ÚVOD

Cílem mé práce je sestavit sbírku úloh z lineární algebry. Ta je určena především pro posluchače prvního semestru oboru odborná informatika.

Látka je rozložena do deseti kapitol, které jsou uspořádány v souladu se skripty [5] doc. RNDr. P. Zlatoše, CSc. a s přednáškami a cvičeními RNDr. M. Čadka, CSc. a Mgr. M. Sekaniny, Ph.D. Jejím základem jsou cvičení ve skriptech [4] prof. J. Slováka, DrSc., která však podstatně rozšiřuje.

V každé kapitole připomínám nejdůležitější věty a definice potřebných pojmů, z nichž některé jsou ve stručnosti popsány v seznamu použitého značení. Dále jsou zde obsaženy řešené příklady, které čtenáři poskytují návody na řešení daných problémů, a úlohy k procvičení a důkladnému pochopení látky. Příklady i cvičení jsou řazeny postupně od jednodušších po složitější a s některými typy se student setká také v zápočtových a zkouškových testech. Výsledky cvičení je pak možné zkontrolovat v závěru sbírky.

Sbírka dává studentům možnost ověřit si své znalosti samostatným řešením úloh. Takových sbírek sice existuje celá řada (např. [1] nebo [3]), avšak ty jsou buď obtížně dostupné nebo nepokrývají vše, co se v současné době přednáší v prvním semestru lineární algebry na Masarykově univerzitě.

SEZNAM POUŽITÉHO ZNAČENÍ

Uvedené značení je používáno v celé sbírce a ve většině případů koresponduje se značením v [5].

a, b, c	běžné skaláry - prvky pole $\mathbf{K}$
α, β, γ	báze vektorových prostorů
$\mathbf{C}$	množina všech komplexních čísel
$\dim \mathbf{V}$	dimenze vektorového prostoru $\mathbf{V}$
Dir $\mathbf{V}$	zaměření vektorového prostoru $\mathbf{V}$
E	jednotková matice
EŘO	elemetrární řádkové operace
ε_n	standardní báze v $\mathbf{R^n}$
$(f)_{\beta,\alpha}$	matice lineárního zobrazení f v bazích α, β
$(\mathrm{id}_{\mathbf{V}})_{\beta,\alpha}$	matice přechodu od báze α k bázi β
$\mathrm{Im}\ f$	obraz zobrazení f
$\mathbf{K}$	obecné pole skalárů
$\mathbf{K^n}$	množina všech uspořádaných n-tic prvků z $\mathbf{K}$
$\mathbf{K_n}[x]$	množina všech polynomů v proměnné x nad $\mathbf{K}$ stupně nejvýše n
$\mathrm{Ker}\ f$	jádro zobrazení f
$[M]$	lineární obal množiny M
$\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbf{K})$	množina všech matic typu $m \times n$ nad polem $\mathbf{K}$
$\mathrm{Mat}_n(\mathbf{K})$	$\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbf{K})$
$\mathbf{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbf{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbf{R}^+$	množina všech kladných reálných čísel
$s_i(A)$	i-tý sloupec matice A
$\mathrm{Tr}\ (A)$	stopa matice A
$\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$	vektorové prostory
u, v, w	vektory
x, y, z	neznámé, vektory
$(x)_\alpha$	souřadnice vektoru x v bázi α
$\mathbf{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbf{Z_n}$	množina zbytkových tříd modulo n

1. OPAKOVÁNÍ, POČÍTÁNÍ S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

Komplexní čísla jsou čísla tvaru $z = a + ib$, kde $a \in \mathbf{R}$ se nazývá reálná část komplexního čísla z, $b \in \mathbf{R}$ se nazývá imaginární část komplexního čísla z a pro i (tzv. imaginární jednotku) platí $i^2 = -1$. Tento tvar komplexního čísla se nazývá algebraický tvar komplexního čísla z.

Pro komplexní čísla $u = a+ib, v = c+id$ definujeme operace sčítání, odčítání a násobení takto:

$$u \pm v = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

$$u \cdot v = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Číslo $\overline{z} = a - ib$ se nazývá komplexně sdružené k číslu $z = a + ib$, číslo $-z = -a - ib$ je opačné komplexní číslo k číslu $z = a + ib$.

Reálné číslo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se nazývá absolutní hodnota komplexního čísla $z = a + ib$. Platí $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$. Komplexní číslo, pro které platí $|z| = 1$, se nazývá komplexní jednotka.

Číslo z^{-1} s vlastností $z \cdot z^{-1} = 1$ se nazývá převrácené číslo komplexního čísla z. Platí $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Podíl komplexních čísel $u = a + ib$ a $v = c + id \neq 0$ je definován jako součin $u \cdot v^{-1}$.

Komplexní čísla znázorňujeme v kartézské soustavě souřadnic xy (tzv. rovina komplexních čísel nebo také Gaussova rovina).

Komplexní číslo $z = a + ib, z \neq 0$ můžeme rovněž zapsat v goniometrickém tvaru $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, kde $r \in \langle 0, 2\pi)$ je rovno $|z|$, $\cos\alpha = \frac{a}{|z|}, \sin\alpha = \frac{b}{|z|}$. Číslo $\alpha \in \mathbf{R}$ se nazývá argument komplexního čísla z.

Sčítání komplexních čísel odpovídá sčítání vektorů v rovině.

Násobení komplexního čísla z reálným skalárem k odpovídá stejnolehlosti v rovině s koeficientem k se středem v počátku; $F(z) = kz$.

Násobení komplexního čísla z komplexní jednotkou $(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ odpovídá otočení v rovině o úhel α okolo počátku; $F(z) = z(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Násobení komplexního čísla z pevným komplexním číslem $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ odpovídá složení stejnolehlosti a otočení; $F(z) = zr(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Číslo $z \in \mathbf{C}$ se nazývá n-tá odmocnina čísla $a + ib \in \mathbf{C}$ právě tehdy, když je kořenem rovnice $z^n = a + ib$.

K řešení rovnice $z^n = a + ib$ použijeme goniometrický tvar komplexního čísla. Píšeme

$$z^n = a + ib = R(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

kde R, α jsou známé. Číslo z hledáme ve tvaru

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Z rovnosti

$$z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

vyplývá $r^n = R$, tedy $r = \sqrt[n]{R}$ a $n\varphi = \alpha + 2k\pi$, tedy $\varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k}{n}\pi, k = 0, 1, ..., n-1$.
Existuje n řešení rovnice.

Příklad: Řešte rovnici $z^3 = 8i$.

Řešení: Komplexní číslo $8i$ převedeme na goniometrický tvar:
$|8i| = 8, \cos\alpha = 0, \sin\alpha = 1, \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 8i = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.
Tedy

$$z^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

z čehož dostáváme

$$\begin{aligned} r^3 = 8 \quad &\Rightarrow \quad r = 2 \\ 3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad &\Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi \end{aligned}$$

Nyní za k dosadíme čísla $0, 1, 2$, určíme jednotlivé úhly a vypočteme všechna řešení rovnice:
$k = 0: \ \varphi_0 = \frac{\pi}{6} = 30° \Rightarrow z_1 = 2(\cos 30° + i\sin 30°) = \sqrt{3} + i$
$k = 1: \ \varphi_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi = 150° \Rightarrow z_1 = 2(\cos 150° + i\sin 150°) = -\sqrt{3} + i$
$k = 2: \ \varphi_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi = \frac{9}{6}\pi = 270° \Rightarrow z_2 = 2(\cos 270° + i\sin 270° = -2i$

Cvičení:

1. Jsou dána komplexní čísla $a = -6 + 2i, b = 3 + 5i$. Vyjádřete v algebraickém tvaru čísla
   (a) $\overline{(a-b)^3}$
   (b) $\overline{ab}$
   (c) $\frac{a}{b}$

2. Upravte a vyjádřete v algebraickém tvaru čísla:

   (a) $(3i - 7)(8 + i)$

   (b) $-i + 2i(3 - 4i)$

   (c) $\frac{3-2i}{1-i}$

   (d) $\frac{1+i}{3-4i}$

   (e) $\frac{(1+2i)(2+i)(3-2i)}{(1-i)^2}$

   (f) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$

3. Určete všechna reálná čísla x, y, pro která platí

   (a) $(1+i)x + (13+7i)y = 0$,

   (b) $4(2+i)x + (1-4i)y = (3+i)x - 4(2i-1)y - 7 + 9i$.

4. Řešte následující rovnice:

   (a) $(1+i)z = 2i$

   (b) $(8-3i)z = 1 + i\sqrt{2}$

   (c) $(5-i)z = \frac{3i}{7+6i}$

5. Napište v goniometrickém tvaru komplexní čísla

   (a) $-1 + i\sqrt{3}$

   (b) $-\sqrt{2}(1-i)$

   (c) $3 - i\sqrt{3}$

6. Řešte následující rovnice:

   (a) $x^3 = 8$

   (b) $x^4 + 2 = 0$

   (c) $x^3 + 1 = 0$

   (d) $x^5 - 1 = 0$

   (e) $7x^3 + 24 = 0$

2. POLE A VEKTOROVÉ PROSTORY

Polem rozumíme množinu $\mathbf{K}$ se dvěma význačnými prvky – nulou a jedničkou a dvěma binárními operacemi na $\mathbf{K}$ – sčítáním a násobením takovými, že platí následujících deset axiomů:
(1) $(\forall a, b \in \mathbf{K})(a + b = b + a)$
(2) $(\forall a, b, c \in \mathbf{K})(a + (b + c) = (a + b) + c)$
(3) $(\forall a \in \mathbf{K})(a + 0 = a)$
(4) $(\forall a \in \mathbf{K})(\exists b \in \mathbf{K})(a + b = 0)$
(5) $(\forall a, b \in \mathbf{K})(a \cdot b = b \cdot a)$
(6) $(\forall a, b, c \in \mathbf{K})(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c)$
(7) $(\forall a \in \mathbf{K})(1 \cdot a = a)$
(8) $(\forall a \in \mathbf{K} \setminus \{0\})(\exists b \in \mathbf{K})(a \cdot b = 1)$
(9) $(\forall a, b, c \in \mathbf{K})(a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)$
(10) $0 \neq 1$

2.1 ZBYTKOVÉ TŘÍDY

Pro každé $n \in \mathbf{N}$ značí

$$\mathbf{Z_n} = \{k \in \mathbf{N}, k < n\} = \{0, 1, ..., n - 1\}$$

množinu zbytkových tříd modulo n se dvěma bimárními operacemi – sčítáním a násobením takovými, že $\forall a, b \in \mathbf{Z_n}$ platí
(1) $a + b =$ zbytek po dělení $(a + b) : n$,
(2) $a \cdot b =$ zbytek po dělení $(a \cdot b) : n$.

Příklad: Najděte opačné a inverzní prvky k prvkům množiny $\mathbf{Z_5}$.

Řešení: Opačným prvkem k a je podle axiomu (4) takové b, pro které platí $a + b = 0$. Jak snadno zjistíme z tabulky pro sčítání v $\mathbf{Z_5}$, opačným prvkem k 1 je 4, ke 2 je to prvek 3, k 0 je to opět 0.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Tabulka 1: Tabulka pro sčítání v $\mathbf{Z_5}$.

Inverzním prvkem k a je podle axiomu (8) takové b, pro které platí $a \cdot b = 1$. V tabulce pro násobení v $\mathbf{Z_5}$ vidíme, že inverzním prvkem k 1 je opět 1, ke 2 je to prvek 3, ke 4 opět 4. K 0 inverzní prvek neexistuje.

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Tabulka 2: Tabulka pro násobení v $\mathbf{Z_5}$.

Příklad: Řešte v $\mathbf{Z_5}$ rovnici $3x + 4 = 3$.

První řešení: Rovnici upravíme přičtením opačného prvku ke 4 k oběma stranám rovnice. Tedy

$$3x + 4 + 1 = 3 + 1 \Rightarrow 3x = 4.$$

Dále celou rovnici vynásobíme inverzním prvkem ke 3, čímž dostaneme

$$2 \cdot 3x = 2 \cdot 4 \Rightarrow 1 \cdot x = 3.$$

Druhé řešení: Rovnici opět upravíme na tvar $3x = 4$. V multiplikativní tabulce pro násobení v $\mathbf{Z_5}$ najdeme prvek, který dá v součinu s 3 výsledek 4. Tímto prvkem je 3, což je přímo řešením rovnice.

Poznámka: V $\mathbf{Z_n}$ pro n prvočíslo má rovnice $ax + b = c$ pro $a \neq 0$ právě jedno řešení. V $\mathbf{Z_n}$ pro n složené mohou nastat případy, kdy má rovnice více řešení, právě jedno řešení nebo nemá řešení žádné.

Cvičení:

1. V $\mathbf{Z_p}$ řešte rovnici $2x + 1 = 2$ pro $p = 3, 5, 7$.
2. V $\mathbf{Z_p}$ řešte rovnici $7x + 9 = 8$ pro $p = 11, 13$.
3. V $\mathbf{Z_p}$ řešte rovnici $4x + 3 = 0$ pro $p = 5, 7, 11$.
4. V $\mathbf{Z_8}$ najděte všechna řešení rovnic
   (a) $4x + 6 = 5$
   (b) $4x + 6 = 2$
5. V $\mathbf{Z_9}$ najděte všechna řešení rovnic
   (a) $5x + 7 = 4$
   (b) $8x + 4 = 7$
6. V $\mathbf{Z_6}$ najděte rovnice, které
   (a) mají více řešení,
   (b) mají právě jedno řešení,
   (c) nemají žádné řešení.

7. V $\mathbf{Z_7}$ nejděte všechna řešení rovnic
   (a) $x^3 = 1$
   (b) $x^3 = 6$

8. V $\mathbf{Z_{11}}$ najděte všechna řešení rovnic
   (a) $x^2 + x = 9$
   (b) $x^2 + 2x = 8$

9. Najděte všechna řešení rovnice $x^3 + 2x = 2$
   (a) v $\mathbf{Z_5}$
   (b) v $\mathbf{Z_6}$
   (c) v $\mathbf{Z_7}$

2.2 VEKTOROVÉ PROSTORY

Nechť $\mathbf{K}$ je pole. Vektorovým prostorem nad polem $\mathbf{K}$ nazýváme množinu $\mathbf{V}$ s význačným prvkem 0 a dvěma binárními operacemi – sčítáním $+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ a násobením $\cdot : \mathbf{K} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ takovými, že platí:
(1) $(\forall u, v \in \mathbf{V})(u + v = v + u)$
(2) $(\forall u, v, w \in \mathbf{V})(u + (v + w) = (u + v) + w)$
(3) $(\forall u \in \mathbf{V})(0 + u = u + 0 = u)$
(4) $(\forall u \in \mathbf{V})(\exists v \in \mathbf{V})(u + v = 0)$
(5) $(\forall k, l \in \mathbf{K})(\forall u \in \mathbf{V})(k \cdot (l \cdot u) = (kl) \cdot u)$
(6) $(\forall u \in \mathbf{V})(1 \cdot u = u)$
(7) $(\forall k \in \mathbf{K})(\forall u, v \in \mathbf{V})(k \cdot (u + v) = k \cdot u + k \cdot v)$
(8) $(\forall k, l \in \mathbf{K})(\forall u \in \mathbf{V})((k + l) \cdot u = k \cdot u + l \cdot u)$

Nejčastějším případem vektorového prostoru nad polem $\mathbf{K}$ je pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ množina

$$\mathbf{K^n} = \{(x_1, ..., x_n); x_1, ..., x_n \in \mathbf{K}\}$$

všech uspořádaných n-tic prvků z $\mathbf{K}$ spolu s operacemi

$$x + y = (x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n),$$

$$cx = c(x_1, ..., x_n) = (cx_1, ..., cx_n),$$

kde $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{K^n}, y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbf{K^n}$ a $c \in \mathbf{K}$. Roli nuly v $\mathbf{K^n}$ hraje uspořádaná n-tice $0 = (0, ..., 0)$, opačným prvkem k $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{K^n}$ je prvek $-x = -(x_1, ..., x_n) = (-x_1, ..., -x_n)$.

Příklad: Zjistěte, zda množina $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R},\, x > 0\}$ s operacemi $x \oplus y = x \cdot y$, $a \odot x = x^a$ pro $x\ , y \in \mathbf{R}^+$, $a \in \mathbf{R}$ tvoří vektorový prostor nad polem $\mathbf{R}$.

Řešení: Abychom zjistili, zda je daná množina vektorovým prostorem, musíme ověřit všech osm axiomů vektorového prostoru:

(1) $x \oplus y = y \oplus x$
Důkaz: $x \oplus y = x \cdot y = y \cdot x = y \oplus x$

(2) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
Důkaz: $(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \oplus (y \oplus z)$

(3) Neutrální prvek pro $\oplus$ je 1.
Důkaz: $x \oplus 1 = x \cdot 1 = x$

(4) Inverzní prvek pro $\oplus$ k prvku x je $\frac{1}{x}$.
Důkaz: $x \oplus \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$

(5) $(a \cdot b) \odot x = a \odot (b \odot x)$
Důkaz: $(a \cdot b) \odot x = x^{a \cdot b} = (x^b)^a = a \odot (b \odot x)$

(6) $1 \odot x = x$
Důkaz: $1 \odot x = x^1 = x$

(7) $a \odot (x \oplus y) = (a \odot x) \oplus (a \odot y)$
Důkaz: $a \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a = (a \odot x) \oplus (a \odot y)$

(8) $(a + b) \odot x = (a \odot x) \oplus (b \odot x)$
Důkaz: $(a + b) \odot x = x^{(a+b)} = x^a \cdot x^b = (a \odot x) \oplus (b \odot x)$

Daná množina splňuje všech osm axiomů, tvoří tedy vektorový prostor.

Cvičení:

1. Zjistětě, zda jsou následující množiny vektorové prostory nad $\mathbf{R}$. Pokud ne, určete, které axiomy vektorového prostoru nejsou splněny.

   (a) $\mathbf{V} = \{(x, y, z)\}$ s operacemi $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$, $k(x, y, z) = (kx, y, z)$

   (b) $\mathbf{V} = \{(x, y)\}$ s operacemi $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$, $k(x, y) = (2kx, 2ky)$

   (c) $\mathbf{V} = \{(x, y), x \geq 0\}$ se standardními operacemi sčítání vektorů, tj. $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$, a násobení vektoru skalárem, tj. $k(x, y) = (kx, ky)$.

