Skalární součin

1. Skalární součin v $\mathbf{R}^2$ je definovaný standardně: $\langle (x_1, x_2) \mid (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$. Dokažte, že toto číslo je součinem velikostí vektorů a kosinu úhlu, který svírají.

2. Pro $\vec{u}, \vec{v} \in V$ nad $\mathbf{K}$ dokažte:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Longleftrightarrow ||\vec{u}|| \leq ||\vec{u} + a\vec{v}||, \quad \forall a \in \mathbf{K}.$$

3. Víme, že $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = 4$, $||\vec{u} - \vec{v}|| = 6$. Určete $||\vec{v}||$.

4. Rozhodněte, zda existuje skalární součin v $\mathbf{R}^2$, který by indukoval normu: $(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$.

5. Pro reálný vektorový V prostor dokažte:

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = \frac{1}{4} \left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2 \right), \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

6. Pro komplexní vektorový prostor V dokžte:

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = \frac{1}{4} \left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2 + ||\vec{u} + \mathrm{i}\vec{v}||^2 \mathrm{i} - ||\vec{u} - \mathrm{i}\vec{v}||^2 \mathrm{i} \right), \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

7. *Norma* na vektorovém prostoru V je funkce:$|| \cdot || : V \to \langle 0, \infty)$, splňující:

- $||\vec{u}|| = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{u} = \vec{o}$,
- $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$,
- $||\alpha \vec{u}|| = |\alpha| ||\vec{u}||$.

Jak skalární součin indukuje normu? Uveďte příklad normy, pro kterou neexistuje skalární součin, který by ji indukoval. Ukažte, že normu splňující „parallerogram equality“ lze indukovat skalárním součinem.

8. Na vektorovém prostoru spojicých funkcí na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ je definován skalární součin:

$$\langle f \mid g \rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x.$$

Ukažte, že systém funkcí

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ \ldots, \ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}. \ \ldots, \ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$$

je ortonormální.

9. Pomocí ortogonalizačního procesu ortogonalizujte standardní bázi v prostoru polynomů, je-li skalární součin definován jako určitý integrál ze součinu polynomů v mezích od nuly do jedné. Podobné příklady vymyslete i v jiných prostorech. Co se stane, když ortogonalizační proces aplikujeme na systém, který je závislý?

10. Dokažte, že v každém prostoru se skalárním součinem konečné dimenze existuje ortonormální báze.

11. Nechť $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ je ortonormální systém vektorů. Dokažte, že

$$||\vec{v}||^2 = |\langle \vec{v} \mid \vec{e}_1 \rangle|^2 + \ldots + |\langle \vec{v} \mid \vec{e}_n \rangle|^2$$

právě tehdy, když $\vec{v} \in [\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n]$.

12. Nalezněte ortonormální bázi v prostoru polynomů (skalární součin definován standardně integrálem) takovou, že operátor derivace je v ní reprezentován horní trojúhelníkovou maticí.

13. Jaký je vztah mezi dimenzí podprostoru a jeho ortogonálního doplňku. Dokažte.

14. Nechť pro lineární operátor platí: $P \circ P = P$ a každý vektor z jádra je ortogonální ke každému vektoru z obrazu. Ukažte, že P je ortogonální projekce.

15. Nechť pro lineární operátor platí: $P \circ P = P$ a $||P(\vec{v})|| \leq ||\vec{v}||$ pro každý vektor $\vec{v}$. Ukažte, že P je ortogonální projekce.

16. Ukažte, že podprostor U je invariantní vzhledem k lineárnímu operátoru T právě tehdy, když

$$P_U \circ T \circ P_U = T \circ P_U.$$

17. Ukažte, že podprostor U i jeho ortogonální doplněk jsou oba invariantní vzhledem k operátoru T právě tehdy, když P_U a T komutují.

18. V $\mathbf{R}^4$ je $U = [(1,1,1,2),(1,1,0,0)]$. Nalezněte vektor $\vec{u} \in U$ tak, aby vektor $(\vec{u} - (1,2,3,4))$ byl co nejmenší.

19. Nalezněte polynom p v prostoru polynomů stupně nejvýše 3 takový, že $p(0) = 0$, $p'(0) = 0$ a aby integrál $\int_0^1 [2 + 3x - p(x)]^2 \mathrm{d}x$ byl co nejmenší.

20. V prostoru polynomů stupně nejvýše dva nalezněte polynom q tak, že pro libovolný polynom p platí:

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^1 p(x) \cdot q(x) \mathrm{d}x.$$