Skalární součin

1. Definujte skalární součin a uveďte příklady a protipříklady.

2. Definujte normu vektoru (indukovanou skalárním součinem) a uveďte příklady a protipříklady.

3. Definujte odchylku dvou vektorů a uveďte příklady.

4. Definujte matici skalárního součinu. Jaké má vlastnosti? Uveďte příklady a protipříklady.

5. Definujte ortogonalitu vektorů, ortogonální a ortonormální bázi. Uveďte příklady a protipříklady.

6. Co je to ortogonální matice (resp. unitární matice). Uveďte příklady a protipříklady.

7. Dokažte následující vlastnosti skalárního součinu v Euklidových prostorech:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v} | \vec{o} \rangle &= 0, \\
\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle^2 &\leq \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \qquad \text{Schwarzova nerovnost} \\
\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle^2 &= \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \Leftrightarrow \vec{v} = k \cdot \vec{w}, k \in \mathbf{R}, \\
\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle^2 &= \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).
\end{aligned}$$

8. Dokažte následující vlastnosti normy indukované skalárním součinem.

$$\begin{aligned}
\|r \cdot \vec{v}\| &= |r| \cdot \|\vec{v}\|, \\
\|\vec{v} + \vec{w}\| &\leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|, \\
\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2) \quad \text{rovnoběžníková rovnost.}
\end{aligned}$$

9. Rozhodněte, zda $\langle \cdot | \cdot \rangle$ definuje skalární součin ve V nad $\mathbf{R}$, zdůvodněte:

a) $V = \mathbf{R}^2$, $\langle (x_1, y_1) | (x_2, y_2) \rangle = x_1 y_1 x_2 y_2$

b) $V = \{F : [0,1] \to \mathbf{R}\}$, $\langle f|g\rangle = f(1)g(0) + f(0)g(1)$

c) $V = P_n$ – polynomy stupně nejvýše n nad $\mathbf{R}$, $\langle p(x)|q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \ldots + p(n)q(n)$

d) $V = M_{22}$, $\langle A|B\rangle = \det(AB)$

e) $V = \mathbf{R}^3$, $\langle (x_1, x_2, x_3)|(y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$,

f) $V = \mathbf{C}$, $\langle z|w\rangle = zw^*$,

g) $V = P_n$ – polynomy stupně nejvýše n nad $\mathbf{R}$, $\langle p(x)|q(x)\rangle = p(0)q(0)$,

h) $V = M_{22}$, $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}A \cdot \mathrm{tr}B$.

10. Ve vektorovém prostoru V se zadaným skalárním součinem určete normu vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$, vektory normujte, vypočtěte jejich skalární součin a odchylku.

a) $V = \mathbf{R}^2$, $\vec{u} = (1,3)^T$, $\vec{v} = (0,4)^T$,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

b) $V = \mathbf{R}^2$, $\vec{u} = (3,-1)^T$, $\vec{v} = (2,2)^T$,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

c) $V = P_3[x]$, $\langle p|q\rangle = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$, $\vec{u} = x^3 + 1$, $\vec{v} = x - 2$,

d) $V = \mathrm{mat}_{2\times 3}$, $\langle \mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$,

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

11. Ortogonalizujte systém vektorů v prostorech se zadaným skalárním součinem:

a) $P_2[x]$ se skalárním součinem $\langle p|q\rangle = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$, $\vec{u} = 1$, $\vec{v} = x$, $\vec{w} = x^2$,

b) použijte vektory z příkladu 10,

c) $V = \mathbf{R}^4$, složky jsou zadány v ortonormální bázi, $\vec{u} = (1, 2, 0, 0)^T$, $\vec{v} = (0, 1, 0, -1)^T$, $\vec{w} = (-1, 0, 0, 1)^T$,

d) $V = \mathbf{R}^3$,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$\vec{u} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{v} = (0, 1, 0)^T$, $\vec{w} = (0, 0, 1)^T$.

12. Určete ortogonální doplněk k podprostorům, skalární součin je zadán:

a) $V = \mathbf{R}^3$, $L = [(1, 1, 0)^T]$, složky jsou v ortonormální bázi.

b) $V = \mathbf{R}^3$, $L = [(1, 1, 0)^T]$,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

c) použijte zadání příkladu 10, podprostor $L = [\vec{u}, \vec{v}]$.

13. Rozhodněte, zda následující systémy vektorů v prostorech se zadaným skalárním součinem jsou ortogonální nebo ortonormální:

a) Něco si vymyslete.

14. Uveďte příklad skalárního součinu na vektorovém prostoru matic a na vektorovém prostoru funkcí.

15. Ve vektorovém prostoru nad $\mathbf{R}$ ukažte, že $u + v$ je ortogonální k $u - v$ právě tehdy, když $\|u\| = \|v\|$. (Bude to platit také nad C?)

16. Určete ortogonální doplněk k podprostoru L v $\mathbf{R}^4$:
$L = [(1, 0, 1, 0)^T, (1, 1, 1, 0)^T]$, složky vektorů jsou zapsány v ortonormální bázi.

17. Ve vektorovém prostoru nad $\mathbf{R}$ ukažte, že u je ortogonální k v právě tehdy, když $\|u+v\| = \|u-v\|$. (Bude to platit také nad $\mathbf{C}$?)

18. Určete ortogonální doplněk k podprostoru L v $\mathbf{R^4}$:
$L = [(1,-1,2,0)^T, (-1,1,1,1)^T]$, složky vektorů jsou zapsány v ortonormální bázi.

19. Zadejte skalární součin ve V tak, aby uvedený systém vektorů byl ortonormální:

a) $V = \mathbf{R}^3$, $\vec{u} = (1,1,0)^T$, $\vec{v} = (0,1,1)^T$,

b) $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}$,

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Doplňte následující (ortogonální — prověřte) systém vektorů na ortogonální bázi V a vektory normujte.

a) Použijte ortogonalizovaných vektorů z příkladu 11.

b) $V = P_3[x]$, $\langle p|q\rangle = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$, $\vec{u} = x+1$, $\vec{v} = 9x-5$,

c) $V = \mathbf{R}^3$, $\vec{u} = (1,2,3)^T$, $\vec{v} = (-1,-1,1)^T$, složky jsou zadány v ortonormální bázi.

21. Určete vektor (všechny vektory), který bude mít s vektorem $\vec{u}$ odchylku $\varphi = \frac{\pi}{3}$, (resp. $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$), a stejnou velikost jako $\vec{u}$.

a) $V = \mathbf{R}^3$,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$\vec{u} = (4,-3)^T$,

b) $V = \mathbf{R}^3$, $\vec{u} = (1,2,1)^T$, složky jsou zapsány v ortonormální bázi,

c) $V = P_2[x]$, $\vec{u} = x$, skalární součin definován jako v příkadu 11a).