   (d) $\mathbf{V} = \{(x, y)\}$ s operacemi $(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1)$, $k(x, y) = (kx, ky)$

   (e) Množina všech n-tic reálných čísel tvaru $(x, x, \ldots, x)$ se standardními operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem.

   (f) $\mathbf{V} = \{(1, x)\}$ s operacemi $(1, x) + (1, x') = (1, x + x')$, $k(1, x) = (1, kx)$

(g) Množina všech matic typu 2×2 s reálnými koeficienty se standardními operacemi sčítání matic a násobení matic skalárem.

(h) Množina všech matic typu 2×2 tvaru $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ se standardními operacemi sčítání matic a násobení matic skalárem.

(i) Množina všech matic typu 2×2 tvaru $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ se standardními operacemi sčítání matic a násobení matic skalárem.

2. Uvažte, zda může vektorový prostor obsahovat dva různé nulové prvky (vektory). Pokud ano, splňují oba axiom (4)? Zdůvodněte.

3. Uvažte, zda mohou k vektoru u ve vektorovém prostoru existovat dva různé opačné vektory $(-u)_1, (-u)_2$. Pokud ano, splňují oba axiom (5)? Zdůvodněte.

4. Nechť $\mathbf{V} = \mathbf{C}$ a $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Ukažte, že $\mathbf{C}$ je vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.

5. Ukažte, že množina polynomů stupmě nejvýše 2 s reálnými koeficienty $\mathbf{R_2}[x] = \{a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_2, a_1, a_0 \in \mathbf{R}\}$ tvoří vektorový prostor.

6. Nechť $\mathbf{V} = \mathbf{C_2}[x]$ je množina polynomů stupně nejvýše 2 s komplexními koeficienty. Ukažte, že $\mathbf{V}$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbf{C}$ i nad $\mathbf{R}$.

3. MATICE, OPERACE S MATICEMI

Definujme nejprve základní operace s maticemi.

Sčítání matic: Nechť $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ jsou matice typu $m \times n$. Pak $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij})$ je matice typu $m \times n$ pro $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$.

Násobení matic skalárem: Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$, $a \in \mathbf{R}$ je skalár. Pak $a \cdot A = (a \cdot a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ pro $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$.

Násobení matic: Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$, $B = (b_{jk})$ je matice typu $n \times p$. Pak $AB = C = (c_{ik})$ je matice typu $m \times p$ a $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ pro $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n, k = 1, ..., p$.

Transponování matic: Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$. Pak $A^T = (a_{ji})$ je matice typu $n \times m$ pro $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$.

Stopa matice, ozn. $\mathrm{Tr}(A)$, je součet prvků matice na hlavní diagomále. $\mathrm{Tr}(A)$ je definována pouze pro čtvercové matice.

Příklad: Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte matice $2D - 5F, A + 3C, C^T, A^T, 2C + 4E^T, AB, EC, CE, F^2 - 3D$. Dále vypočtěte stopy matic $A, ..., F$.

Řešení:

$$2D - 5F = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 37 \end{pmatrix}$$

Součet $A + 3C$ není definován.

$$C^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2C + 4E^T = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot 3 & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot -1 & 2\cdot 4 + 1\cdot -1 \\ 0\cdot 2 + 3\cdot 3 & 0\cdot 0 + 3\cdot 1 & 0\cdot 1 + 3\cdot(-1) & 0\cdot 4 + 3\cdot(-1) \\ 1\cdot 2 + 0\cdot 3 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) & 1\cdot 4 + 0\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$EC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-2)(-1) \end{pmatrix} = (5)$$

$$CE = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) \\ (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot 0 & (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F^2 - 3D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 46 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Tr}(D) = 2, \mathrm{Tr}(F) = -6$, pro ostatní matice není stopa definována.

Cvičení:

1. Uvažme matice nad $\mathbf{Z}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(α) Které matice můžeme násobit s A zleva a zprava?

(β) Spočtěte (pokud je definováno):

(a) EI

(b) IE

(c) $D^3 + 4DH - H^2$

(d) $G^2 - 3F$

(e) $A - F$

(f) $A - GFA$

(g) $BACE - BFB^T$

2. Uvažme matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte (je-li definováno):

(a) $(4B)C + 2B$

(b) $2A^T + C$

(c) $D^T - E^T$

(d) $(D - E)^T$

(e) $D^T E^T - (ED)^T$

(f) $(AB)C$

(g) $A(BC)$

(h) $\mathrm{Tr}(D)$

(i) $\mathrm{Tr}(D - 3E)$

(j) $4\mathrm{Tr}(7B)$

(k) $\mathrm{Tr}(A)$

(l) $\mathrm{Tr}(DD^T)$

(m) $C^T A^T + 2E^T$

3. Mějme A a B blokové matice:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & | & A_{12} \\ -- & | & -- \\ A_{21} & | & A_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & | & B_{12} \\ -- & | & -- \\ B_{21} & | & B_{22} \end{pmatrix}$$

Jejich součin lze vyjádřit: $AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & | & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ --------- & | & --------- \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & | & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$

za předpokladu, že bloky matic A a B mají vhodné rozměry. Tato metoda se nazývá blokové násobení.

Vynásobte následující matice blokově a výsledek ověřte obyčejným maticovým násobením:

(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & | & 1 & 5 \\ 0 & -3 & | & 4 & 2 \\ -- & -- & | & -- & -- \\ 1 & 5 & | & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 4 \\ -3 & 5 & | & 2 \\ -- & -- & | & -- \\ 7 & -1 & | & 5 \\ 0 & 3 & | & -3 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 5 \\ 0 & -3 & 4 & | & 2 \\ -- & -- & -- & | & -- \\ 1 & 5 & 6 & | & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 4 \\ -3 & 5 & | & 2 \\ -- & -- & | & -- \\ 7 & -1 & | & 5 \\ 0 & 3 & | & -3 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & | & -3 \\ 2 & 1 & 4 & | & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ -- & -- & -- \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

4. Ukažte, že má-li A nulový řádek a B je matice taková, že AB je definován, pak AB obsahuje také nulový řádek.

   Taktéž ukažte, že má-li B nulový sloupec a AB je definován, pak i AB má nulový sloupec.

5. Nechť $E = (e_{ij})$ je matice typu $n \times n$ splňující
   $$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$
   Ukažte, že $AE = EA = A$ pro libovolnou matici A typu $n \times n$.
   E se nazývá jednotková matice.

6. Najdětě matici $A = (a_{ij})$ typu 4×4 splňující následující podmínky:

   (a) $a_{ij} = i + j$

   (b) $a_{ij} = i^{j-1}$

   (c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } |i-j| > 1 \\ -1 & \text{pro } |i-j| \leq 1 \end{cases}$

7. Maticí A tvaru $n \times n$ takovou, že

   (a) $A_{22} = a, A_{ii} = 1$ pro všechna $i \neq 2$ a $A_{ij} = 0$ pro $i \neq j$,

   (b) $A_{13} = A_{22} = A_{31} = A_{ii} = 1$ pro $i \geq 4$ a $A_{ij} = 0$ pro všechny ostatní dvojice ij,

   (c) $A_{13} = a, A_{ii} = 1$ pro všechna i a $A_{ij} = 0$ pro všechny ostatní dvojice ij

   vynásobte obecnou matici $B = (B_{ij})$ tvaru $n \times m$ zleva a obecnou matici $C = (C_{ij})$ tvaru $m \times n$ zprava. Jak se výsledky násobení liší od matice B, resp. C?

8. Najděte matici A typu 2×2 takovou, že zobrazení $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$, je stejnolehlost se středem v $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a koeficientem 3.

9. Najděte matici A typu 2×2 tak, aby $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ -x + y \end{pmatrix}$.

10. Kolik existuje matic A typu 3×3 takových, že platí:

    (a) $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 0 \end{pmatrix}$

    (b) $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

11. Matice B se nazývá odmocninou matice A, jestliže platí $BB = A$.

    (a) Najděte odmocninu matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

    (b) Kolik existuje různých odmocnin matice $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

    (c) Mají všechny matice typu 2×2 odmocninu? Vysvětlete.

12. Nechť O je nulová matice typu 2×2.

    (a) Existují matice A typu 2×2 takové, že $A \neq O$ a $AA = O$? Dokažte.

    (b) Existují matice A typu 2×2 takové, že $A \neq O$ a $AA = A$? Dokažte.

13. Ukažte, že násobení sloupcového vektoru v $\mathbf{R}^2$ maticí $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ reprezentuje otočení v rovině o úhel α. Spočtěte A^2, A^3 (obecně A^k).

14. Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dokažte, že $A^n = \begin{pmatrix} a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{2n} & a_{2n+1} \end{pmatrix}$, kde $\{a_n\}$ je Fibonacciho posloupnost a $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

15. Orientovaný graf G je tvořen množinou vrcholů $V = \{1, 2, ..., n\}$ a množinou hran $H = \{(i,j) : i,j \in V\}$.

    Matice grafu G je definována takto: $a_{ij} = 1$ právě, když $(i,j) \in H$, $a_{ij} = 0$ právě, když $(i,j) \notin H$.

    Cesta délky k je tvořena posloupností čísel $i_1, i_2, ..., i_k, i_{k+1}$ takových, že $(i_1, i_2), (i_2, i_3), ..., (i_k, i_{k+1}) \in H$.

    Určete, jaký je vztah mezi $A^2, A^3, ..., A^k$ a cestami délky $2, 3, ..., k$.

4. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Příklad: Řešte systém rovnic v $\mathbf{R}$ užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Řešení: Rozšířená matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 & | & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -2 & | & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Pomocí EŘO (elementárních řádkových operací) upravujeme na schodovitý tvar. Poslední řádek matice dáme na první místo, potom jeho (-2)-násobek přičteme k původnímu prvnímu řádku, který posuneme na druhé místo, a jeho (-3)-násobek přičteme k původnímu druhému řádku, který posuneme na třetí místo. Tak dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 & | & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & | & -3 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & | & -6 \end{pmatrix}$$

Přičtením (-1)-násobku druhého řádku k třetímu dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 & | & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -3 \end{pmatrix}$$

Už z tohoto tvaru vidíme, že soustava odpovídající poslední matici nemá řešení, jelikož obsahuje rovnici $0 = -3$. Tedy ani původní soustava (přestože obsahuje více neznámých než rovnic) nemá řešení.

Příklad: Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -9 \end{aligned}$$

tří rovnic o třech neznámých nad polem $\mathbf{R}$.

Řešení: Rozšířená matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & | & 1 \\ 3 & 5 & 4 & | & 10 \\ 1 & -2 & 2 & | & -9 \end{pmatrix}.$$

Pomocí EŘO upravujeme na redukovaný schodovitý tvar. Třetí řádek dáme na první místo. Jeho (-1)-násobek přičteme k původnímu prvnímu řádku, který dáme na druhé místo, a jeho (-3)-násobek přičteme k původnímu druhému rádku, který nýní dáme na třetí místo.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & -9 \\ 0 & 11 & -2 & | & 37 \\ 0 & 11 & -2 & | & 37 \end{pmatrix}.$$

(-2)-násobek druhého řádku přičteme k (11)-násobku prvního řádku a jeho (-1)-násobek přičteme ke třetímu řádku. Výsledná matice už je v redukovaném schodovitém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 18 & | & -25 \\ 0 & 11 & -2 & | & 37 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice odpovídá soustavě rovnic

$$\begin{aligned} 11x_1 + 18x_3 &= -25 \\ 11x_2 - 2x_3 &= 37, \end{aligned}$$

která je ekvivalentní s původní soustavou. Proměnnou x_3 si zvolíme za parametr $t \in \mathbf{R}$. Z první rovnice určíme x_1:

$$11x_1 + 18t = -25 \Rightarrow 11x_1 = -25 - 18t \Rightarrow x_1 = \frac{-25 - 18t}{11}.$$

Z druhé rovnice určíme x_2:

$$11x_2 - 2t = 37 \Rightarrow 11x_2 = 37 + 2t \Rightarrow x_2 = \frac{37 + 2t}{11}.$$

Vidíme, že původní soustava (přestože počet rovnic je stejný jako počet neznámých) má nekočně mnoho řešení.

Příklad: Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

čtyř rovnic o čtyřech neznámých nad polem $\mathbf{Z_5}$.

Řešení: Protože se jedná o homogenní soustamu, stačí upravovat její (nerozšířenou) matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(-2)-násobek, tj. 3-násobek prvního řádku přičteme k druhému řádku a jeho (-1)-násobek, tj. 4-násobek přičteme k třetímu řádku. Dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(-1)-násobek, tj. 4-násobek třetího řádku přičteme k prvnímu řádku a jeho (-3)-násobek, tj. 2-násobek přičteme k druhému řádku. Konečně výměnou druhého a třetího řádku dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Třetí řádek odečteme od prvního a od čtvrtého řádku. Dále jej vynásobíme skalárem $3^{-1} = 2$. Potom jeho (-4)-násobek, tj. přímo tento nový třetí řádek přičteme k druhému řádku. Výsledná matice už je v redukovaném schodovitém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proměnnou x_4 si zvolíme za parametr. Všechna řešení soustavy pak mají tvar $x_1 = t, x_2 = 2t, x_3 = 2t, x_4 = t$, kde $t \in \mathbf{Z_5}$. Vidíme, že původní soustava (přestože počet rovnic je stejný jako počet neznámych) má více než jedno řešení; není jich však nekonečně mnoho, ale pouze 5. Právě tolik je totiž možných voleb parametru t, tj. prvků pole $\mathbf{Z_5}$.

Příklad: Uvažujme soustavu lineárních rovnic v neznámých x, y, z:

$$\begin{aligned} x + cy - cz &= -3 \\ x + (c-1)y - (c+3)z &= -5 \\ x + (c+1)y + 2z &= d - 1 \end{aligned}$$

Najděte všechny hodnoty parametrů c, d, pro které má soustava
(a) jediné řešení,
(b) nekonečně mnoho řešení,
(c) žádné řešení.
V případech (a), (b) najděte tato řešení v závislosti na parametrech c, d.

Řešení: Matici soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & -c & -3 \\ 1 & c-1 & -c-3 & -5 \\ 1 & c+1 & 2 & d-1 \end{array}\right)$$

převedeme pomocí Gaussovy eliminace na schodovitý tvar. První řádek opíšeme, k (-1)-násobku druhého řádku přičteme první řádek, ke třetímu řádku pričteme (-1)-násobek prvního řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & -c & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2+c & d+2 \end{array}\right)$$

Nyní první a druhý řádek opíšeme a ke třetímu řádku přičteme (-1)-násobek druhého řádku. Získáme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & -c & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & c-1 & d \end{array}\right),$$

ze které určíme, že
(a) soustava má jediné řešení pro $c \neq 1$, a to:

$$x = \frac{4cd - c - 2c^2 + 3}{c-1},\ y = \frac{2c - 2 - 3d}{c-1},\ z = \frac{d}{c-1};$$

(b) pro $c = 1, d = 0$ doplníme hodnoty parametrů do upravené matice soustavy, z níž již lehce určíme, že soustava má nekonečně mnoho řešení, která jsou tvaru

$$x = -5 + 4p,\ y = 2 - 3p,\ z = p,$$

kde $p \in \mathbf{R}$ je parametr;
(c) pro $c = 1, d \neq 0$ soustava obsahuje rovnici $0 = d$, v tomto případě tedy nemá řešení.

Cvičení:

1. Řešte soustavu rovnic v $\mathbf{R}$ a $\mathbf{Z_5}$ užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

2. Řešte soustavu rovnic v $\mathbf{R}, \mathbf{Z_5}$ a $\mathbf{Z_7}$ užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6 \end{aligned}$$

3. Řešte soustavu rovnic v $\mathbf{R}$ užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 17x_3 - 29x_4 - 36x_5 &= 22 \\ 2x_1 - 3x_2 + 18x_3 - 27x_4 + 33x_5 &= 21 \\ 12x_1 - 18x_2 + 102x_3 - 174x_4 - 216x_5 &= 132 \\ 2x_1 - 3x_2 + 21x_3 - 24x_4 - 30x_5 &= 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 24x_3 - 21x_4 - 27x_5 &= 19 \end{aligned}$$

Soustavu řešte také jako homogenní.

4. Řešte soustavu rovnic v $\mathbf{C}$ užitím Gaussovy eliminace.
(a)

$$\begin{aligned} x + 2iy &= 5 + 4i \\ (3-i)y + (6-2i)z &= 10 \\ 2x - z &= 5 + 3i \\ x + y + z &= 5 + 2i \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (1+i)x + 3iy &= -i \\ (1+2i)x + (1-i)y &= 6 + i \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (1+i)x + (1-i)y &= 6 + 4i \\ ix + (1+2i)y &= -3 + 5i \end{aligned}$$

5. Řešte soustavu rovnic v $\mathbf{R}$ užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$

6. Řešte soustavu rovnic v $\mathbf{R}$ užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 &= 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

7. Řešte soustavu rovnic v $\mathbf{R}$ užitím Gaussovy eliminace.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

8. Řešte následující systém rovnic, kde a, b, c jsou konstanty.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 + 2x_3 &= b \\ 3x_2 + 3x_3 &= c \end{aligned}$$

9. Řešte následující systém rovnic.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 9 \\ x_1 - 2x_3 + 7x_4 &= 11 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 10 \end{aligned}$$

10. Řešte následující systém rovnic.

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 2 \\ -10x_1 + 15x_2 - 11x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Soustavu řešte také jako homogenní.

11. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a a b má soustava v $\mathbf{R}$
(i) právě jedno řešení,
(ii) více než jedno řešení,
(iii) žádné řešení.
(a)

$$\begin{aligned} ax + y - 2z &= 1 \\ x - y + z &= 0 \\ (1+a)y - z &= b \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x - ay - 2z &= b \\ x + (1-a)y &= b - 3 \\ x + (1-a)y + az &= 2b - 1 \end{aligned}$$

12. Zjistěte, pro které hodnoty parametrů a a b má soustava v $\mathbf{Z_5}$
(i) právě jedno řešení,
(ii) více než jedno řešení,
(iii) žádné řešení.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 3x + 4y + az &= 2 \\ 3x + 4az &= b \end{aligned}$$

13. V $\mathbf{Z_5}$ řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x + 3z &= 0 \\ 4x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Napište výčtem všechny prvky množiny řešení.

