Vlastní hodnoty a vlastní vektory

1. Nechť $T \in L(V,V)$ a podprostory $U_1, \dots, U_m$ jsou invariantní vzhledem k T. Ukažte, že jejich součet je invariantní vzhledem k T.

2. Ukažte, že průnik libovolného souboru podprostorů invariantních vzhledem k T je invariantní vzhledem k T.

3. Rozhodněte (a dokažte), zda platí následující tvrzení: Je-li U podprostor V invariantní vzhledem ke každému $T \in L(V,V)$, pak $U = \{\vec{o}\}$ nebo $U = V$.

4. Nechť $T, S \in L(V,V)$ komutují. Ukažte, že podprostor $\mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id})$ je invariantní vzhledem k S pro každé λ.

5. Nechť $T \in L(\mathbf{C}^2, \mathbf{C}^2)$, $T(z,w) = (w,z)$. Najděte jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory. (Podobně pro $T \in L(\mathbf{C}^3, \mathbf{C}^3)$, $T(x,y,z) = (2y, 0, 5z)$.)

6. Nechť $T \in L(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^n)$,

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \dots, x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Nalezněte jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory.

7. Nechť $T \in L(\mathbf{C}^\infty, \mathbf{C}^\infty)$, $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Nalezněte jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory.

8. Dokažte, že pro regulární $T \in L(V,V)$ je $\lambda \neq 0$ vlastní hodnotou T právě tehdy, když $1/\lambda$ je vlastní hodnotou T^{-1}.

9. Nechť $S, T \in L(V,V)$. Dokažte, že ST a TS mají stejné vlastní hodnoty.

10. Popište množinu všech lineárních zobrazení v $L(V,V)$, pro které platí, že každý vektor $\vec{v} \in V$ je jejich vlastním vektorem.

11. Popište množinu všech lineárních zobrazení v $L(V,V)$, pro které platí, že každý podprostor dimenze $(\dim V - 1)$ je vzhledem k nim invariantní.

12. Nechť $T, S \in L(V,V)$ jsou regulární. p je polynom (v odpovídajícím tělese). Ukažte, že:

$$p(STS)^{-1} = Sp(T)S^{-1}.$$

13. Nad $\mathbf{C}$: Nechť $T \in L(V,V)$, p je polynom. Ukažte, že a je vlastní hodnota $p(T)$ právě tehdy, když $a = p(\lambda)$ pro nějakou vlastní hodnotu λ zobrazení T.

14. Nad $\mathbf{C}$: Dokažte, že každé $T \in L(V,V)$ má invariantní podprostor dimenze j, pro libovolné $j = 1, \dots \dim V$.

15. Uveďte příklad regulárního lineárního operátoru, jehož matice v nějaké bázi má na diagonále samé nuly.

16. Uveďte příklad singulárního lineárního operátoru, jehož matice má v nějaké bázi na diagonále samá nenulová čísla.

17. Dokažte, že dva diagonalizovatelné operátory komutují právě tehdy, když mají stejný soubor vlastních vektorů. Je možné předpoklad diagonalizovatelnosti vynechat? (Zdůvodněte.)

18. Uveďte příklady operátorů v reálných vektorových prostorech různých dimenzí, které nemají žádný vlastní vektor. Ukažte, že každý invariantní podprostor vůči takovému operátoru musí mít sudou dimenzi.

19. Určete vlastní hodnoty projekce ($T^2 = T$) a involuce ($T^2 = \mathrm{Id}$).