuželoseček podle invariantů:

Rovnice	Kuželosečka	Invarianty	Normální tvar
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$	imaginární elipsa	$I_2>0,\ I_1\cdot I_3>0$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$	reálná elipsa	$I_2>0,\ I_1\cdot I_3<0$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	dvojice imag. různob.	$I_2>0,\ I_3=0$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$	hyperbola	$I_2<0,\ I_3\neq 0$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	dvojice reál. různob.	$I_2<0,\ I_3=0$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$
$x^2-2py=0$	parabola	$I_2=0,\ I_3\neq 0$	$\lambda_1x^2\pm 2\sqrt{\lvert\frac{I_3}{I_1}\rvert}y=0$
$x^2+a^2=0$	dvojice imag. rovnob.	$I_2=0,\ I_3=0,\ K_1>0$	$\lambda_1x^2+\frac{K_1}{I_1}=0$
$x^2-a^2=0$	dvojice reál. rovnob.	$I_2=0,\ I_3=0,\ K_1<0$	$\lambda_1x^2+\frac{K_1}{I_1}=0$
$x^2=0$	dvojná přímka	$I_2=0,\ I_3=0,\ K_1=0$	$\lambda_1x^2+\frac{K_1}{I_1}=0$

Příklad 4: Uvažujme kuželosečku z předchozího příkladu: $k(X) = 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$, $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$.

$$I_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 15, \quad I_2 = \det\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = 50, \quad I_3 = \det\begin{pmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} = -50.$$

Odtud $10x^2 + 5y^2 - 1 = 0$, což souhlasí s předchozím výsledkem. Podle klasifikační tabulky jde o reálnou elipsu, neboť $I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 < 0$.

Poznámka: Uvědomme si, že invarianty umožní určit typ kuželosečky i její normální rovnici, nikoliv však soustavu souřadnic, v níž je kuželosečka touto normální rovnicí zadána.

Analogická tvrzení nyní formulujeme pro kvadriky.

Věta 9.7. *Funkce*

$$I_1 = \alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \alpha_3^3 = \mathrm{tr}\mathbf{A}, \quad I_2 = \det\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^3 \\ \alpha_1^3 & \alpha_3^3 \end{pmatrix},$$

$$I_3 = \det \mathbf{A}, \quad I_4 = \det \begin{pmatrix} & & & \frac{1}{2}\beta_1 \\ & \mathbf{A} & & \frac{1}{2}\beta_2 \\ & & & \frac{1}{2}\beta_3 \\ \frac{1}{2}\beta_1 & \frac{1}{2}\beta_2 & \frac{1}{2}\beta_3 & \gamma \end{pmatrix}$$

jsou invarianty kvadriky, funkce

$$K_1 = \det \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \frac{1}{2}\beta_1 \\ \frac{1}{2}\beta_1 & \gamma \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \alpha_2^2 & \frac{1}{2}\beta_2 \\ \frac{1}{2}\beta_2 & \gamma \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \alpha_3^3 & \frac{1}{2}\beta_3 \\ \frac{1}{2}\beta_3 & \gamma \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \det \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \frac{1}{2}\beta_1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \frac{1}{2}\beta_2 \\ \frac{1}{2}\beta_1 & \frac{1}{2}\beta_2 & \gamma \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^3 & \frac{1}{2}\beta_1 \\ \alpha_1^3 & \alpha_3^3 & \frac{1}{2}\beta_3 \\ \frac{1}{2}\beta_1 & \frac{1}{2}\beta_3 & \gamma \end{pmatrix} +$$

$$+ \det \begin{pmatrix} \alpha_2^2 & \alpha_2^3 & \frac{1}{2}\beta_2 \\ \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \frac{1}{2}\beta_3 \\ \frac{1}{2}\beta_2 & \frac{1}{2}\beta_3 & \gamma \end{pmatrix}$$

jsou jejími semiinvarinty, u kvadrik s normálními tvary (iii), (iv) se stává invariantem i funkce K_2, u kvadrik (v) jsou invarianty i funkce K_1, K_2.