14. V $\mathbf{Z_5}$ řešte následující systém rovnic v závislosti na parametrech a a b.

$$\begin{aligned} ax + y &= b \\ ay + z &= 2b \\ x + az &= 4 \end{aligned}$$

15. Určete parametry a, b, c tak, aby následující systém měl právě jedno řešení.

$$\begin{gathered} ax + by = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{gathered}$$

16. Řešte soustavu rovnic v závislosti na parametrech a, b.

$$\begin{gathered} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{gathered}$$

5. INVERZNÍ MATICE

Řekneme, že matice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{K})$ má inverzní matici, jetliže existuje matice $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{K})$ taková, že

$$AB = BA = E.$$

Ke každé matici existuje nejvýše jedna inverzní matice. Značíme ji A^{-1}. Matici, která má matici inverzní, nazýváme regulární maticí.

Metoda výpočtu inverzní matice spočívá v použití EŘO. Nechť A je matice typu $n \times n$. Vytvoříme blokovou matici B tak, že zapíšeme A a jednotkovou matici E vedle sebe – A nalevo, E napravo:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

Matici B upravujeme nejdříve na schodovitý tvar. Pokud je ve schodovitém tvaru v levém bloku řádek ze samých nul, inverzní matice k A neexistuje. Pokud tento případ nenastane, pokračujeme v řádkových úpravách tak, abychom v levém bloku dostali jednotkovou matici. (Tento postup se nazývá zpětmá Gaussova eliminace.) V pravém bloku je potom A^{-1}.

Příklad: Najděte inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení: Vytvoříme blokovou matici tak, že A napíšeme nalevo, E napravo a upravujeme pomocí EŘO na schodovitý tvar (přímou Gaussovou eliminací).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Ze schodovitého tvaru vidíme, že A^{-1} existuje. Matici tedy dále upravujeme na redukovaný schodovitý tvar (zpětnou Gaussovou eliminací).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Tedy $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Správnost výpočtu ověříme vynásobením A s A^{-1}.

Příklad: Najděte inverzní matici k matici $C = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

Řešení: Napíšeme blokovou matici nalevo s maticí C, napravo s jednotkovou maticí a upravujeme na redukovaný schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} i & -2 & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 & 1 \end{array}\right)$$

První řádek vynásobíme $-i$, od druhého řádku odečteme nový první řádek.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2i & -i & 0 \\ 0 & -i & i & 1 \end{array}\right)$$

K prvnímu řádku přičteme dvojnásobek druhého řádku, druhý řádek vynásobíme i.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & i & 2 \\ 0 & 1 & -1 & i \end{array}\right)$$

Tedy $C^{-1} = \begin{pmatrix} i & 2 \\ -1 & i \end{pmatrix}$

Cvičení:

1. Vypočtěte inverzní matice k daným maticím.
$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$,
$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Mějme matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Najděte jejich inverze.
   (b) Ukažte, že
      i. $(A^{-1})^{-1} = A$
      ii. $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$
      iii. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
      iv. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

3. Najděte inverzní matice k daným maticím.

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \ddots & 2-n & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2-n \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Najděte inverzní matice k následujícím maticím v $\mathbf{C}$.
$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 2-3i & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$,
$E = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. VEKTOROVÉ PODPROSTORY, LINEÁRNÍ ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST, LINEÁRNÍ OBALY

6.1 VEKTOROVÉ PODPROSTORY

Množima $S \subseteq \mathbf{V}$ se nazývá lineární podprostor vektorového prostoru $\mathbf{V}$, jestliže $S \neq \emptyset$ a pro všechny skaláry $a \in \mathbf{K}$ a vektory $x, y \in S$ platí
(1) $x + y \in S$
(2) $ax \in S$
Tzn. neprázdná množina $S \subseteq \mathbf{V}$ je lineární podprostor právě tehdy, když je uzavřená vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem.

Příklad: Určete, zda množina $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}; x \geq 0, y \geq 0\}$ tvoří vektorový podprostor v $\mathbf{R}^2$.

Řešení: Pokud M tvoří vektorový podprostor, musí splňovat výše uvedené podmínky. Ověříme nejprve uzavřenost množiny M vzhledem k operaci sčítání vektorů. Jestliže vektor $x = (x_1, x_2) \geq 0$ (zápis $(x_1, x_2) \geq 0$ znamená $x_1 \geq 0$ a $x_2 \geq 0$) a vektor $y = (y_1, y_2) \geq 0$, pak i jejich součet $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \geq 0$.

Nyní ověříme uzavřenost množiny M vzhledem k operaci násobení skalárem. Nechť $a \in \mathbf{R}$. Pak $a(x, y) = (ax, ay)$. Pro $a \geq 0$ je podmínka splněna, ale pro a záporné je $(ax, ay) < 0$. Tedy M netvoří vektorový podprostor.

Cvičení:

1. Zjistěte, zda daná množina tvoří vektorový podprostor v $\mathbf{R}^2$.
   (a) $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x \cdot y \geq 0\}$
   (b) $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x = y + 1\}$

2. Určete, které z následujících množin tvoří vektorové podprostory v $\mathbf{R}^3$.
   (a) $N = \{(a, 1, 1) \in \mathbf{R}^3\}$
   (b) $N = \{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3; b = a + c\}$

3. Určete, které z následujících množin tvoří vektorové podprostory v $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{K})$.
   (a) $M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbf{K}); a + b + c + d = 0\}$
   (b) $M = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{K}); \mathrm{Tr}(A) = 0\}$

4. Určete, které z následujících množin jsou vektorové podprostory v $\mathbf{R}_3[x]$.
   (a) $P = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3; a_0 = 0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}\}$
   (b) $P = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{Z}\}$

6.2 LINEÁRNÍ ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST, LINEÁRNÍ OBALY

Nechť $u_1, ..., u_n \in \mathbf{V}, a_1, ..., a_n \in \mathbf{K}$. Vektor $u = a_1u_1 + ... + a_nu_n$ se nazývá lineární kombinací vektorů $u_1, ..., u_n$ s koeficienty $a_1, ..., a_n$.

Řekneme, že vektory $u_1, ..., u_n$ jsou
– lineárně nezávislé, jestliže pro libovolné koeficienty $a_1, ..., a_n \in \mathbf{K}$ platí

$$a_1u_1 + ... + a_nu_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n = 0,$$

– lineárně závislé, jestliže nejsou lineárně nezávislé. Tzn. existuje-li jejich lineární kombinace s alespoň jedním nenulovým koeficientem rovnající se nulovému vektoru.

Nechť $M = \{u_1, ..., u_k\} \neq \emptyset$ je konečná podmnožina $\mathbf{V}$. Množina $\{a_1u_1 + ... + a_ku_k;\ a_1, ..., a_k \in \mathbf{K}\}$ všech konečných lineárních kombinací vektorů $u_1, ..., u_k$ se nazývá lineární obal množiny M, ozn. $[M]$. Jestliže $M = \emptyset$, potom $[\emptyset] = \{0\}$.

Příklad: Zjistěte, zda jsou vektory $v_1 = (1, -1, 0, 2)^T$, $v_2 = (2, 2, -1, 3)^T$, $v_3 = (0, 1, 1, 0)^T$, $v_4 = (3, 2, 0, 5)^T$ lineárně závislé v $\mathbf{R}^4$ nad $\mathbf{R}$. Určete jejich lineární obal.

Řešení: Vektory v_1, v_2, v_3, v_4 jsou lineárně nezávislé, právě když rovnice v neznámých a_1, a_2, a_3, a_4

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0$$

má právě jedno řešení, a to $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Porovnáním souřadnic můžeme tuto rovnici psát jako soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 + 3a_4 &= 0 \\ -a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 &= 0 \\ -a_2 + a_3 &= 0 \\ 2a_1 + 3a_2 + 5a_4 &= 0 \end{aligned}$$

Nyní napíšeme matici soustavy a soustavu řešíme Gaussovou eliminací.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soustava má více řešení, tzn. že vektory jsou lineárně závislé. Vedoucí prvky řádků výsledné matice jsou v prvním, druhém a třetím sloupci, tedy tyto tři vektory (sloupce) jsou lineárně nezávislé. Protože výsledná a původní matice jsou řádkově ekvivalentní, pořadí vektorů ve výsledné matici odpovídá pořadí vektorů v matici původní. Hledané lineárně nezávislé vektory jsou tedy první, druhý a třetí sloupec původní matice, tzn. vektory v_1, v_2, v_3.

Nyní se ptáme, zda je vektor v_4 lineární kombinací vektorů v_1, v_2, v_3, neboli zda v_4 patří do lineárního obalu tvořeného vektory v_1, v_2, v_3. Pokud ano, existují koeficienty c_1, c_2, c_3 splňující rovnici

$$c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = v_4.$$

Matici této soustavy opět převedeme na schodovitý tvar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ -1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 2 & 3 & 0 & | & 5 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 4 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Soustava má řešení, tj. vektor v_4 je lineární kombinací vektorů v_1, v_2, v_3, tedy $v_4 \in [v_1, v_2, v_3]$.

Všimněte si, že poslední řádkové úpravy jsou stejné jako úpravy, při nichž jsme zjišťovali, zda jsou v_1, v_2, v_3, v_4 lineárně závislé.

Příklad: Zjistěte, zda jsou polynomy $1 + x, 1 - x, 2 + x - x^2$ lineárně závislé v $\mathbf{R}_2[x]$.

Řešení: Pokud jsou dané polynomy lineárně nezávislé, musí být rovnice $a_1(1+x)+a_2(1-x) + a_3(2 + x - x^2) = 0$ splněna pouze pro koeficienty $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Předpokládejme tedy jejich nezávislost. Pak platí

$$a_1(1 + x) + a_2(1 - x) + a_3(2 + x - x^2) = 0$$

Roznásobením závorek dostaneme rovnici

$$a_1 + a_1x + a_2 - a_2x + 2a_3 + a_3x - a_3x^2 = 0$$

a následným sečtením koeficientů u stejných mocnin x získáme rovnici

$$(a_1 + a_2 + 2a_3) + (a_1 - a_2 + a_3)x + (-a_3)x^2 = 0$$

Z poslední rovnice plyne, že koeficienty u mocnin $x^0 = 1, x^1 = x, x^2$ musí být rovny nule:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + 2a_3 &= 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 &= 0 \\ -a_3 &= 0 \end{aligned}$$

Řešíme danou soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Soustava má jediné řešení. Tedy polynomy $1 + x, 1 - x, 2 + x - x^2$ jsou lineárně nezávislé.

Příklad: Nechť v_1, v_2, v_3 jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$. Potom $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_2 + v_3$ jsou rovněž lineárně nezávislé. Dokažte.

Řešení: Nechť
$$a_1(v_1 - v_2) + a_2(v_2 - v_3) + a_3(v_2 + v_3) = 0$$
Úpravou dostáváme
$$a_1v_1 - a_1v_2 + a_2v_2 - a_2v_3 + a_3v_3 + a_3v_2 = 0$$
a dále
$$a_1v_1 + (-a_1 + a_2 + a_3)v_2 + (-a_2 + a_3)v_3 = 0$$
Z nezávislosti vektorů v_1, v_2, v_3 plyne
$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ -a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ -a_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$
Řešíme danou soustavu
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
Řešením soustavy dostáváme $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Tedy vektory $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_2 + v_3$ jsou lineárně nezávislé.

Cvičení:

1. Zjistěte, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé následující vektory v $\mathbf{R}^n$. Určete jejich lineární obal.
   (a) $u_1 = (1, 0, 2), u_2 = (2, 0, 1), u_3 = (1, 2, 0)$
   (b) $u_1 = (-3, 0, 4), u_2 = (3, 2, 5), u_3 = (6, -1, 1)$
   (c) $u_1 = (1, -\sqrt{2}, -1), u_2 = (1 - \sqrt{2}, 2, 1 + \sqrt{2}), u_3 = (\sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2})$
   (d) $u_1 = (-1, -1, 1, 1), u_2 = (1, -1, 1, -1), u_3 = (-1, 1, 1, -1), u_4 = (1, 1, 1, 1)$
   (e) $u_1 = (3, 8, 7, -3), u_2 = (1, 5, 3, -1), u_3 = (2, -1, 2, 6), u_4 = (1, 4, 0, 3)$
   (f) $u_1 = (1, 0, -2, 3), u_2 = (-1, 3, 0, 0), u_3 = (2, 0, 1, 1), u_4 = (1, 6, -1, 4)$

2. Z následujících vektorů vyberte maximální podmnožinu lineárně nezávislých vektorů
   (a) $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (2, 5, 4), v_3 = (3, 6, 1), v_4 = (1, -1, 0), v_5 = (1, 1, 5)$
   (b) $v_1 = (1, 0, 2, 4), v_2 = (2, 3, -1, 0), v_3 = (3, 3, 1, 4), v_4 = (1, 1, 1, 1), v_5 = (2, 2, 0, 3),$
   $v_6 = (1, 0, 0, 0)$

3. Zjistěte, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé následující polynomy v $\mathbf{R}_n[x]$.

   (a) $1 - x, x - x^2, x^2 - x^3, x^3 - 1$

   (b) $1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3 + 1$

   (c) $2 - x + 4x^2, 3 + 6x + 2x^2, 2 + 10x - 4x^2$

   (d) $1 + 3x + 3x^2, x + 4x^2, 5 + 6x + 3x^2, 7 + 2x - x^2$

4. Zjistěte, zda vektor $x = (7, 2, -2)$ patří do lineárního obalu množiny vektorů

   (a) $\{(1, 0, -1), (2, 1, 0), (0, 1, 2), (1, 1, 1), (5, 2, -1)\}$

   (b) $\{(2, 1, -1), (-2, 1, -1), (1, 0, 0), (4, 7, -7)\}$

5. Je dána množina $M = \{1 + 2x - x^2, 2 - x + x^2, 5 + x^2\}$ polynomů v $\mathbf{R}_2[x]$. Zjistěte, zda polynom

   (a) $-6 - 2x$

   (b) $1 + x + x^2$

   patří do lineárního obalu množiny M.

6. Nechť u, v, w, z jsou lineárně nezávislé vektory vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Zjistěte, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé vektory

   (a) $u + v, u - v, u + v + w$

   (b) $u - v, v - w, w - u$

   (c) $u + v + w, v + w + z, w + z + u, z + u + v$

7. BÁZE A DIMENZE VEKTOROVÉHO PROSTORU, SOUŘADNICE, SOUČTY A PRŮNIKY PODPROSTORŮ

Vektorový prostor $\mathbf{V}$ je konečněrozměrný, jestliže v něm existuje konečná podmnožina $\{u_1, ..., u_n\}$ taková, že každý vektor $u \in \mathbf{V}$ je lineární kombinací vektorů $u_1, ..., u_n$. Báze konečnědimenzionálního prostoru $\mathbf{V}$ je množina $\{u_1, ..., u_n\}$ taková, že
(1) každý vektor $u \in \mathbf{V}$ je lineární kombinací $\{u_1, ..., u_n\}$,
(2) vektory $u_1, ..., u_n$ jsou lineárně nezávislé.
Tyto dvě vlastnosti jsou ekvivalentní s tím, že každý vektor $u \in \mathbf{V}$ lze psát ve tvaru

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \tag{1}$$

právě jedním způsobem.

Je-li $\mathbf{V}$ konečněrozměrný, mají všechny jeho báze stejný počet prvků. Dimenze konečněrozměrného vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je číslo $\dim \mathbf{V}$ udávající počet prvků nějaké jeho báze.

Nechť $\alpha = \{u_1, ..., u_n\}$ je báze prostoru $\mathbf{V}$ a $u \in \mathbf{V}$. Potom u lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru (1).

Sloupcový vektor

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

nazýváme sloupcem souřadnic a skaláry $x_1, ..., x_n$ souřadnicemi vektoru u v uspořádané bázi α.

Označme $e_i \in \mathbf{K}^n$ vektor skládající se ze samých nul, kromě i-té složky, která je 1. Potom $\varepsilon = (e_1, ..., e_n)$ je báze vektorového prostoru $\mathbf{K}^n$. Nazýváme ji standardní nebo také kanonickou bazí tohoto prostoru.

Pro libovolný vektor $x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbf{K}^n$ platí

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,$$

proto $(x)_\varepsilon = x$, tj. každý vektor $x \in \mathbf{V}$ splývá se svými vlastními souřadnicemi ve standardní bázi.

Nechť S, T jsou podprostory vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Množina

$$S + T = \{x + y; x \in S, y \in T\}$$

je opět podprostor vektorového prostoru $\mathbf{V}$, nazývá se součet podprostorů S a T. Jestliže $S \cap T = \emptyset$, součet $S + T$ se nazývá přímý.

Nechť $\mathbf{V}$ je konečněrozměrný vektorový prostor. Potom platí

$$\dim S + \dim T = \dim(S+T) + \dim(S \cap T)$$

Příklad: Najděte nějakou bázi a určete dimenzi lineárního obalu množiny M ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$.
(a) $\mathbf{V} = \mathbf{R^4}$, $M = \{(1,2,3,4), (-2,-3,-4,-5), (3,4,5,6), (-4,-5,-6,-7), (5,6,7,8)\}$,
(b) $\mathbf{V} = \mathbf{R_3}[x]$, $M = \{1+x+x^3, 1-x, 2x-x^2, 2-x^2, 2x+x^2+x^3\}$.

Řešení: (a) Souřadnice vektorů množiny M ve standardní bázi $\mathbf{R^4}$ zapíšeme do sloupců matice, kterou upravíme řádkovými úpravami na schodovitý tvar, z něhož určíme lineárně nezávislé vektory.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 3 & -4 & 5 & -6 & 7 \\ 4 & -5 & 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 3 & -6 & 9 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Třetí, čtvrtý a pátý vektor jsou lineární kombinací prvních dvou vektorů, které jsou lineárně nezávislé a tvoří tedy bázi množiny M. Tzn. $\alpha_M = \{(1,2,3,4), (-2,-3,-4,-5)\}$, $\dim[M] = 2$.

