Návod k domácímu úkolu z cvičení 5

I. Lineární transformace se nazývá *idempotentní*, jestliže $f \circ f = f$, ukažte, že každá idempotentní transformace je diagonalizovatelná a může mít pouze vlastní hodnoty 0 a 1.

Návod: Předpokládejte, že vektor $\vec{a}$ je vlastní vektor příslušný nějaké vlastní hodnotě a využijte předpokladu $(f(f(\vec{a})) = f(\vec{a})$. Dále ukažte, že jádro je tvořeno vlastními vektory příslušnými vlastní hodnotě $\lambda = 0$, ukažte, že každý vektor z obrazu Imf je vlastní vektor příslušný hodnotě $\lambda = 1$. Využijte skutečnosti, že součet hodnosti a defektu lineární transformace je roven celkové dimenzi prostoru.

II. Lineární transformace se nazývá *involuce*, jestliže $f \circ f = \mathrm{id}$, ukažte, že involuce je diagonalizovatelná a může mít pouze vlastní hodnoty 1 a -1.

Návod: Při určování vlastních hodnot postupujte analogicky jako v případě I. Dále předpokládejte, že systém $(\vec{e}_i^{+})$ resp. $(\vec{e}_j^{-})$ tvoří bázi podprostoru vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě $+1$ resp. -1. Důkaz povedeme sporem, budeme předpokládát, že vlastních vektorů není dostatek, tedy systém $(\vec{e}_i^{+}, \vec{e}_j^{-})$ netvoří bázi celého prostoru. Uvažujte vektory $(\vec{c}_k)$ jako doplnění tohoto systému na bázi celého prostoru. Ukažte, že každý vektor $\vec{c} + f(\vec{c})$ resp. $\vec{c} - f(\vec{c})$ je vlastní a s využitím této skutečnosi dokažte, že $\vec{c}$ je lineární kombinací vektorů ze systému $(\vec{e}_i^{+}, \vec{e}_j^{-})$. Tím dojdeme ke sporu s předpokladem, že vektory $(\vec{c}_k)$ doplňují systém $(\vec{e}_i^{+}, \vec{e}_j^{-})$ na bázi, neboť jsou závislé. Systém $(\vec{e}_i^{+}, \vec{e}_j^{-})$ je tedy bází.

III. Uveďte příklady ivnoluce a idempotentní lineární transformace.