Jak nalézt podobnostní transformaci?

Příklad: Jsou zadány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

které jsou podobné již na první pohled. Nalezněte nějakou jejich podobnostní trasformaci.

A. Pomocí polynomických matic

Nejprve vezmeme příslušné charakteristické matice $A = \lambda E$ resp. $B - \lambda E$ a ty budeme upravovat na kanonický tvar $K_A = K_B$ (kanonický tvar mají stejný, neboť jsou ekvivalentní - to plyne z podobnosti původních matic A, B). S jednotkovou maticí vlevo děláme tytéž úpravy řádkové, jako s charakteristickou, s jednotkovou maticí vpravo děláme tytéž sloupcové úpravy jako s maticí charakteristickou.

$A - \lambda E$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Přičtením $(\lambda - 1)$- násobku druhého řádku k prvnímu řádku:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & -1+\lambda & 0 & 1-(1-\lambda)^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Přičtením $(\lambda - 1)$-násobku prvního sloupce ke druhému sloupci:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & -1+\lambda & 0 & 2\lambda-\lambda^2 & 1 & -1+\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Výměnou řádků a násobením spodního řádku číslem -1:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \lambda-1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & \lambda^2-2\lambda & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$B - \lambda E$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 1 \end{array}\right),$$

přičtením λ-násobku prvního sloupce ke druhému sloupci:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 2-\lambda & 2\lambda-\lambda^2 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

přičtením $(\lambda - 2)$-násobku druhého řádku k prvnímu řásku:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & \lambda-2 & 0 & 2\lambda-\lambda^2 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

výměnou řádků a násobením druhého sloupce číslem -1:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda-2 & 0 & \lambda^2-2\lambda & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Tím jsme získali unimodulární matice

$$U_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}, \quad V_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

resp.

$$U_B(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{pmatrix}, \quad V_B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pro které (prověřte)

$$K_A = U_A(A - \lambda E)V_A, \quad K_B = U_B(B - \lambda E)V_B.$$

Odtud

$$(B - \lambda E) = U_B^{-1} U_A (A - \lambda E) V_A V_B^{-1} = U \cdot (A - \lambda E) \cdot V,$$

kde

$$U = U_B^{-1} U_A = \begin{pmatrix} -1 & 3-2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = V_A V_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2\lambda+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nyní spočteme hodnoty maticových polynomů $R_1 = U_L(B)$ resp. $R_2 = V_R(B)$:

$$R_1 = B^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + B \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot B^2 + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B + \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zjevně $R_1 = R_2^{-1}$ a tyto matice realizují jednu z možných podobnostních transformací (prověřte)

$$B = R_1 \cdot A \cdot R_2.$$

B. Pomocí řetízků rovnic

Nejprve určíme vlastní hodnoty:

$$\det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2.$$

Určíme báze, ve které jsou matice A a B v Jordanově normálním tvaru $J_A = J_B$. U našich matic je Jordanův tvar zjevně diagonální, neboť vlastní hodnoty jsou různé. Nemusíme tedy řešit řetízky rovnic, protože báze je tvořena přímo vlastními vektory, které snadno určíme $\vec{a}_{\lambda_1} = (1, -1)$, $\vec{a}_{\lambda_2} = (1, 1)$, $\vec{b}_{\lambda_1} = (1, -2)$, $\vec{b}_{\lambda_2} = (1, 0)$.

Matice přechodů od původní báze k těmto novým bázím označíme

$$T_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$J_A = T_A \cdot A \cdot T_A^{-1}, \quad J_B = T_B \cdot B \cdot T_B^{-1},$$

odkud

$$B = (T_B^{-1} T_A) \cdot A \cdot (T_A^{-1} T_B) = T \cdot B \cdot T^{-1}$$

a matice $T = T_B^{-1} T_A$ realizuje jednu z možných podobnostních transformací (prověřte):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výpočty v části B je ještě nutno zkontrolovat.