(b) Souřadnice polynomů množiny M ve standardní bázi prostoru $\mathbf{R_3}[x]$, tj. v bázi $(1, x, x^2, x^3)$, zapíšeme do sloupců matice a provádíme řádkové úpravy.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V tomto případě jsou lineárně nezávislé první tři vektory, tedy $\alpha_M = \{\{1+x+x^3, 1-x, 2x-x^2\}$, $\dim[M] = 3$.

Příklad: Doplňte množinu $M = \{(-1,1,0,0), (0,-1,1,0), (0,0,-1,1)\}$ na bázi $\mathbf{R^4}$.

Řešení: Jsou-li vektory množiny M lineárně nezávislé, lze ji doplnit na bázi celého $\mathbf{R^4}$ a to výběrem z nějaké generující množiny v $\mathbf{R^4}$. K daným vektorům tedy doplníme další vektory (nejlépe vektory tvořící standardní bázi $\mathbf{R^4}$) a pomocí Gaussovy eliminace vybereme bázi $\mathbf{R^4}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Vidíme, že vektory množiny M jsou lineárně nezávislé a že doplněním kteréhokoliv z přidaných vektorů k M získáme bázi $\mathbf{R^4}$.

Příklad: Najděte souřadnice vektoru v v bázi α vektorového prostoru $\mathbf{V}$:
(a) $\mathbf{V} = \mathbf{R^3}, v = (1,2,3), \alpha = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$,
(b) $\mathbf{V} = \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R}), \mathrm{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

Řešení: Vektor v vyjádříme jako lineární kombinaci prvků báze α. Výpočet souřadnic pak převedeme na řešení systému lineárních rovnic, který má vždy jediné řešení, neboť α je báze $\mathbf{V}$.

(a) Nechť

$$(1,2,3) = a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1)$$

Potom

$$(1,2,3) = (a+b, a+c, b+c)$$

Porovnáním získáme systém

$$\begin{aligned} a+b &= 1 \\ a+c &= 2 \\ b+c &= 3 \end{aligned}$$

Rozšířenou matici systému upravíme na redukovaný schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Řešením systému je $a = 0, b = 1, c = 2$, tedy

$$(v)_\alpha = (0,1,2)^T$$

(b) Postupujeme analogicky jako v (a):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Úpravou dostáváme systém

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 1 \\ b+c+d &= 2 \\ c+d &= 3 \\ d &= 4 \end{aligned}$$

jehož řešením je $a = -1, b = -1, c = -1, d = 4$. Potom

$$(v)_\alpha = (-1, -1, -1, 4)^T$$

Příklad: Nechť $P_1 = [M_1], P_2 = [M_2]$ v $\mathbf{R^4}$, kde

$$\begin{aligned} M_1 &= \{u_1 = (4, 0, -2, 6), u_2 = (2, 1, -2, 3), u_3 = (3, 1, -2, 4)\} \\ M_2 &= \{v_1 = (1, -1, 0, 2), v_2 = (2, 2, -1, 3), v_3 = (0, 1, 1, 0)\} \end{aligned}$$

Najděte $P_1 + P_2, P_1 \cap P_2$, jejich báze a dimenze.

Řešení: Protože $P_1 + P_2 = \{x + y; x \in P_1, y \in P_2\}$, platí $P_1 + P_2 = [M_1 \cup M_2]$. Pomocí EŘO určíme bázi $[M_1 \cup M_2]$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že vektory u_1, u_2, u_3, v_2 jsou lineárně nezávislé, tedy $P_1 + P_2 = [u_1, u_2, u_3, v_2] = \mathbf{R^4}, \dim(P_1 + P_2) = 4$.

Nyní nechť $x \in P_1 \cap P_2$. Potom platí:

$$\begin{aligned} x &= a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 \in P_1 \\ x &= b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 \in P_2 \end{aligned}$$

Tedy

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 - b_1v_1 - b_2v_2 - b_3v_3 = 0$$

Soustavu přepíšeme do matice soustavy, pomocí EŘO upravíme na schodovitý tvat a určíme koeficienty $a_1, ..., b_3$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Tedy $a_1 = r, a_2 = -p, a_3 = -r, b_1 = r, b_2 = -p, b_3 = p$, kde $p, r \in \mathbf{R}$ jsou parametry. Podle předchozího to znamená:

$P_1 \cap P_2 = \{x = ru_1 - pu_2 - ru_3; p, r \in \mathbf{R}\} = \{x = r(u_1 - u_3) - pu_2; p, r \in \mathbf{R}\} = \{x = r(1, -1, 0, 2) + p(-2, -1, 2, -3); p, r \in \mathbf{R}\} = [(1, -1, 0, 2), (-2, -1, 2, -3)]$
Tentýž výsledek dostaneme s použitím vektorů v_1, v_2, v_3 :
$P_1 \cap P_2 = \{x = rv_1 - pv_2 + pv_3; p, r \in \mathbf{R}\} = \{x = rv_1 + p(v_3 - v_2); p, r \in \mathbf{R}\} = \{x = r(1, -1, 0, 2) + p(-2, -1, 2, -3); p, r \in \mathbf{R}\} = [(1, -1, 0, 2), (-2, -1, 2, -3)]$
$\dim(P_1 \cap P_2) = 2$

Cvičení:

1. Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru $\mathbf{V}$:
   (a) $M = \{(1, -2, 0, 0), (2, 1, 1, 3), (0, 1, 0, 1)\}, \mathbf{V} = \mathbf{R^4}$
   (b) $M = \{1 - x, 1 + x + x^2, x^2 - x^3\}, \mathbf{V} = \mathbf{R_3}[x]$
   (c) $M = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\right\}, \mathbf{V} = \mathrm{Mat}_2\mathbf{R}$
2. Který z vektorů u_1, u_2, u_3, u_4 doplňuje množinu α na bázi prostoru $\mathbf{R^4}$?
   (a) $\alpha = ((1, -2, 1, -1), (1, 0, -1, -1), (1, 1, -2, 0))$,
   $u_1 = (-1, 2, -1, 1), u_2 = (3, -1, -2, -1), u_3 = (2, 1, 0, -2), u_4 = (2, 1, -3, -2)$
   (b) $\alpha = ((1, 3, 0, -1), (1, 0, 0, -1), (0, 2, 1, 0))$,
   $u_1 = (-1, 1, -1, 1), u_2 = (3, -1, 0, -3), u_3 = (2, 1, 0, -2), u_4 = (1, -2, 0, -1)$
3. Najděte bázi a určete dimenzi lineárního obalu množiny M:
   (a) $M = \{(1, 2, 3), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$
   (b) $M = \{2x - 1, x^3 + x + 1, x^2 + x, 2x^2 + 1, x^3 + 3x^2 + 2x + 2\}$
   (c) $M = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$
4. Najděte nějakou bázi vektorového prostoru $M = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R^n}; x_1 + \cdots + x_n = 0\}$, doplňte ji na bázi celého $\mathbf{R^n}$ a určete $\dim M$.
5. Určete dimenzi podprostoru P vektorového prostoru $\mathbf{R_n}[x]$:
   (a) $P = \{f \in \mathbf{R_n}[x]; f(0) = 0\}$
   (b) $P = \{f \in \mathbf{R_n}[x]; f(0) = f(1) = 0\}$
6. Nechť
   $P_1 = \{f \in \mathbf{R_5}[x]; f(x) = f(-x)\}$
   $P_2 = \{f \in \mathbf{R_5}[x]; f(x) = -f(-x)\}$
   $P_3 = \{f \in \mathbf{R_5}[x]; f(1) = f(2) = 0\}$
   jsou podprostory v $\mathbf{R_5}[x]$.
   (a) najděte jejich báze,

(b) určete $P_1 \cap P_3$,

(c) určete $P_2 + P_3$,

(d) ukažte, že součet $P_1 + P_2$ je přímý.

7. Uvažujme vektorový prostor $\mathrm{Mat}_2(\mathbf{R})$ reálných matic typu 2×2 a jeho podmnožimu P všech matic $A = (a_{ij})$ takových, že $a_{11} + a_{22} = 0$.

   (a) Dokažte, že P je vektorový podprostor.

   (b) Napište nějakou bázi podprostoru P.

   (c) Doplňte tuto bázi na bázi prostoru $\mathrm{Mat}_2(\mathbf{R})$ a v této bázi napište souřadnice jednotkové matice.

8. Nechť vektory v_1, v_2, v_3 tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Ukažte, že vektory $u_1 = v_1, u_2 = v_1 + v_2, u_3 = v_1 + v_2 + v_3$ také tvoří bázi $\mathbf{V}$.

9. Najděte souřadnice vektoru v v bázi α vektorového prostoru $\mathbf{V}$.

   (a) $v = (2,1,1), \alpha = ((2,7,3),(3,9,4),(1,5,3)), \mathbf{V} = \mathbf{R^3}$

   (b) $v = (2,1,1), \alpha = ((1,0,1),(1,0,0),(1,1,1)), \mathbf{V} = \mathbf{R^3}$

   (c) $v = (0,0,2,7), \alpha = ((4,2,-1,-6),(3,1,1,-2),(1,2,1,1),(2,3,1,0)), \mathbf{V} = \mathbf{R^4}$

   (d) $v = (1,1,1,1), \alpha = ((0,0,0,-5),(1,2,3,1),(1,0,-1,0),(0,1,1,0)), \mathbf{V} = \mathbf{R^4}$

   (e) $v = 4 - 4x - 2x^3, \alpha = (1 - x^2, 1 + x, 1 - x), \mathbf{V} = \mathbf{R_2}[x]$

   (f) $v = x^3 + x^2 + x + 1, \alpha = (1 + x^3, x + x^3, x^2 + x^3, x^3), \mathbf{V} = \mathbf{R_3}[x]$

   (g) $v = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathbf{V} = \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R})$.

   (h) $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$
   $\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \mathbf{V} = \mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbf{R})$.

10. Souřadnice vektoru u v bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ jsou $(a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Jaké jsou jeho souřadnice v bázi $\beta = (u_1 + u_4, u_2 + u_3, u_3, u_4)$? Zdůvodněte.

11. Nechť $P_1 = [M_1], P_2 = [M_2]$ ve vektorovém prostoru $\mathbf{R^3}$, resp. $\mathbf{R^4}$. Najděte nějakou bázi a určete dimenzi podprostorů $P_1 + P_2, P_1 \cap P_2$.

    (a) $M_1 = \{(1,2,-1),(-1,0,2),(2,-1,0),(1,1,1)\}$
    $M_2 = \{(0,2,1),(1,4,0)\}$

    (b) $M_1 = \{(1,1,1),(1,2,3),(-1,0,1)\}$
    $M_2 = \{(2,0,3),(3,1,5),(1,3,3)\}$

    (c) $M_1 = \{(1,-1,0,1),(1,2,0,3),(3,0,0,5)\}$
    $M_2 = \{(0,-1,1,4),(0,2,3,2),(0,0,1,2)\}$

(d) $M_1 = \{(1,1,1,1),(1,1,-1,-1),(1,-1,1,-1)\}$
$M_2 = \{(1,-1,-1,1),(1,-1,0,0),(3,-1,1,1)\}$

12. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R^4}$ najděte průnik podprostorů V_1 a V_2, kde $V_1 = [(1,1,1,1),(1,0,1,0)], V_2 = [(1,1,0,0),(0,1,1,1),(0,1,1,0)]$.
Spočtěte průnik součtu $V_1 + V_2$ s podprostorem generovaným vektorem $v = (1,-2,3,-4)$.

13. V prostoru polynomů $\mathbf{R_6}[x]$ uvažte podprostory $V_1 = [x^2 + 2x^3, -x^3 + x^6], V_2 = [2 + x^2, -1 + x^6, x^2 + x^3 + 2x^4], V_3 = [x^2 + x^6, 1 + 3x^3 + x^5, x^3]$. Spočtěte jejich součet a průnik.

14. Nechť V je reálný vektorový prostor, $v_1, ..., v_n \in V$. Označme

$$S = \{(c_1, ..., c_n) \in \mathbf{R^n}; c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0\}.$$

Dokažte následující tvrzení:

(a) S je lineární podprostor vektorového prostoru $\mathbf{R^n}$.

(b) Vektory $v_1, ..., v_n$ jsou lineárně nezávislé, právě když $\dim S = 0$.

8. LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Nechť $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ jsou vektorové prostory nad tímtéž polem $\mathbf{K}$. Zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ se nazývá lineární, jestliže f zachovává operace vektorového součtu a skalárního násobku, tj.
(1) $\forall x, y \in \mathbf{U} : f(x+y) = f(x) + f(y)$
(2) $\forall a \in \mathbf{K}, \forall x \in \mathbf{U} : f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$

Jestliže $\mathbf{U}$=$\mathbf{V}$, lineární zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ se nazývá endomorfismus vektorového prostoru $\mathbf{U}$.

Nechť $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ jsou vektorové prostory, $\{u_1, ..., u_n\}$ je báze $\mathbf{U}$ a $v_1, ..., v_n$ jsou vektory ve $\mathbf{V}$. Potom existuje jediné lineární zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ takové, že $f(u_i) = v_i, i = 1, 2, ..., n$. Zobrazení f je dané předpisem

$$f(a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n) = a_1f(u_1) + a_2f(u_2) + ... + a_nf(u_n) = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$

Nechť $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je lineární zobrazení. Podmnožina

$$\mathrm{Ker} f = \{x \in \mathbf{U}; f(x) = 0\}$$

vektorového prostoru $\mathbf{U}$ se nazývá jádro, podmnožina

$$\mathrm{Im} f = \{y \in \mathbf{V}; y = f(x), x \in \mathbf{U}\}$$

se nazývá obraz lineárního zobrazení f.

Množina $\mathrm{Ker} f$ je podprostor vektorového prostoru $\mathbf{U}$, množina $\mathrm{Im} f$ je podprostor vektorového prostoru $\mathbf{V}$.

Lineární zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je isomorfismus právě tehdy, když $\mathrm{Ker} f = \{0\}, \mathrm{Im} f = \mathbf{V}$.

Příklad: Zjistěte, zda je zobrazení $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$ lineární. Jestliže je, najděte $\mathrm{Ker} f, \mathrm{Im} f$.
(a) $f(x) = (1 + x_1, x_2)$,
(b) $f(x) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3)$,
(c) $f(x) = (1, 2)$,
(d) $f(x) = ({x_1}^2, -2x_2)$.

Řešení: V případech (a) a (c) není obrazem nulového vektoru nulový vektor, zobrazení f tedy není lineární. Ukážeme, že f není lineární ani v případě (d). Nechť $a = -1, x = (1, 0, 0)$. Potom

$$f(ax) = f(-1, 0, 0) = (1, 0) \neq (-1, 0) = (-1)f(1, 0, 0) = af(x)$$

a první z podmínek lineárního zobrazení není splněna.

Zobrazení f je v případě (b) lineární, protože pro libovolné $x, y \in \mathbf{R^3}$ a pro libovolné $a, b \in \mathbf{R}$ platí:

$$\begin{aligned} f(ax+by) &= f(ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3) = \\ &= (ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2, ax_1 + by_1 - (ax_3 + by_3)) = \\ &= (ax_1 + ax_2, ax_1 - ax_3) + (by_1 + by_2, by_1 - by_3) = \\ &= af(x) + bf(y) \end{aligned}$$

Určíme Ker$f$: Nechť $f(x) = 0$. Potom $x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_3 = 0$, úpravou dostáváme $x_2 = -x_1, x_3 = x_1$. Zvolíme-li $x_1 = t$, pak

$$\mathrm{Ker}f = \{(t, -t, t); t \in \mathbf{R}\}$$

Určíme Imf: Obrazy vektorů standardní báze ε_3 ve zobrazení f jsou vektory $(1,1), (1,0), (0,-1)$. Podprostor Imf je lineárním obalem těchto vektorů, tj.

$$\mathrm{Im}f = [(1,1), (1,0), (0,-1)] = [(1,0), (0,1)] = \mathbf{R^2}$$

.

Příklad: Ukažte, že násobení maticí $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbf{K})$ je lineární zobrazení.

Řešení: Nechť $f(x) = Ax$. Aby f bylo lineární, musí splňovat oba axiomy uvedené na začátku této kapitoly. Protože
(1) $\forall x, y \in \mathbf{K^n} : f(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = f(x) + f(y)$,
(2) $\forall a \in \mathbf{K}, \forall x \in \mathbf{K^n} : f(ax) = A(ax) = aAx = af(x)$,
oba axiomy jsou splněny a tedy zobrazení f je lineární. Znamená to, že pro libovolnou matici $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbf{K})$ je přiřazením $x \mapsto Ax$ definováno lineární zobrazení mezi vektorovými prostory $\mathbf{K^n} \to \mathbf{K^m}$.

Příklad: Je dáno lineární zobrazení $f : \mathbf{R^4} \to \mathbf{R^4}, f(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, -x_1 - x_2 - x_3 - x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4, -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4)$. Určete Ker$f$, Im$f$ a najděte nějakou bázi Ker$f$ a Imf.

První řešení: Lineární zobrazení f zapíšeme jako násobení maticí:

$$f(x) = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Určíme jádro: Protože Ker$f = \{u \in \mathbf{R^4} : f(u) = Au = 0\}$, řešíme vlastně homogenní soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ze schodovitého tvaru dostáváme: $x_1 = s, x_2 = t, x_3 = -s, x_4 = -t$, $s, t \in \mathbf{R}$. Tedy Ker$f = \{s(1,0,-1,0) + t(0,1,0,-1), s, t \in \mathbf{R}\}, \alpha_{\mathrm{Ker}f} = \{(1,0,-1,0), (0,1,0,-1)\}$.

Nyní určíme obraz: Protože Im $f = \{f(u) : u \in \mathbf{R^4}\}$, tvoří Im f obrazy vektorů standardní báze, přesněji jejich lineárně nezávislá podmnožina. Tzn. Im$f = \{f(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4), a_i \in \mathbf{R}\} = \{a_1f(e_1) + a_2f(e_2) + a_3f(e_3) + a_4f(e_4), a_i \in \mathbf{R}\} =$

$[f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)] = [s_1(A), s_2(A), s_3(A), s_4(A)]$, kde $s_i(A)$ značí i-tý sloupec matice A. Tedy bázi obrazu tvoří lineárně nezávislé sloupce matice A.
$\mathrm{Im} f = \{a_1 f(e_1) + a_2 f(e_2), a_1, a_2 \in \mathbf{R}\} = \{a_1(1,-1,1,-2) + a_2(1,-1,-1,2), a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$, $\alpha_{\mathrm{Im} f} = \{(1,-1,1,-2), (1,-1,-1,2)\}$

Druhé řešení: Při řešení využijeme EŘO. Vytvoříme blokovou matici typu 4×8 tak, že do levého bloku zapíšeme souřadnice vektorů standardní báze ε_4 v $\mathbf{R^4}$, do pravého bloku zapíšeme souřadnice jejich obrazů ve zobrazení f. Protože f je lineární zobrazení, tato vlastnost zůstane zachována i po vykonání libovolné EŘO.