Věta 9.8. *Kvadriku $\mathcal{K}$ v $\mathbb{R}^3$ lze převést transformací kartézských soustav souřadnic $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \to (P'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')$ na normální tvar*
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \mu = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0 \Leftrightarrow I_3 \neq 0$,
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \beta z = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \beta \neq 0 \Leftrightarrow I_2 \neq 0$, $I_4 \neq 0$, $I_3 = 0$,
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \zeta = 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \Leftrightarrow I_3 = 0$, $I_4 = 0$, $I_2 \neq 0$,
$\lambda_1 x^2 + \xi y = 0$, $\lambda_1, \xi \neq 0 \Leftrightarrow I_2 = I_3 = I_4 = 0$, $K_2 \neq 0$,
$\lambda_1 x^2 + \nu = 0$, $\lambda_1 \neq 0 \Leftrightarrow I_2 = I_3 = I_4 = K_2 = 0$, $I_1 \neq 0$.
Pro koeficienty v normálních tvarech platí:

$$\mu = I_4/I_3, \quad \beta = \pm 2\sqrt{|I_4/I_2|}, \quad \zeta = K_2/I_2, \quad \xi = \pm 2\sqrt{|K_2/I_1|}, \quad \nu = K_1/I_1 \tag{9.24}$$

Rovnice	Kvadrika	Invarianty
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$	im. elipsoid	$I_4>0, I_3\neq 0, I_2>0, I_1\cdot I_3>0$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$	1-dílný hyperboloid	$I_4>0, I_3\neq 0,$buď $I_2\leq 0$, nebo $I_1\cdot I_3\leq 0$
$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}-2z=0, p,q>0$	hyp. paraboloid	$I_4>0, I_3=0$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$	reál. elipsoid	$I_4<0, I_3\neq 0, I_2>0, I_1\cdot I_3>0$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$	2-dílný hyperboloid	$I_4<0, I_3\neq 0,$buď $I_2\leq 0$, nebo $I_1\cdot I_3\leq 0$
$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0, p,q>0$	elip. paraboloid	$I_4<0, I_3=0$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	im. kužel	$I_4=0, I_3\neq 0, I_2>0, I_1\cdot I_3>0$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	reál. kužel	$I_4=0, I_3\neq 0,$buď $I_2\leq 0$, nebo $I_1\cdot I_3\leq 0$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$	im. válec	$I_4=0, I_3=0, K_2\neq 0, I_2>0, I_1\cdot K_2>0$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$	elip. válec	$I_4=0, I_3=0, K_2\neq 0, I_2>0, I_1\cdot K_2<0$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$	hyp. válec	$I_4=0, I_3=0, K_2\neq 0, I_2<0$
$x^2-2py=0$	parab. válec	$I_4=0, I_3=0, K_2\neq 0, I_2=0$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	im. dvoj. růz. rovin	$I_4=0, I_3=0, K_2=0, I_2>0$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	reál. dvoj. růz. rovin	$I_4=0, I_3=0, K_2=0, I_2<0$
$x^2+a^2=0$	im. dvojice rov. rovin	$I_4=0, I_3=0, K_2=0, I_2=0, K_1>0$
$x^2-a^2=0$	reál. dvoj. rov. rovin	$I_4=0, I_3=0, K_2=0, I_2=0, K_1<0$
$x^2=0$	dvojná rovina	$I_4=0, I_3=0, K_2=0, I_2=0, K_1=0$

Příklad 5: Uvažujme kvadriku $\mathcal{K}$ zadanou rovnicí

$$x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0.$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&5&1\\3&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \lambda_1=3, \lambda_2=6, \lambda_3=-2,$$

$$I_1=7,\quad I_2=\det\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}5&1\\1&1\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}=0,$$

$$I_3=\det\mathbf{A}=-36,\quad I_4=\det\begin{pmatrix}1&1&3&-1\\1&5&1&3\\3&1&1&1\\-1&3&1&0\end{pmatrix}=36,$$

tj. $I_4>0$, $I_3\neq 0$, $I_2=0$, $I_1\cdot I_3<0$ a jedná se o jednodílný hyperboloid o rovnici $3x^2+6y^2-2z^2-1=0$, neboť $\mu=I_4/I_3=-1$.

Cvičení 9.3

(1) Dokažte, že stopa libovolné čtvercové matice řádu n se podobnostní transformací nemění.

Návod: Důkaz proveďte přímým výpočtem stopy matice $\mathbf{TAT}^{-1}$ s využitím vztahů $\mathbf{TT}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{E}$.

(2) Proveďte důkaz invariantnosti funkcí I_1, I_2, I_3 u kuželoseček vzhledem k translaci kartézské soustavy souřadnic.

Návod: Využijte postupu naznačeného v důkazu věty 9.5.

(3) Dokažte invariantnost funkce K_1 pro kuželosečky s normálním tvarem (iii) vzhledem k translaci kartézské soustavy souřadnic.

Návod: Využijte skutečnosti, že K_1 je semiinvariantem kuželoseček a při důkazu tvrzení formulovaného v zadání úlohy vyjděte přímo z normálního tvaru $\lambda_1 x^2 + \nu = 0$. Zjistěte, jak se změní tvar této rovnice po translaci a rovnost $K_1' = K_1$ dokažte přímým výpočtem.

(4) Dokažte větu 9.7 a větu 9.8.

Návod: Postupujte v analogii s důkazem věty 9.5 a 9.6.