TENZORY

1.Nechť e_1, e_2, e_3 je báze vektorového prostoru $\mathcal{V}$, $\omega \in \mathcal{T}_2^2\mathcal{V}$:

$$\omega = 1e_1 \otimes e_1 \otimes e^2 \otimes e^1 +$$
$$+5e_2 \otimes e_1 \otimes e^2 \otimes e^2 + 3e_1 \otimes e_3 \otimes e^2 \otimes e^2 -$$
$$-5e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 \otimes e^2 - 2e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 \otimes e^2 -$$
$$-1e_3 \otimes e_2 \otimes e^3 \otimes e^3 + 4e_3 \otimes e_1 \otimes e^2 \otimes e^2$$

Nechť

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

je kovariantní metrika, zadaná v příslušné indukované bázi.

a) symetrizujte ω v horních indexech
b) antisymetrizujte ω v dolních indexech
c) úžete ω v prvém horním a druhém dolním indexu
d) úžete ω vektorovým argumentem $\xi = 1e_1 + e_3$ na druhé pozici
e) úžete ω kovektorovým argumentem $\xi = -\frac{1}{3}e^3 + e^2$ na druhé pozici
f) spočtěte všechny stopy výsledku příkladu d)
g) spočtěte všechny stopy výsledku příkladu e)
h) určete kontravariantní metriku (g^{ij})
i) snižte první horní index u tenzoru ω na pozici druhého dolního pomocí metriky
j) zvedněte dolní index výsledku příkladu c) na pozici druhého horního
(pozn. výsledky, pokud možno, vyjádřete stejnou formou jako je zadání, vždy napište, do jakého prostoru patří váš výsledek)

2. Jednu z výše použitých operací definujte, odvoďte vztahy pro složky a dokažte nezávislost na bázi.

3. Definujte tenzorový součin prostorů $T_1 \otimes T_2$. Lze každý tenzor z $T_1 \otimes T_2$ zapsat ve tvaru $\alpha \otimes \beta$, kde $\alpha \in T_1$, $\beta \in T_2$? Odpověď zdůvodněte.

4. Nalezněte bázi duální k bázi $e_1 = (2, -2, 0), e_2 = (1, 2, 3), e_3 = (0, 0, -1)$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Nalezněte složky lineární formy ω v této bázi, je-li $\omega(x) = x^1 + x^2 - 2x^3$.

5. Buď (e_i) báze ve $\mathcal{V}$, (e^i) báze ve $\mathcal{V}^*$, k ní duální, $\dim\mathcal{V} = n$. Vypočtěte:

a)$e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$
b)$e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
c)$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$
d)$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
e)$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$
f)$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
g)$\omega^1 \otimes \ldots \otimes \omega^k(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
h)$\omega^1 \otimes \ldots \otimes \omega^k(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$

6. Ukažte, že vztah $\xi \otimes \eta = \xi^i \eta^\alpha e_i \otimes f_\alpha$ je definován nezávisle navolbě báze.

7. Přepište následující vztahy do složek:
$(\xi + \eta) \otimes \lambda = \xi \otimes \lambda + \eta \otimes \lambda$
$\xi \otimes (\eta + \lambda) = \xi \otimes \eta + \xi \otimes \lambda$
$(c_1 \xi) \otimes (c_2 \eta) = c_1 c_2 \xi \otimes \eta$
Dokažte.

8. Určete složky tenzoru $\Delta = \delta^i_j f_i \otimes f^j$ vůči bázi $e_i \otimes e^j$, matice přechodu mezi bázemi je A.

9. Je operace tenzorového součinu tenzorů komutativní? Dokažte.

10. Lze každý tenzor jednoznačně vyjádřit ve tvaru součtu symetrického a antisymetrického?

11. Určete dimenzi prostoru (vše nad $\mathcal{R}^n$):
a) úplně symetrických k-tenzorů
b) úplně antisymetrických k-tenzorů
c) symetrických tenzorů ve dvou indexech
d) antisymetrických tenzorů ve dvou indexech
e)tenzorů typu $(1,2)$ symetrických ve spodních dvou indexech (tenzor torze)
f) tenzorů typu $(0,4)$ antisymetrických v prvních dvou indexech, v posledních dvou indexech a symetrických vůči záměně první a druhé dvojice indexů.
g) stejně jako f), ale navíc splňují rovnost $R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0$ (tenzor křivosti).

12 Sestavte úplně symetrický tenzor čtvrtého řádu, jehož všechny složky jsou invariantní vůči transformaci souřadnic.