Jestliže matici upravíme pomocí EŘO tak, aby byl pravý blok ve schodovitém tvaru, pak nenulové řádky pravého bloku budou souřadnice vektorů nějaké báze podprostoru $\mathrm{Im} f \subset \mathbf{R^4}$, řádky levého bloku, které odpovídají nulovým řádkům pravého bloku, budou souřadnice vektorů nějaké báze podprostoru $\mathrm{Ker} f \subset \mathbf{R^4}$.

Tedy

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a z upravené matice dostáváme:
$\alpha_{\mathrm{Ker} f} = \{(-1,0,1,0), (0,-1,0,1)\}$
$\alpha_{\mathrm{Im} f} = \{(1,-1,1,-2), (0,0,-2,4)\}$
$\mathrm{Ker} f = \{a(-1,0,1,0) + b(0,-1,0,1); a, b \in \mathbf{R}\}$
$\mathrm{Im} f = \{a(1,-1,1,-2) + b(0,0,-2,4); a, b \in \mathbf{R}\}$

Příklad: Najděte předpis nějakého lineárního zobrazení $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ tak, aby $\mathrm{Ker} f = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]$, $\mathrm{Im}\, f = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$.

Řešení: Doplníme bázi $\alpha_{\mathrm{Ker} f} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ vektorem $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ na bázi β prostoru $\mathbf{R^3}$.
Definujme f-obrazy vektorů báze β tak, aby byly splněny podmínky úlohy:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Tímto je zobrazení f jednoznačně určeno. Zobrazení f zapíšeme pomocí násobení maticí, tj. ve tvaru $f(x) = Ax$. Protože

$$Ax = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2 f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3 f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

potřebujeme pro nalezení matice A ještě určit $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Platí:

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Proto

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

Vzhledem k tomu, že

$$\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_3\\0\\x_2-x_3\end{pmatrix}$$

platí

$$f(x)=(x_2-x_3,0,x_2-x_3)$$

Cvičení:

1. Nechť $\mathbf{V}$ je vektorový prostor, $v\in\mathbf{V}$ je pevně zvolený vektor. Zjistěte, zda zobrazení $f:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ je lineární, jestliže
   (a) $f(x)=x+v$,
   (b) $f(x)=v$.

2. Zjistěte, zda je zobrazení $f:\mathbf{R^n}\to\mathbf{R^n}$ lineární. Pokud ano, najděte $\mathrm{Ker}f,\mathrm{Im}f$ a zapište jej pomocí násobení maticí. Zjistěte, zda je f isomorfismus.
   (a) $f(x,y)=(x,y^2)$
   (b) $f(x,y)=(2x+3y,x-y)$
   (c) $f(x,y)=(x,1-y)$
   (d) $f(x,y,z)=((x+y)^2,x-y,x+y+z)$
   (e) $f(x,y,z)=(x-2y+z,2x-y+z,3y-z)$

3. Zjistěte, zda je zobrazení $A:\mathbf{R_m}[x]\to\mathbf{R_n}[x]$ lineární. Pokud ano, určete $\mathrm{Ker}f,\mathrm{Im}f$.
   (a) $m=n=2,(Af)(x)=f(-x)$,
   (b) $m=n=2,(Af)(x)=xf'(x)$,
   (c) $m=4,n=2,(Af)(x)=f'''(x)-2f''(x)$,

(d) $m = 4, n = 2, (Af)(x) = f''(x) + x^2$.

4. Následující zobrazení napište pomocí násobení maticí, tj. ve tvaru $f(x) = Ax$.

   (a) identické zobrazení $\mathrm{id} : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$,

   (b) kolmá projekce do osy generované vektorem $(1, 0, 0)$ v prostoru $\mathbf{R^3}$,

   (c) kolmá projekce do roviny generované vektory $(0, 1, 0), (0, 0, 1)$ v prostoru $\mathbf{R^3}$,

   (d) násobení pevně zvoleným skalárem $a \in \mathbf{R}$ v prostoru $\mathbf{R^3}$,

   (e) překlopení podle roviny xz v prostoru $\mathbf{R^3}$; najděte obraz vektoru $(2, -5, 3)$ v zobrazení f,

   (f) otočení o úhel $-60°$ v prostoru $\mathbf{R^3}$; najděte obraz vektoru $(3, -4)$ v zobrazení f,

   (g) otočení o úhel $30°$ kolem osy x; najděte obraz vektoru $(-2, 1, 2)$ v zobrazení f.

5. Nechť násobení vektoru x maticí A reprezentuje otočení v rovině xy o úhel ψ. Jaký bude výsledek násobení vektoru x maticí A^T?

6. Zjistěte, zda je lineární zobrazení $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}, f(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$ isomorfismus. Pokud ano, najděte předpis pro inverzní isomorfismus.

7. Určete dimenzi obrazu a jádra zobrazení, které je definováno jako násobení maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ v $\mathrm{Mat}_2(\mathbf{R})$
   (a) zprava,
   (b) zleva.

8. Nechť $f : \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R})$ je lineární zobrazení definované předpisem

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Zjistěte $\dim \mathrm{Ker} f$ a $\dim \mathrm{Im} f$.

9. Nechť $\alpha = (v_1, v_2)$, kde $v_1 = (-2, 1), v_2 = (1, 3)$, je báze $\mathbf{R^2}$ a $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$ je lineární zobrazení takové, že $f(v_1) = (-1, 2, 0), f(v_2) = (0, -3, 5)$. Najděte předpis pro $f(x_1, x_2)$ a určete $f(2, -3)$.

10. Lineární zobrazení $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ zobrazuje vektor u_i na vektor $v_i, i = 1, 2, 3$. Najděte matici tohoto zobrazení ve standardních bázích a určete jeho předpis, jestliže
    $u_1 = (-2, 3, -5), u_2 = (0, 1, 3), u_3 = (2, 0, 0)$,
    $v_1 = (-1, 1, 1), v_2 = (1, 1, -1), v_3 = (-2, 1, 2)$.

11. Lineární zobrazení $f : \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ zobrazuje matici A_i na číslo $c_i, i = 1, 2, 3, 4$. Určete $\mathrm{Ker} f, \mathrm{Im} f$ a najděte předpis zobrazení f, jestliže
    $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
    $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 3, c_4 = 0$.

12. Jsou dány vektory $u = (1,2,-3), v = (2,1,-2), w = (1,-4,5)$ z $\mathbf{R^3}$. Zjistěte, zda existuje lineární zobrazení $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$ takové, že

    (a) $f(u) = (1,2), f(v) = (2,3), f(w) = (1,3)$,

    (b) $f(u) = (-2,1), f(v) = (1,1), f(w) = (8,-1)$.

13. Určete jádro a obraz lineárního zobrazení $f : \mathbf{R^4} \to \mathbf{R^4}, f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4, x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$. Najděte nějakou bázi $\mathrm{Ker} f$ a $\mathrm{Im} f$.

14. Určete předpis lineárního zobrazení $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^4}$, pro které platí $f(1,0,1) = (1,0,1,0), f(1,1,0) = (0,0,0,0), f(0,1,1) = (0,1,0,1)$.

15. Najděte dimenzi a bázi obrazu průniku podprostorů V_1 a $V_2 \subset \mathbf{R^4}$ při zobrazení $f : \mathbf{R^4} \to \mathbf{R^5}$. Přitom $f(x,y,z,w) = (x + 2y + 3z + w, 2x - 3y - z - 12w, -x + y + 5w, -y - z - 2w, 2x - 3y - z - 12w), V_1 = [(2,-1,-1,1),(-2,3,1,-1)], V_2 = [(0,2,0,0),(1,1,1,1)]$. Dále zjistěte dimenzi vzoru podprostoru $W \subset \mathbf{R^5}$ generovaného vektorem $(1,1,1,1,1)$.

16. Nechť $\beta = (v_1, v_2)$, kde $v_1 = (1,3), v_2 = (-1,4)$, je báze $\mathbf{R^2}$ a $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ je matice lineárního zobrazení $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$ v bázi β.
    (a) Najděte $(f(v_1))_\beta, (f(v_2))_\beta$,
    (b) najděte $f(v_1), f(v_2)$,
    (c) určete předpis pro $f(x_1,x_2)$,
    (d) vypočtěte $f(1,1)$.

9. MATICE LINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ, MATICE PŘECHODU

Nechť $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je lineární zobrazení, $\alpha = (u_1, ..., u_n), \beta = (v_1, ..., v_k)$ jsou uspořádané báze vektorových prostorů $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$. Nechť

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} v_i \tag{2}$$

$j = 1, ..., n$. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

se nazývá matice lineárního zobrazení $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ v bázích α, β a značí se $(f)_{\beta,\alpha}$. Všimněte si, že j-tý sloupec matice $(f)_{\beta,\alpha}$ je $(f(u_j))_\beta$, tj. sloupec souřadnic vektoru $f(u_j)$ v bázi β. Definiční vztah (2) můžeme přepsat ekvivalentně takto:

$$(f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n)) = (v_1, v_2, ..., v_k)(f)_{\beta,\alpha} \tag{3}$$

Jestliže $x \in \mathbf{U}$, potom

$$(f(x))_\beta = (f)_{\beta,\alpha}(x)_\alpha$$

tj. souřadnice vektoru $f(x)$ v bázi β dostáváme vynásobením matice $(f)_{\beta,\alpha}$ zprava sloupcem souřadnic vektoru x v bázi α.

Nechť $\alpha = (u_1, ..., u_n), \beta = (v_1, ..., v_n)$ jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad polem $\mathbf{K}$. Potom existuje matice $A = (a_{ij})$ taková, že

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \tag{4}$$

kde $j = 1, ..., n$. Matice A se nazýva matice přechodu od báze α k bázi β, nebo také matice záměny báze α bazí β. Protože A je matice identického zobrazení $\mathrm{id} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ v bazích α, β, značí se $(\mathrm{id}_\mathbf{V})_{\beta,\alpha}$. Definiční rovnost (4) můžeme přepsat takto:

$$(u_1, ..., u_n) = (v_1, ..., v_n)(\mathrm{id}_\mathbf{V})_{\beta,\alpha} \tag{5}$$

Tento vztah hraje důležitou roli při výpočtu matice přechodu.

Matice $(\mathrm{id}_\mathbf{V})_{\beta,\alpha}$, $(\mathrm{id}_\mathbf{V})_{\alpha,\beta}$ jsou navzájem inverzní, tj. platí

$$(\mathrm{id}_\mathbf{V})_{\beta,\alpha}(\mathrm{id}_\mathbf{V})_{\alpha,\beta} = (\mathrm{id}_\mathbf{V})_{\alpha,\beta}(\mathrm{id}_\mathbf{V})_{\beta,\alpha} = E$$

Souřadnice libovolného vektoru $x \in \mathbf{V}$ v bazích α, β jsou dány vztahy

$$(x)_\beta = (\mathrm{id}_\mathbf{V})_{\beta,\alpha}(x)_\alpha, \quad (x)_\alpha = (\mathrm{id}_\mathbf{V})_{\alpha,\beta}(x)_\beta$$

Nechť $f : \mathbf{V_1} \to \mathbf{V_2}$ je lineární zobrazení, α_1, β_1 jsou dvě báze $\mathbf{V_1}$, α_2, β_2 jsou dvě báze $\mathbf{V_2}$. Potom mezi maticemi $(f)_{\alpha_2,\alpha_1}$ a $(f)_{\beta_2,\beta_1}$ je vztah

$$(f)_{\beta_2,\beta_1} = (\mathrm{id}_{\mathbf{V_2}})_{\beta_2,\alpha_2}(f)_{\alpha_2,\alpha_1}(\mathrm{id}_{\mathbf{V_1}})_{\alpha_1,\beta_1}$$

$$(f)_{\alpha_2,\alpha_1} = (\mathrm{id}_{\mathbf{V_2}})_{\alpha_2,\beta_2}(f)_{\beta_2,\beta_1}(\mathrm{id}_{\mathbf{V_1}})_{\beta_1,\alpha_1}$$

Pokud $\mathbf{V_1} = \mathbf{V_2} = \mathbf{V}$, dostáváme

$$(f)_{\beta,\beta} = (\mathrm{id}_{\mathbf{V}})_{\beta,\alpha}(f)_{\alpha,\alpha}((\mathrm{id}_{\mathbf{V}})_{\beta,\alpha})^{-1}$$

$$(f)_{\alpha,\alpha} = (\mathrm{id}_{\mathbf{V}})_{\alpha,\beta}(f)_{\beta,\beta}((\mathrm{id}_{\mathbf{V}})_{\alpha,\beta})^{-1}$$

Nechť $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$, $g : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ jsou lineární zobrazení, α, β, γ jsou postupně báze prostorů $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$. Potom složení zobrazení f a g je opět lineární zobrazení a platí

$$(g \circ f)_{\gamma,\alpha} = (g)_{\gamma,\beta}(f)_{\beta,\alpha}$$

.

Příklad: Určete matici lineárního zobrazení $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1)$ v bázích α, β, jestliže
(a) $\alpha = \varepsilon_3, \beta = \varepsilon_2$,
(b) $\alpha = ((1,2,0), (-2,10), (3,1,-1)), \beta = ((2,1), (0,2))$.
Najděte obraz vektoru x v lineárním zobrazení f, jestliže $(x)_\alpha = (0, -4, 1)^T$.

Řešení: (a) Určíme obrazy vektorů báze α ve zobrazení f:

$$f(1,0,0) = (1,2), f(0,1,0) = (2,0), f(0,0,1) = (-3,0)$$

Vzhledem k tomu, že $\beta = \varepsilon_2$, platí

$$(f)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože $\alpha = \varepsilon_3$, přímo z předpisu f dostáváme $f(x) = (-11, 0)$.

(b) Postupujeme analogicky jako v (a).

$$f(1,2,0) = (5,2), f(-2,1,0) = (0,-4), f(3,1,-1) = (8,6)$$

Nyní vyjádříme vypočítané vektory jako lineární kombinaci prvků báze β:

$$(5,2) = a(2,1) + b(0,2) = (2a, a + 2b)$$

Řešením systému

$$\begin{aligned} 2a &= 5 \\ a+2b &= 2 \end{aligned}$$

dostáváme $a = \frac{5}{2}, b = -\frac{1}{4}$. Analogicky

$$\begin{aligned} (0,-4) &= 0(2,1) - 2(0,2) \\ (8,6) &= 4(2,1) + 1(0,2) \end{aligned}$$

Zapsáním koeficientů lineárních kombinací do matice dostáváme

$$(f)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 4 \\ -\frac{1}{4} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Potom

$$(f(x))_\beta = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 4 \\ -\frac{1}{4} & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

což znamená, že $f(x) = 4(2,1) + 9(0,2) = (8,22)$.

Příklad: V $\mathbf{R}^3$ jsou dány báze $\alpha = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)), \beta = ((-1,1,0),(1,1,0),(0,0,1))$. Určete matici $(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})_{\beta,\alpha}$, tj. matici přechodu od báze α k bázi β, a matici $(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})_{\alpha,\beta}$, tj. matici přechodu od báze β k bázi α. Pomocí těchto matic vypočtěte $(x)_\beta, (y)_\alpha$, jestliže $(x)_\alpha = (-1,3,0)^T, (y)_\beta = (2,4,7)^T$.

Řešení: Nejprve určíme $(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})_{\beta,\alpha}$. Vyjádříme vektory báze α jako lineární kombinaci vektorů báze β.

$$(1,0,0) = a(-1,1,0) + b(1,1,0) + c(0,0,1) = (-a+b, a+b, c)$$

Porovnámím dostáváme

$$-a+b = 0, a+b = 0, c = 0$$

Řešením systému je $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 0$. Analogicky se vypočte, že

$$\begin{aligned} (1,1,0) &= 0(-1,1,0) + 0(1,1,0) + 0(0,0,1) \\ (1,1,1) &= 0(-1,1,0) + 1(1,1,0) + 1(0,0,1) \end{aligned}$$

Zapsáním koeficientů lineárních kombinací do matice dostáváme

$$(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

K výpočtu můžeme rovněž použít vztah (5) a vyřešit soustavu

$$A = B(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})_{\beta,\alpha}$$

kde sloupce matic A a B jsou tvořeny vektory bazí α a β. Po úpravě dostáváme

$$(\mathrm{id}_{\mathbf{R^3}})_{\beta,\alpha} = B^{-1}A$$

Matici $(\mathrm{id}_{\mathbf{R^3}})_{\alpha,\beta}$ určíme jako inverzní matici k $(\mathrm{id}_{\mathbf{R^3}})_{\beta,\alpha}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

a proto

$$(\mathrm{id}_{\mathbf{R^3}})_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dále

$$\begin{aligned} (x)_\beta &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ (y)_\alpha &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tedy $(x)_\beta = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0)^T, (y)_\alpha = (-4, -1, 7)^T$.

Příklad: Nechť báze α, β prostoru $\mathbf{R^3}$ jsou stejné jako v předchozím příkladě.
(a) Nechť $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ je endomorfismus, jehož matice v bázi α je

$$(f)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete jeho matici v bázi β. Určete obrazy vektorů x, y, z v endomorfismu f, jestiže $x = (1, 2, 3), (y)_\alpha = (1, 2, 3), (z)_\beta = (1, 2, 3)$.
(b) Určete matici endomorfismu f ve standardní bázi prostoru $\mathbf{R^3}$ a najděte jeho předpis.

