Úkol 1. Rozhodněte, zda množina

$$\left\{ \frac{a^p}{b^q} \mid a, b \in \mathbb{N},\ p, q \in \mathbb{Q} \right\}$$

tvoří podprostor vektorového prostoru nad $\mathbb{Q}$ všech kladných reálných čísel s operacemi násobení a umocňování. Svoje tvrzení dokažte.

Úkol 2. Rozhodněte, zda množina

$$\{ a + b \cdot \sqrt[4]{2} + c \cdot \sqrt{2} + d \cdot \sqrt[4]{8} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q} \}$$

tvoří spolu s obvyklými operacemi sčítání a násobení čísel vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$. Svoje tvrzení dokažte.

Úkol 3. Určete, pro které hodnoty $t \in \mathbb{R}$ leží matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

v lineárním obalu matic

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & t+3 \\ 2-t & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro tyto hodnoty t vyjádřete matici A jako lineární kombinaci matic B, C a D.