Řešení: (a) Protože $(f)_{\beta,\beta} = (\mathrm{id}_{\mathbf{R^3}})_{\beta,\alpha}(f)_{\alpha,\alpha}(\mathrm{id}_{\mathbf{R^3}})_{\alpha,\beta}$,

$$(f)_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abychom mohli určit $f(x)$, potřebujeme najít souřadnice vektoru x v bázi α (nebo β). Nechť

$$(1, 2, 3) = a(1, 0, 0) + b(1, 1, 0) + c(1, 1, 1) = (a + b + c, b + c, c)$$

Porovnáním dostáváme $a=-1, b=-1, c=3$. Potom

$$(f(x))_\alpha = \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$$

tedy

$$f(x) = 2(1,0,0) - 2(1,1,0) + 2(1,1,1) = (2,0,2)$$

Analogicky

$$(f(y))_\alpha = \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$(f(z))_\beta = \begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\-1&2&-\frac{1}{2}\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\3\end{pmatrix}$$

$$f(y) = 4(1,0,0) + 3(1,1,0) + 5(1,1,1) = (12,8,5)$$

$$f(z) = -\frac{1}{2}(-1,1,0) + \frac{3}{2}(1,1,0) + 3(0,0,1) = (2,1,3)$$

(b) Určíme matice přechodu $(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})_{\varepsilon_3,\alpha}$, $(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})_{\alpha,\varepsilon_3}$. Přímo dostáváme

$$(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})_{\varepsilon_3,\alpha} = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Matici $(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})_{\alpha,\varepsilon_3} = ((\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})_{\varepsilon_3,\alpha})^{-1}$ určíme pomocí EŘO:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&-1\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

tj.

$$(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})_{\alpha,\varepsilon_3} = \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Nyní vypočteme $(f)_{\varepsilon_3,\varepsilon_3} = (\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})_{\varepsilon_3,\alpha}(f)_{\alpha,\alpha}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})_{\alpha,\varepsilon_3}$.

$$(f)_{\varepsilon_3,\varepsilon_3} = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Protože

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1\\x_1+x_2-x_3\\x_2\end{pmatrix}$$

platí
$$f(x) = (2x_1, x_1 + x_2 - x_3, x_2)$$

Příklad: Nechť $\alpha = ((1,0,-1,2,3),(-2,1,4,-3,1)), \beta = ((0,1,2,1,7),(-1,2,5,0,11))$ jsou dvě báze podprostoru P vektorového prostoru $\mathbf{R^5}$. Určete matici přechodu
(a) od báze α k bázi β,
(b) od báze β k bázi α.

Řešení: Označme $\alpha = (u_1, u_2), \beta = (v_1, v_2)$.
(a) Vyjádříme vektory u_1, u_2 jako lineární kombinaci vektorů v_1, v_2:

$$(1,0,-1,2,3) = a(0,1,2,1,7) + b(-1,2,5,0,11) = (-b, a+2b, 2a+5b, a, 7a+11b)$$

$$(-2,1,4,-3,1) = c(0,1,2,1,7) + d(-1,2,5,0,11) = (-d, c+2d, 2c+5d, c, 7c+11d)$$

Porovnáním dostáváme $a = 2, b = -1, c = -3, d = 2$, tj.

$$(\mathrm{id}_P)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Matici $(\mathrm{id}_P)_{\alpha,\beta}$ určíme jako inverzní matici k $(\mathrm{id}_P)_{\beta,\alpha}$:

$$(\mathrm{id}_P)_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad: V $\mathbf{R^3}$ je dána báze $\alpha = ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$. Zkonstruujte bázi β tak, aby matice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
byla maticí přechodu
(a) od báze β k bázi α,
(b) od báze α k bázi β.

Řešení: Označme A a B matice, jejichž sloupce tvoří vektory bazí α a β.
(a) Nechť M je maticí přechodu od báze β k bázi α. Pak podle (5) platí $B = AM$, tedy

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Takže $\beta = ((2,2,2),(1,3,2),(2,3,1))$.

(b) Nechť nyní je M maticí přechodu od báze α k bázi β. Pak podle (5) platí $BM = A$, tj. $B = AM^{-1}$. M^{-1} určíme pomocí EŘO a

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

Tedy $\beta = (\frac{1}{3}(-1,2,1), \frac{1}{3}(2,2,-2), \frac{1}{3}(2,-1,1))$.

Cvičení:

1. Matice lineárního zobrazení $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ v bázi $\alpha = ((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0))$ je

$$(f)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

   Najděte předpis zobrazení f. Zjistěte, zda je f isomorfismus.

2. Nechť $f : \mathbf{R_1}[x] \to \mathbf{R_1}[x]$ je lineární zobrazení definované předpisem $f(a+bx) = a + b(x+1)$ a $\gamma = (6+3x, 10+2x), \delta = (2, 3+2x)$ jsou báze prostoru $\mathbf{R_1}[x]$. Najděte matici zobrazení f
   (a) v bázi γ,
   (b) v bázi δ.

3. Určete matici endomorfismu $A : \mathbf{R_3}[x] \to \mathbf{R_3}[x], A(f) = 3f'' + 4f' + f$, v bázi
   (a) $\alpha = (1, x, x^2, x^3)$,
   (b) $\beta = (1+x, 1-x, x^2+x^3, x^2-x^3)$.
   Zjistěte, zda je A isomorfismus.

4. Vektor $x \in \mathbf{R^3}$ má v bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ souřadnice $(x)_\alpha = (1,-3,2)^T$. Určete jeho souřadnice v bázi $\beta = (v_1, v_2, v_3)$, jestliže víme, že
   (a) $u_1 = 3v_1 + 2v_2 + v_3, u_2 = v_2 - 2v_3, u_3 = v_1 - v_3$,
   (b) $v_1 = u_1 + u_2 + u_3, v_2 = u_2 + u_3, v_3 = u_3$.

5. Lineární zobrazení $A : \mathbf{R_3}[x] \to \mathbf{R_3}[x]$ je ve standardní bázi ε prostoru $\mathbf{R_3}[x]$ dáno maticí

$$(A)_{\varepsilon,\varepsilon} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

   Najděte všechny polynomy $f \in \mathbf{R_3}[x]$ s vlastností $A(f) = 1 - x$.

6. Určete matici lineárního zobrazení $f : \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R}) \to \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R}), f(X) = AX$ v bázi β, jestliže $\beta = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right), A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

7. Najděte matici lineárního zobrazení $\varphi : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^4}$ daného pomocí nějaké matice A typu 4×3 předpisem $\varphi((x,y,z)^T) = A(x,y,z)^T$ vzhledem k bázi $\gamma = ((0,0,1),(0,1,0),(4,5,3))$ v $\mathbf{R^3}$ a $\delta = ((2,0,2,5),(1,0,0,0),(2,-4,-6,7),(0,1,0,0))$ v $\mathbf{R^4}$.

8. Uvažujme zobrazení $f : \mathbf{R_2}[x] \to \mathbf{R_2}[x]$, $f(ax^2+bx+c) = (a-b)x^2+(a-c)x+(b-c)$.
(a) Dokažte, že f je lineární zobrazení.
(b) Najděte všechny polynomy, které leží v jeho jádře.
(c) Napište matici zobrazení f ve standardní bázi $\varepsilon = (1, x, x^2)$.

9. Najděte předpis lineárního zobrazení $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$, které má v bazích $\alpha = ((1,-1),(1,1))$, $\beta = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ vektorových prostorů $\mathbf{R^2}$ a $\mathbf{R^3}$ matici

$$(f)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

10. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R_3}[x]$ jsou dány báze $\alpha = (1,x,x^2,x^3)$, $\beta = (1+x, 1-x, x^2+x^3, x^2-x^3)$. Najděte matici přechodu
(a) od báze α k bázi β,
(b) od báze β k bázi α.

11. Nechť α a β jsou báze v $\mathbf{R^3}$. Najděte matici přechodu od báze α k bázi β. Pomocí této matice určete souřadnice vektoru $w = (-5,8,-5)$ v bázi β, jestliže
(a) $\alpha = ((-3,0,-3),(-3,2,-1),(1,6,-1))$, $\beta = ((-6,-6,0),(-2,-6,4),(-2,-3,7))$,
(b) $\alpha = ((2,1,1),(2,-1,1),(1,2,1))$, $\beta = ((3,1,-5),(1,1,-3),(-1,0,2))$.

12. Nechť $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$ je lineární zobrazení v bazích $\alpha = ((1,3),(-2,4))$ a $\beta = ((1,1,1),(2,2,0),(3,0,0))$ definované předpisem

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Najděte matici přechodu od báze α k bázi β.

13. Najděte lineární zobrazení $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$, které má v bazích α, β matici

$$(f)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jestliže
(a) α, β jsou standardní báze prostorů $\mathbf{R^3}$ a $\mathbf{R^2}$,
(b) $\alpha = ((1,1,0),(1,-2,0),(0,0,1)$, $\beta = ((2,-1),(0,1))$.

14. Matice lineárního zobrazení $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$ v bazích $\alpha = ((1,0,1),(1,0,0),(1,1,1))$, $\beta = ((-1,2),(1,1))$ je

$$(f)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Určete obrazy vektorů $x = (1,-2,3)$, $y = (-1,0,4)$ v endomorfismu f.

15. Ve standardních bazích na $\mathbf{R^3}$ a $\mathbf{R^5}$ je dáno zobrazení f maticí A a zobrazení g maticí B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Odkud kam tato zobrazení jdou? Najděte matice jejich kompozic. Zjistěte, zda jde o isomorfismy.

10. AFINNÍ GEOMETRIE

Afinní podprostor prostoru $\mathbf{K^n}$ je množina $M = P + [u_1, ..., u_k]$, kde $P \in \mathbf{K^n}, u_i \in \mathbf{K^n}$. Každý prvek $x \in M$ můžeme jednoznačne napsat ve tvaru

$$x = P + \sum_{i=1}^{k} t_i u_i$$

kde $t_1, ...t_k \in \mathbf{K}$ jsou parametry. Toto vyjádření se nazývá parametrické vyjádření nebo parametrická rovnice podprostoru M.

Afinní podprostor lze popsat soustavou lineárních rovnic

$$Ax = b$$

kde $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbf{K}), b \in \mathbf{K^m}$. Množina řešení této soustavy $\{x; Ax = b\}$ je buď $\emptyset$ nebo afinní podprostor. Toto vyjáření se nazývá obecná rovnice afinního podprostoru.

Zaměřením afinního podprostoru $M \subseteq \mathbf{K}$ nazýváme vektorový podprostor

$$\mathrm{Dir}\ M = [u_1, ..., u_k]$$

Dimenzí afinního podprostoru $M \subseteq \mathbf{K^n}$, ozn. $\dim M$, nazýváme dimenzi jeho zaměření, tedy

$$\dim M = \dim \mathrm{Dir}\ M$$

Nechť S, T jsou dva podprostory afinního prostoru $\mathbf{V}$. Řekneme, že podprostory S a T jsou rovnoběžné, jestliže buďto Dir $S \subseteq$ Dir T nebo Dir $T \subseteq$ Dir S (rovnoběžné podprostory tedy mohou i splývat). Dále řekneme, že tyto proprostory jsou různoběžné, mají-li alespoň jeden společný bod a přitom nejsou rovnoběžné. Konečně řekneme, že tyto podprostory jsou mimoběžné, jestliže nejsou rovnoběžné a nemají žádný společný bod.

Příklad: Určete parametrické rovnice podprostoru M zadaného rovnicemi

$$\begin{aligned} M:\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Řešení: Soustavu přepíšeme do matice, kterou nejprve pomocí EŘO upravíme na schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & | & 9 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 6 \end{pmatrix}$$

Z upravené matice získáme parametrický popis následujícím způsobem: Vedoucí členy řádků se nacházejí v prvním a druhém sloupci, proto si neznámé x_3 a x_4 zvolíme za parametry a neznámé x_1 a x_2 pomocí nich vyjádříme. Zvolíme-li $x_4 = t, x_3 = s$, potom $x_2 = 6 - s + t, x_1 = 3$. Parametrická rovnice pak má tvar

$$\begin{aligned} M:\ x_1 &= 3 \\ x_2 &= 6 - s + t \\ x_3 &= s \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

Příklad: Najděte obecné rovnice afinního podprostoru M vektorového prostoru $\mathbf{R^4}$, kde $M : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 2, 2) + t_1(1, -1, 0, 0) + t_2(1, 2, 0, -1)$.

Řešení: Parametrické rovnice $x = P + \alpha t$ přepíšeme do tvaru $Ex = \alpha t + P$, kde $P = (1, 0, 2, 2)$ je bod a $\alpha = ((1, -1, 0, 0), (1, 2, 0, -1))$ vektory, které tvoří afinní podprostor M, a $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ je vektor neznámých a $t = (t_1, t_2)$ vektor parametrů. Soustavu rovnic $Ex = \alpha t + P$ přepíseme do matice tvaru $(E|\alpha|P)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Matici budeme upravovat pomocí EŘO tak, aby prostřední blok ve výsledné matici byl ve schodovitém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & | & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & | & 7 \end{pmatrix}$$

Obecné rovnice podprostoru M určují koeficienty levého a pravého bloku, a to v řádcích, ve kterých jsou v prostředním bloku samé nuly. Tedy

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Dosazením se přesvědčíme, že bod P této soustavě skutečně vyhovuje.

Příklad: V prostoru $\mathbf{R^4}$ zjistěte vzájemnou polohu podprostorů

(a) $\pi : 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5,\ 5x_1 - x_2 + 2x_4 = 3,$
$\rho : x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -3,\ 2x_2 - x_3 + x_4 = -2,$

(b) $\rho : x_1 + 2x_2 - x_3 = 1,\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 3,$
$p : (3, -1, 0, 0) + t(-3, 2, 1, 1),$

(c) $\rho : (3,-1,0,0) + s(-1,1,1,0) + t(2,1,0,1)$,
$p : (3,1,0,0) + r(-1,2,1,1)$.

Řešení: (a) Hledáme společný bod podprostorů π a ρ, tj. bod $R = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, jehož souřadnice splňují rovnice podprostoru π i ρ. Řešíme tedy systém rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= -3 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Pomocí EŘO upravíme jeho rozšířenou matici na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

ze kterého dostáváme $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1$, což je jediné řešení daného systému. Podprostory π, ρ jsou tedy různoběžné a jejich průsečíkem je bod $R = (1, 0, 1, -1)$.

(b) Bod Q leží na přímce p, pokud $Q = (3 - 3t, -1 + 2t, t, t), t \in \mathbf{R}$. Aby bod Q ležel i v rovině ρ, musí jeho souřadnice splňovat rovnici roviny ρ, tedy musí platit

$$\begin{aligned} 3 - 3t + 2(-1 + 2t) + -t &= 1 \\ 3 - 3t + t + 2t &= 3 \end{aligned}$$

Ekvivalentní úpravou dostaneme rovnici

$$0 \cdot t = 0$$

která je splněna pro každé $t \in \mathbf{R}$. To znamená, že každý bod přímky p je zároveň bodem roviny ρ, tedy přímka p leží v rovině ρ.

(c) Bod Q leží v rovině ρ, pokud $Q = (3 - s + 2t, -1 + s + t, s, t)$, a leží na přímce p, pokud $Q = (3 - r, 1 + 2r, r, r)$. Řešíme tedy nehomogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -s + 2t + r &= 3 - 3 \\ s + t + 2r &= 1 + 1 \\ s - r &= 0 \\ t - r &= 0 \end{aligned}$$

Její rozšířenou matici upravíme pomocí EŘO na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Soustava nemá řešení, tzn. že $\rho \cap p = \emptyset$. Vyřešíme-li tuto soustavu jako homogenní, zjistíme, že vektory určující zaměření roviny ρ a přímky p jsou lineárně nezávislé, tedy rovina a přímka jsou mimoběžné.

Příklad: V prostoru $\mathbf{R}^3$ najděte příčku mimoběžek $p : (1, 2, -1) + s(1, -1, 1)$, $q : (0, 9, -2) + t(1, 0, 0)$ rovnoběžnou s vektorem $(1, 2, 0)$.

Řešení: Protože vektory $(1, -1, 1), (1, 0, 0), (1, 2, 0)$ jsou lineárně nezávislé, taková přímka existuje. Stačí nalézt průsečík přímky q s rovinou $\rho : (1, 2, -1) + s(1, -1, 1) + r(1, 2, 0)$. Abychom tento průsečík nalezli, musíne řešit rovnici

$$(0, 9, -2) + t(1, 0, 0) = (1, 2, -1) + s(1, -1, 1) + r(1, 2, 0)$$

přičemž nám stačí znát hodnotu parametru t. Rozepsáním do složek dostaneme nehomogenní soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} t - s - r &= 1 \\ s - 2r &= -7 \\ -s &= 1 \end{aligned}$$

Odtud spočítáme $t = 3$ $(s = -1, r = 3)$ a bod $(3, 9, -2)$ je průsečíkem přímky q s rovinou ρ. Hledaná příčka je pak $(3, 9, -2) + r(1, 2, 0)$.

Příklad: V prostoru $\mathbf{R}^3$ najděte příčku mimoběžek $p : P + su = (3, 3, 3) + s(2, 2, 1)$ a $q : Q + tv = (0, 5, -1) + t(1, 1, 1)$, která prochází bodem $A = (4, 5, 3)$.

Řešení: Snadno zjistíme, že jak vektory $(1, 2, 0), (2, 2, 1), (1, 1, 1)$ (kde $(1, 2, 0) = A - P$), tak vektory $(4, 0, 4), (2, 2, 1), (1, 1, 1)$ (kde $(4, 0, 4) = A - Q$) jsou lineárně nezávislé, takže příčka existuje. Potřebujeme najít průsečík přímky q s rovinou $\rho : (4, 5, 3) + r(1, 2, 0) + s(2, 2, 1)$. Pro hledaný průsečík tak dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} t - r - 2s &= 4 \\ t - 2r - 2s &= 0 \\ t - s &= 4 \end{aligned}$$

odkud $t = 0$. Průsečík přímky q s rovinou ρ je $R = (0, 5, -1)$ a hledaná příčka je $(0, 5, -1) + a(4, 0, 4) = (0, 5, -1) + a(1, 0, 1)$.

Příklad: V prostoru $\mathbf{R}^4$ uvažujme roviny $\rho : x_1 + x_2 = 3,\ x_3 + x_4 = 4$ a $\sigma : x_1 + x_3 = 1,\ x_2 - x_4 = 3$ a bod $M = (2, -2, 3, -3)$. Najděte přímku q, která prochází bodem M, protíná rovinu σ a je rovnoběžná s rovinou ρ.

Řešení: Nechť τ je rovina procházející bodem M a je rovnoběžná s rovinou ρ. Pak souřadnice bodu M splňují její rovnici, kterou získáme dosazením souřadnic bodu M do rovnice roviny ρ a dopočítáním příslušných koeficientů.

$$x_1 + x_2 = c$$
$$x_3 + x_4 = d$$

dosazením souřadnic bodu M dostáváme

$$2 - 2 = 0$$
$$3 - 3 = 0$$

tedy $c = d = 0$ a

$$\tau: \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_3 + x_4 & = & 0 \end{array}$$

Bod P tvořící druhý bod přímky q je průsečíkem rovin σ a τ. Řešíme systém rovnic

$$x_1 + x_3 = 1$$
$$x_2 - x_4 = 3$$
$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_3 + x_4 = 0$$

jehož matici převedeme pomocí EŘO na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

ze kterého dostáváme $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = -2$. Tedy $P = (-1, 1, 2, -2)$ a přímka q má rovnici

$$q : M + t(P - M) = (2, -2, 3, -3) + t(-3, 3, -1, 1)$$

Příklad: Najděte průnik afinních podprostorů $Q_1 : (3, 0, -3, 3) + a(1, 0, -1, 0) + b(0, 2, 0, 1)$, $Q_2 : (4, -2, -4, 2) + s(0, 0, 1, -1) + t(1, 2, 0, 0)$.

Řešení: Nechť $X \in Q_1 \cap Q_2$. Pak platí

$$X = A + au_1 + bu_2 = B + sv_1 + tv_2$$

tedy

$$au_1 + bu_2 - sv_1 - tv_2 = B - A$$

Soustavu přepíšeme do matice a upravíme na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

odkud $a = p, b = p, s = p, t = -p$. Tedy

$$X = B - pv_1 + pv_2 = B + p(v_2 - v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně pomocí vektorů u_1, u_2 dostaneme

$$X = A + pu_1 + pu_2 = A + p(u_1 + u_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení:

1. Napište paramerické rovnice roviny, jestliže jsou zadány její
   (a) tři body $A = (-1, 1, 0),\ B = (2, 1, 6),\ C = (3, 0, 4)$,
   (b) dva body $= (1, 2, -3),\ B = (0, 2, 1)$ a směrový vektor $u = (2, 1, -1)$,
   (c) bod $A = (3, 1, -2)$ a dva lineárně nezávislé směrové vektory $u = (-1, 2, 1), v = (3, -4, 2)$.

2. Najděte obecnou rovnici roviny určené
   (a) třemi body $A = (1, -1, 1),\ B = (2, 1, -3),\ C = (1, 4, 2)$,
   (b) dvěma body $A = (4, 1, 2),\ B = (2, -2, 3)$ a směrovým vektorem $u = (3, -2, 1)$,
   (c) bodem $A = (3, 3, 3)$ a směrovými vektory $u = (1, -1, 1), v = (-1, 1, 1)$.

3. Zjistěte, které z bodů $A = (1, 2, -1),\ B = (1, 2, 2),\ C = (3, 1, 2),\ D = (-4, 2, 0)$ leží v rovině
   (a) $(x, y, z) = (6, 2, -2) + t(5, 0, -1) + s(1, 1, 0)$,
   (b) $x = 1 + 2t,\ x = 3 - 2t + s,\ z = 4 - 2t + 2s$,
   (c) $x + 17y + 5z - 30 = 0$.

4. Najděte parametrické vyjádření přímky v $\mathbf{R}^3$ zadané $p : \begin{cases} 2x - y + z - 9 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$. Jak vypadají rovnice všech rovin procházejících danou přímkou p (tzv. svazek rovin)?

5. Najděte parametrické vyjádření podprostoru v $\mathbf{R}^4$ zadaného obecnými rovnicemi.

   (a) $x_1 + x_2 - 2x_4 = 6,\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 11,\ x_1 + x_2 - x_4 = 8,$

   (b) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4,\ x_2 + x_3 + x_4 = 5,\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 11.$

6. Určete vzájemnou polohu přímek v prostoru $\mathbf{R}^2$, resp. $\mathbf{R}^3$; v případě, že jsou různoběžné, najděte jejich průsečík.

   (a) $p: 3x + 4y - 20 = 0, \quad q: x = 4 - 8t, y = 2 + 6t,$

   (b) $p: (x, y) = (2, -9) + t(1, -1), \quad q: (x, y) = (1, -1) + t(5, 2),$

   (c) $p: x = 3 - 6t, y = -1 + 4t, z = t, \quad q: x = -2 + 3t, y = 4, z = 3 - t,$

   (d) $p: \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ 3x + y - z + 13 = 0 \end{cases}, \quad q: \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases},$

7. Určete vzájemnou polohu rovin v $\mathbf{R}^3$; v případě, že jsou různoběžné, napište paramerické rovnice jejich průsečíku.

   (a) $\rho: x + y + 2z - 3 = 0, \quad \sigma: x - y + z - 1 = 0,$

   (b) $\rho: (x, y, z) = (-1, 3, -2) + t(0, 1, 1) + s(1, -1, -2), \quad \sigma: x - y + z + 6 = 0.$

8. V prostoru $\mathbf{R}^3$, resp $\mathbf{R}^4$, zjistěte vzájemnou polohu přímky a roviny; v přídadě různoběžnosti určete jejich průsečík.

   (a) $p: x = 2 + 4t, y = -1 + t, z = 2 - t, \quad \sigma: 4x + y - z + 13 = 0,$

   (b) $p: \begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = 0 \\ x - 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases}, \quad \sigma: 4x - 5y - z + 8 = 0,$

   (c) $p: x_1 + x_2 = 0,\ x_2 + x_3 = 0,\ x_3 + x_4 = 0,$
   $\rho: (0, 3, 0, 1) + s(1, 0, -1, 0) + t(1, 2, -2, 0),$

   (d) $p: x_1 + x_2 = 0,\ x_2 + x_3 = 0,\ x_3 + x_4 = 3,$
   $\rho: (1, -1, 1, 2) + s(-1, 1, 0, 0) + t(0, 0, -2, 2),$

   (e) $p: (4, -2, 3, -1) + t(1, -1, 1, -1), \quad \rho: x_1 + x_3 + x_4 = 4,\ x_1 + x_2 + x_3 = 3.$

9. V prostoru $\mathbf{R}^4$ zjistěte vzájemnou polohu

   (a) roviny $(1, 0, 2, 2) + r(1, -1, 0, 0) + s(1, 2, 0, -1)$
   a přímky $(0, 0, -6, 5) + t(1, 2, -3, 0),$

   (b) nadroviny $(2, 1, 1, 1) + r(1, 1, 1, 1) + s(1, 1, 1, -1) + t(1, 1, -1, -1)$
   a přímky $(3, 2, 0, -2) + u(1, 1, -1, 1),$

   (c) rovin $(2, 3, 1, 3) + s(-1, 1, 0, 2) + (0, 2, -3, 2),$
   $(-1, 0, 2, 1) + u(2, 4, -9, 2) + v(1, 1, 1, 1)$

10. V prostoru $\mathbf{R^4}$

    (a) určete parametry a, b tak, aby přímka $(1,2,1,2)+r(1,a,0,2)$ ležela v rovině $(1,1,2,b)+s(1,2,1,2)+t(1,1,2,2)$,

    (b) v závislosti na parametru a určete vzájemnou polohu rovin $(3,-1,-1,6)+s(-2,1,-2,1)+t(4,-1,-1,0)$, $\quad (4,1,3,a)+u(0,-2,0,1)+v(2,2,-1,-1)$.

11. V prostoru $\mathbf{R^5}$ určete vzájemnou polohu podprostorů:

    (a) $(1,1,1,1,1)+r(2,-8,3,-5,-9)$,
    $(1,1,2,-1,3)+s(1,-1,0,2,3)+t(0,2,-1,3,5)$,

    (b) $(-2,10,-1,2,-1)+r(2,-8,3,-5,1)$,
    $(1,1,2,-1,3)+s(1,-1,0,2,3)+t(0,2,-1,3,5)$.

12. V prostoru $\mathbf{R^3}$ najděte příčku mimoběžek

    (a) $(x,y,z)=(1,-1,2)+t(1,-1,3)$, $\quad (x,y,z)=(3,-1,1)+t(2,1,4)$, která prochází bodem $M=(3,-2,13)$.

    (b) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-2}$, $\quad (x,y,z)=(2,0,1)+t(1,-1,1)$ rovnoběžnou s přímkou $x-y+z+11=0$, $x-3y-z-6=0$.

    (c) $x-2=\frac{y+3}{2}=\frac{-z-1}{2}$, $\quad x-3=y=\frac{z+58}{3}$, která je rovnoběžná s průsečnicí rovin $2x-z-15=0$, $\quad x-y+324=0$.

    (d) $(1,3,4)+t(1,0,2)$ a $2x-z+2=0$, $y-3=0$, která prochází bodem $(13,17,29)$.

13. V prostoru $\mathbf{R^3}$ napište parametrické rovnice přímky, která prochází bodem $A=(3,-2,-4)$ rovnoběžně s rovinou $\rho: 3x-2y-3z-7=0$ a protíná přímku $p: 2x+3y+8=0,\ y+z+3=0$.

14. V prostoru $\mathbf{R^3}$ určete přímku q, která prochází bodem $M=(3,2,1)$, protíná přímku $p: x_1-x_2=1,\ x_1+x_3=6$ a je rovnoběžná s rovinou $\rho: 2x_1+x_2+x_3=5$.

15. V prostoru $\mathbf{R^4}$ určete přímku q, která

    (a) prochází bodem $M=(8,9,-11,-15)$ a protíná přímky $p:(1,0,-2,1)+s(1,2,-1,-5)$, $r:(0,1,1,-1)+t(2,3,-2,-4)$,

    (b) prochází bodem $M=(1,2,-1,-2)$, protíná rovinu $\sigma: x_1+x_2=1,\ x_3-x_4=3$ a je rovnoběžná s rovinou $\rho: x_1+x_3=-5,\ x_2+x_4=3$,

    (c) prochází bodem $M=(1,0,3,1)$, protíná přímku $p:(7,0,0,0)+t(0,1,0,1)$ a je rovnoběžná s nadrovinou $\rho: x_1+x_2+x_3+x_4=0$.

16. V prostoru $\mathbf{R^5}$ určete přímku q, která prochází bodem $M=(5,3,4,6,2)$ a protíná roviny $\rho:(3,1,0,4,0)+a(0,1,0,0,0)+b(0,0,1,0,1)$ a $\pi:(0,1,-2,1,0)+c(1,0,0,0,0)+d(0,0,0,1,0)$.

17. Najděte příčku mimoběžek $p:(1,5,2,-1)+t(1,2,1,0)$, $q:(0,-1,1,1)+t(3,1,0,1)$ procházející bodem $M=(0,1,-5,-3)$.

18. Najděte parametrickou a implicitní rovnici nadroviny σ v $\mathbf{R^4}$ určenou body $B_1 = (-1,0,-1,0), B_2 = (0,2,0,1), B_3 = (0,-2,2,0), B_4 = (1,0,0,-1)$. Určete její zaměření.

19. V $\mathbf{R^4}$ najděte obecné rovnice afinního podprostoru

    (a) $M : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,0,0,0) + s(1,-1,1,0) + t(3,-2,0,1)$,

    (b) $M : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,3,1,3) + s(1,1,-2,-2) + t(1,5,-4,0)$.

20. Najděte průnik afinních podprostorů

    (a) $P_1 : (2,3,1,3) + a(-1,1,0,2) + b(0,2,-3,2)$,
    $P_2 : (-1,0,2,1) + s(2,4,-9,2) + t(1,1,1,1)$,

    (b) $P_1 : (-9,2,1,-5) + a(5,-1,0,2) + b(3,1,2,0)$,
    $P_2 : (1,2,3,4) + r(1,0,0,0) + s(0,1,0,0) + t(0,0,1,0)$.

21. V $\mathbf{R^2}$ je dán trojúhelník ABC. Označme po řadě A', B', C' středy jeho stran BC, AC, AB. Dokažte, že platí

$$(A' - A) + (B' - B) + (C' - C) = 0.$$

ŘEŠENÍ KE CVIČENÍM:

1. OPAKOVÁNÍ, POČÍTÁNÍ S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

1. (a) $-486-702i$; (b) $-28+24i$; (c) $-\frac{4}{17}+\frac{18}{17}i$. **2.** (a) $-59+17i$; (b) $8+5i$; (c) $\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$; (d) $-\frac{1}{25}+\frac{7}{25}i$; (e) $-\frac{15}{2}+5i$; (f) $-1-i$. **3.** (a) $x=0, y=0$; (b) $x=-\frac{1}{29}, y=\frac{66}{29}$. **4.** (a) $1+i$; (b) $\frac{8-3\sqrt{2}}{73}+\frac{3+8\sqrt{2}}{73}i$; (c) $\frac{69}{2210}+\frac{123}{2210}i$. **5.** (a) $2(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi)$; (b) $2(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi)$; (c) $2\sqrt{3}(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi)$. **6.** (a) $x_0=2, x_1=-1+i\sqrt{3}, x_2=-1-i\sqrt{3}$; (b) $x_0=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}(1+i), x_1=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}(-1+i), x_2=-\frac{\sqrt[4]{8}}{2}(1+i), x_3=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}(1-i)$; (c) $x_0=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}), x_1=-1, x_2=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$; (d) $x_0=1, x_1=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi, x_2=\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi, x_3=\cos\frac{6}{5}\pi+i\sin\frac{6}{5}\pi, x_4=\cos\frac{8}{5}\pi+i\sin\frac{8}{5}\pi$; (e) $x_0=\sqrt[3]{\frac{3}{7}}(1+i\sqrt{3}), x_1=-2\sqrt[3]{\frac{3}{7}}, x_2=\sqrt[3]{\frac{3}{7}}(1-i\sqrt{3})$.

2. POLE A VEKTOROVÉ PROSTORY

2.1 ZBYTKOVÉ TŘÍDY.

1. $p=3: x=2$, $p=5: x=3$, $p=7: x=4$. **2.** $p=11: x=3$, $p=13: x=11$. **3.** $p=5: x=3$, $p=7: x=1$, $p=11: x=2$. **4.** (a) nemá řešení; b) $x=1,3,5,7$. **5.** (a) $x=3$; b) $x=6$. **6.** (a) např. $2x=0, 2x=2, 2x=4, 3x=0, 3x=3$; (b) $5x=c, c=0,1,2,3,4,5$; (c) např. $2x=1, 2x=3, 3x=4, 3x=5, 4x=3$. **7.** (a) $x=1,2,4$; (b) $x=3,5,6$. **8.** (a) $x=4,6$; (b) $x=2,7$. **9.** (a) $x=2,4$; (b) nemá řešení; (c) $x=4,5$.

2.2 VEKTOROVÉ PROSTORY

1. (a) ne, není splněn axiom (8); (b) ne, není splněn axiom (5) a (6); (c) ne, není splněn axiom (4); (d) ne, není splněn axiom (7) a (8); (e) ano; (f) ano; (g) ano; (h) ne, není splněn axiom (3) a (4); (i) ano. **2.** ne, $o_1=o_1+o_2=o_2$. **3.** ne, $(-u)_1=(-u)_1+[u+(-u)_2]=[(-u)_1+u]+(-u)_2=(-u)_2$.

3. MATICE A OPERACE S MATICEMI

1. (α) zleva B, F, G, zprava C, D, H; (β) (a) $\begin{pmatrix}1&0&-2&4\\-3&0&6&-12\\0&0&0&0\\7&0&-14&28\end{pmatrix}$; (b) (29); (c) $\begin{pmatrix}12&-20\\26&-92\end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix}-2&-6&0\\2&1&1\\2&-9&-14\end{pmatrix}$; (e) není definováno; (f) $\begin{pmatrix}-4&-2\\5&59\\-7&-13\end{pmatrix}$; (g) (113). **2.** (a) není definováno; (b) $\begin{pmatrix}7&2&4\\3&5&7\end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix}-5&0&-1\\4&-1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$; (d) viz (c); (e) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix}3&45&9\\11&-11&17\\7&17&13\end{pmatrix}$;

(g) viz (f); (h) 5; (i) -25; (j) 168; (k) není definována; (l) 61; (m) $\begin{pmatrix} 15 & 3 & 12 \\ 14 & 0 & 7 \\ 12 & 12 & 13 \end{pmatrix}$.

3. (a) $\begin{pmatrix} -1 & 23 & -10 \\ 37 & -13 & 8 \\ 29 & 23 & 41 \end{pmatrix}$; (b) $A_{11}B_{11}$ nelze vynásobit; (c) $\begin{pmatrix} -3 & -15 & -11 \\ 21 & -15 & 44 \end{pmatrix}$. **6.** (a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. **7.** pro $n = 4$ (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ v B vynásobí a-krát druhý sloupec, v C vynásobí a-krát druhý řádek; (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ v B přehodí první a třetí sloupec, v C přehodí první a třetí řádek; (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ v B přičte k prvnímu sloupci a-násobek třetího sloupce, v C přičte k prvnímu řádku a-násobek třetího řádku. **8.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. **9.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **10.** (a) jedna: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (b) žádná. **11.** (a) $\pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; (b) 4 : $\begin{pmatrix} \pm\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \pm 3 \end{pmatrix}$; (c) ne, např. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **12.** (a) ano, např. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; (b) ano, např. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **15.** $A^k = ({a_{ij}}^k)$, ${a_{ij}}^k =$ počet cest z i do j délky k.

4. SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

1. v $\mathbf{R}$: nemá řešení; v $\mathbf{Z_5}$: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1$. **2.** v $\mathbf{R}$: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = \frac{5}{3}, x_4 = -\frac{4}{3}$; v $\mathbf{Z_5}$: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 2$; v $\mathbf{Z_7}$: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 1$. **3.** $x_1 = \frac{3t-3}{2}, x_2 = t, x_3 = \frac{1}{3}, x_4 = -\frac{2}{3}, x_5 = 0, t \in \mathbf{R}$; homogenní soustava: $x_1 = 3s - 39t, x_2 = 2s, x_3 = 2t, x_4 = -4t, x_5 = 2t, s, t \in \mathbf{R}$. **4.** (a) $x = 3 + 2i, y = 1 - i, z = 1 + i$; (b) $x = 1 - 2i, y = i$; (c) $x = 3 - i, y = 2i$. **5.** $x_1 = -3r - 4s - 2t, x_2 = r, x_3 = -2s, x_4 = s, x_5 = t, x_6 = \frac{1}{3}, r, s, t, \in \mathbf{R}$. **6.** $x_1 = -s - t, x_2 = s, x_3 = -t, x_4 = 0, x_5 = t, s, t \in \mathbf{R}$. **7.** nemá řešení. **8.** $x_1 = a - \frac{1}{3}c, x_2 = a - \frac{1}{2}b, x_3 = -a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c$. **9.** $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$. **10.** nemá řešení; homogenní soustava: $x_1 = 3t, x_2 = 23t, x_3 = 45$. **11.** (a) (i) $a \neq -1$: $x = \frac{a+b}{(1+a)^2}, y = \frac{b}{1+a} + \frac{b-1}{(1+a)^2}, z = \frac{b-1}{1+a}$; (ii) $a = -1, b = 1$: $x =$

$t-1, y=t, z=-1, t\in \mathbf{R}$; (iii) $a=-1, b\neq 1$; (b) (i) $a\neq 0: x=\frac{-3a^2-ab-4a+2b+4}{a}, y=-\frac{2b+3a+4}{a}, z=\frac{b+2}{a}$; (ii) $a=0, b=-2: x=-2+2p, y=-3-2p, z=p, p\in \mathbf{R}$; (iii) $a=0, b\neq -2$. **12.** (i) nikdy; (ii) $b=1, a$ lib.: $x=2+2ap, y=4+2ap, z=p, p\in \mathbf{Z_5}$; (iii) $b\neq 1, a$ lib. **13.** $[1,0,1],[2,4,2],[3,3,3],[4,2,4],[0,1,0]$. **14.** právě jedno řešení pro $a\neq 4: x=\frac{4+a^2b-2ab}{a^3+1}, y=\frac{2a^2b-4a+b}{a^3+1}, z=\frac{4a^2-ab+2b}{a^3+1}$; více řešení pro $a=4, b=2$: $[4,1,0],[0,2,1],[1,3,2],[2,4,3],[3,0,4]$; žádné řešení pro $a=4, b\neq 2$. **15.** $a=\pm c, b=0$. **16.** právě jedno řešení pro $a\neq 1, a\neq -2, b\neq 0: x=\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}, y=\frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}, z=\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$; více řešení pro $a=1, b=a: x=t, y=1-2t, z=t, t\in \mathbf{R}$ nebo pro $a=-2, b=a: x=t, y=-\frac{1+t}{2}, z=t, t\in \mathbf{R}$; žádné řešení pro $a=1, b\neq a$ nebo $a=-2, b\neq a$.

5. INVERZNÍ MATICE

1. $A^{-1}=\begin{pmatrix}7&-5\\-11&8\end{pmatrix}, B^{-1}=\begin{pmatrix}4&-3\\-1&1\end{pmatrix}, C^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}, D^{-1}=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$, $E^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}, F^{-1}=\begin{pmatrix}-7&5&12&-19\\3&-2&-5&8\\41&-30&-69&111\\-59&43&99&-159\end{pmatrix}, G^{-1}=$ $\begin{pmatrix}154&-179&-205&235\\-36&42&48&-55\\6&-7&-8&9\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$. **2.** (a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-5&3\end{pmatrix}, B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{3}{20}\\-\frac{1}{5}&\frac{1}{10}\end{pmatrix}, C^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-2\\1&3\end{pmatrix}$.

3. $K^{-1}=\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix}\delta&-\beta\\-\gamma&\alpha\end{pmatrix}, L^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}, M^{-1}=\frac{1}{n-1}\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\\vdots&\cdots&\cdots&\cdots&\vdots\\1&1&\cdots&1&0\end{pmatrix}$, $N^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1&\cdots&(-1)^{n-1}\\0&1&-1&1&\cdots&(-1)^{n-2}\\0&0&1&-1&\cdots&(-1)^{n-3}\\\vdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\vdots\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$. **4.** $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1-i}{6}&\frac{1}{3}\\\frac{1+i}{3}&-\frac{i}{3}\end{pmatrix}, B^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\-i&2i\end{pmatrix}$, $C^{-1}=\frac{1}{1+9i}\begin{pmatrix}4&-1+i\\-2+3i&1\end{pmatrix}, D^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-i\\i&1\end{pmatrix}, E^{-1}=\frac{1}{-i}\begin{pmatrix}1&-2\\0&-i\end{pmatrix}$.

6. VEKTOROVÉ PODPROSTORY, LINEÁRNÍ ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST, LINEÁRNÍ OBALY

6.1 VEKTOROVÉ PODPROSTORY

1. (a) ne, neplatí (1); (b) ne, neplatí (1),(2). **2.** (a) ne, neplatí (1), (2); (b) ano. **3.** (a) ano; (b) ano. **4.** (a) ano; (b) ne, neplatí (2).

6.2 LINEÁRNÍ ZÁVISLOST A NEZÁVISLOST, LINEÁRNÍ OBALY

1. (a) LNZ; (b) LNZ; (c) LZ, $[u_1, u_2, u_3] = [u_1, u_2]$; (d) LNZ; (e) LNZ; (f) LZ, $[u_1, u_2, u_3, u_4] = [u_1, u_2, u_3]$. **2.** (a) v_1, v_2, v_3; (b) v_1, v_2, v_4, v_6. **3.** (a) LZ; (b) LZ; (c) LNZ; (d) LZ. **4.** (a) ne; (b) ano. **5.** (a) ano; (b) ne. **6.** (a) LNZ; (b) LZ; (c) LZ.

7. BÁZE A DIMENZE VEKTOROVÉHO PROSTORU, SOUŘADNICE, SOUČTY A PRŮNIKY PODPROSTORŮ

1. Stačí přidat např. (a) $(0,0,0,1)$; (b) x; (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.** (a) u_3; (b) žádný. **3.** (a) $(1,0,0)$, $(1,1,0), (1,2,3), \dim M = 3$; (b) $2x-1, x^3+x+1, x^2+x, \dim M = 3$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \dim M = 3$. **4.** např. $M = [(-1,1,0,...,0), (-1,0,1,...,0), ..., (-1,0,0,...,1)]$, $\dim M = n-1, \mathbf{R^n} = M \cup (1,0,...,0)$. **5.** (a) $\dim P = n-1$; (b) $\dim P = n-2$. **6.** (a) $P_1 = [x^4, x^2, 1], P_2 = [x^5, x^3, x], P_3 = [(x-1)(x-2)x^3, (x-1)(x-2)x^2, (x-1)(x-2)x, (x-1)(x-2)]$; (b) $[x^4 - 5x^2 + 4]$; (c) $[P_1] \cup [P_3]$. **7.** (b) např. $[P] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$; (c) $\alpha = [P] \cup \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (E)_\alpha = (1,0,-1,2)$. **9.** (a) $(-5,4,0)^T$; (b) $(0,1,1)^T$; (c) $(11,-3,67,-51)^T$; (d) $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$; (e) $(2,-1,3)^T$; (f) $(1,1,1,-2)^T$; (g) $(1,0,2,3)^T$; (h) $(1,1,-1,-1,3,-4)^T$. **10.** $(u)_\beta = (a_1, a_2, a_3 - a_2, a_4 - a_1)^T$. **11.** ozn. β – báze $P_1 + P_2$, γ – báze $P_1 \cap P_2$. (a) např. $\beta = \varepsilon_3, \dim(P_1 + P_2) = 3, \gamma = [(0,2,1),(1,4,0)]$; (b) např. $\beta = \varepsilon_3, \dim(P_1 + P_2) = 3, \gamma = [(3,5,7)]$; (c) např. $\beta = \varepsilon_4, \dim(P_1 + P_2) = 4, \gamma = \emptyset$; (d) např. $\beta = \varepsilon_4, \dim(P_1 + P_2) = 4, \gamma = [(1,-1,1,-1),(1,0,1,0)]$. **12.** $V_1 \cap V_2 = [(1,2,1,2)], (V_1 + V_2) \cap v = [(1,-2,3,-4)]$. **13.** $V_1 + V_2 + V_3 = [x^2 + 2x^3, -x^3 + x^6, 2 + x^2, x^2 + x^3 + 2x^4, x^2 + x^6, 1 + 3x^3 + x^5], V_1 \cap V_2 = [x^2 + x^6], V_1 \cap V_3 = [x^2 + x^3 + x^6], V_2 \cap V_3 = \emptyset \Rightarrow V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \emptyset$.

8. LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

1. (a), (b) ano pro $v = 0$, ne pro $v \neq 0$. **2.** (a), (c), (d) ne; (b) ano, $\mathrm{Ker}f = \{\emptyset\}, \mathrm{Im}f = [(2,1),(3,-1)], A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; (e) ano, $\mathrm{Ker}f = [(1,-1,-3)], \mathrm{Im}f = [(1,2,0),(-2,-1,3)]$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **3.** (a) ano, $\mathrm{Ker}A = \{\emptyset\}, \mathrm{Im}A = \mathbf{R_2}[x]$; (b) ano, $\mathrm{Ker}A = \mathbf{R_0}[x], \mathrm{Im}A = \{a_1 x + a_2 x^2, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$; (c) ano, $\mathrm{Ker}f = \{a + bx; a, b \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R_1}[x]$; (d) ne. **4.** (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, f(2,-5,3) =$

$(2,5,3)$; (f) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $f(3,-4) = (\frac{3-4\sqrt{3}}{2}, -\frac{3\sqrt{3}+4}{2})$; (g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $f(-2,1,2) = (-2, \frac{\sqrt{3}-2}{2}, \frac{1+2\sqrt{3}}{2})$. **5.** otočení o úhel $-\psi$. **6.** f je isomorfismus, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$. **7.** (a), (b) $\dim \mathrm{Ker} f = 2, \dim \mathrm{Im} f = 2$. **8.** $\dim \mathrm{Ker} f = 1, \dim \mathrm{Im} f = 3$. **9.** $f(x_1, x_2) = \frac{1}{7}(3x_1 - x_2, -9x_1 - 4x_2, 5x_1 + 10x_2), f(2,-3) = \frac{1}{7}(9,-6,-20)$. **10.** $(f)_{\varepsilon_3,\varepsilon_3} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{11}{14} & \frac{1}{14} \\ 1 & \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$, $f(x) = (-x_1 - \frac{2}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_3, \frac{1}{2}x_1 + \frac{11}{14}x_2 + \frac{1}{14}x_3, x_1 + \frac{2}{7}x_2 - \frac{3}{7}x_3)$. **11.** $f\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + 2a_3 - a_4$. **12.** (a) neexistuje; (b) existuje, $f(x) = \frac{1}{3}((4+a)x_1 + (-5+4a)x_2 + 3ax_3, (1+b)x_1 + (1+4b)x_2 + 3bx_3), a, b \in \mathbf{R}$. **13.** $\alpha_{\mathrm{Ker} f} = \{(9,-10,-7,8)\}, \alpha_{\mathrm{Im} f} = \{(5,0,0,1),(0,5,0,1),(0,0,1,0)\}$. **14.** $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$. **15.** $\dim \mathrm{Im}(V_1 \cap V_2) = 1, \alpha_{\mathrm{Im}(V_1 \cap V_2)} = \{(2,-3,1,-1,-3)\}, \dim(f^{-1}(W)) = 0$. **16.** (a) $(f(v_1))_\beta = (1,-2)^T, (f(v_2))_\beta = (3,5)^T$; (b) $f(v_1) = (5,-5)^T, f(v_2) = (-2,29)^T$; (c) $f(x_1,x_2) = \frac{1}{7}(18x_1 + x_2, -107x_1 + 24x_2)$; (d) $\frac{1}{7}(19,-83)$.

9. MATICE LINEÁRNÍHO ZOBRAZENÍ, MATICE PŘECHODU

1. $f(x) = (-2x_1 + x_2, x_2 - x_3, -x_3), f$ je isomorfismus. **2.** $(f)_{\gamma,\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$, $(f)_{\delta,\delta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **3.** (a) $(A)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $(A)_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 16 & -2 \\ 2 & -1 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, A je isomorfismus. **4.** (a) $(x)_\beta = (5,-1,5)^T$; (b) $(x)_\beta = (1,-4,5)^T$. **5.** $f \in \{-s + \frac{1}{2} + (-t + \frac{1}{2})x + sx^2 + tx^3; s, t \in \mathbf{R}\}$. **6.** $(f)_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **7.** $(\varphi)_{\delta,\gamma} = D^{-1}AC$, kde sloupce matic C a D jsou tvořeny vektory bazí γ a δ. **8.** (b) $\mathrm{Ker} f = \{x^2 + x + 1\}$; (c) $(f)_{\varepsilon,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

9. $f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(4x_1 - 2x_2, 2x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)$. **10.** (a) $(f)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; (b) $(f)_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **11.** (a) $(f)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{12} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{17}{12} & -\frac{17}{12} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $(w)_\beta = (\frac{19}{12}, -\frac{43}{12}, \frac{4}{3})^T$; (b)

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \frac{5}{2} \\ -2 & -3 & -\frac{1}{2} \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $(w)_\beta = (-\frac{7}{2}, \frac{23}{2}, 6)^T$. **12.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. **13.** (a) $f(x) = (x_1 + 2x_3, -x_1 + x_2)$; (b) $f(x) = (4x_1 + 2x_2 + 12x_3, -3x_1 - 3x_2 - 6x_3)$. **14.** $f(x) = (3, -12), f(y) = (-3, -21)$. **15.** $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^5}, g : \mathbf{R^5} \to \mathbf{R^3}$; zobrazení $f \circ g : \mathbf{R^5} \to \mathbf{R^5}$ je dáno maticí AB, nejedná se o isomorfismus, zobrazení $g \circ f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ je dáno maticí BA, jedná se o isomorfismus.

10. AFINNÍ GEOMETRIE

1. (a) $(x, y, z) = (-1, 1, 0) + t(1, 0, 2) + s(4, -1, 4)$; (b) $(x, y, z) = (1, 2, -3) + t(-1, 0, 4) + s(2, 1, -1)$; (c) $(x, y, z) = (3, 1, -2) + t(-1, 2, 1) + s(3, -4, 2)$. **2.** (a) $22x - y + 5z - 28 = 0$; (b) $x - 5y - a3z + 27 = 0$; (c) $x + y - 6 = 0$. **3.** (a) A, D; (b) B, C; (c) A, C, D. **4.** $p : (x, y, z) = (3, -3, 0) + t(0, 1, 1)$, svazek rovin: $a(2x - y + z - 9) + b(x + y - z) = 0, (a, b) \neq (0, 0)$. **5.** (a) $(7, 3, 0, 2) + t(1, -1, 1, 0)$; (b) $(3, 2, 3, 0) + t(-2, -1, 0, 1)$. **6.** (a) totožné; (b) různoběžné, $R = (-4, -3)$; (c) mimoběžné; (d) různoběžné, $R = (-3, 0, 4)$. **7.** (a) $x = 2 + 3t, y = 1 + t, z = -2t$; (b) totožné. **8.** (a) $(-2, -2, 3)$; (b) přímka leží v rovině; (c) mimoběžné; (d) přímka leží v rovině; (e) různoběžné, $P = (2, 0, 1, 1)$. **9.** (a) protínají se v bodě $(-\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}, 2, 5)$; (b) přímka leží v nadrovině; (c) protínají se v přímce $(1, 2, 3, 4) + t(2, 4, -9, 2)$. **10.** (a) $a = 3, b = 2$; (b) pro $a = \frac{11}{4}$ se protínají v přímce $(4, -\frac{21}{10}, 3, \frac{43}{10}) + t(10, -2, -5, 1)$, pro $a \neq \frac{11}{4}$ mimoběžné. **11.** (a) rovnoběžné; (b) protínají se v bodě $(0, 2, 2, -3, 0)$. **12.** (a) $x = 3 + t, y = -2, z = 13 + 8t$; (b) $x = 1 + 2t, y = -2 + t, z = 3 - t$; (c) $x - 4 = y - 1 = \frac{z+5}{2}$; (d) příčka neexistuje, přímky jsou totožné. **13.** $x = 3 + 5t, y = -2 + 10t, z = -4 + 9t$. **14.** $q : (3, 2, 1) + t(-1, -1, 3)$. **15.** (a) $(8, 9, -11, -15) + t(6, 7, -8, -11)$; (b) $q : (1, 2, -1, -2) + t(-2, 0, 2, 0)$; (c) $q : (1, 0, 3, 1) + s(6, -1, -3, -2)$. **16.** $q : (5, 3, 4, 6, 2) + t(2, 1, 3, 2, 1)$. **17.** příčka neexistuje. **18.** $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 0, -1, 0) + r(1, 2, 1, 1) + s(1, -2, 3, 0) + t(2, 0, 1, -1), -10x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 12x_4 = 2$. **19.** (a) $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, -x_1 - x_2 + x_4 = -1$; (b) $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, 4x_1 + x_3 + x_4 = 4$. **20.** (a) $X = (-1, 0, 2, 1)^T + p(2, 4, -9, 2)^T = (2, 3, 1, 3)^T + p(2, 4, -9, 2)^T$; (b) $X = (-9, 2, 1, -5)^T + p(3, 1, 2, 0)^T = (1, 2, 3, 4)^T + p(3, 1, 2, 0)^T$.

LITERATURA

[1] H. Anton, C. Rorres: Elementary Linear Algebra, 8th Edition, Applications Version, Willey, 2000.

[2] L. Bican: Lineární algebra, Matematický seminář SNTL, Praha, 1979.

[3] P. Kaprálik, J. Tvarožek: Zbierka riešených príkladov z lineárnej algebry a analytickej geometrie, Alfa, Bratislava, 1987.

[4] J. Slovák: Lineární algebra, elektronický učební text, http://www.math.muni.cz/~slovak, Brno, 1995.

[5] P. Zlatoš: Lineárna algebra a geometria, skripta MFF UK v Bratislavě, 1999.