TEST

1. Nechť $\vec{a} = (i, 1), \vec{b} = (0, i) \in \mathcal{V}_2$ v bázi (e_1, e_2). Definujte skalární součin tak, aby vektory $\vec{a}, \vec{b}$ byly ortogonální. Určete matici skalárního součinu v bázi (e_1, e_2).

2. $\mathbf{R}_n[x]$ je prostor polynomů stupně nejvýše n se skalárním součinem $\langle f|g\rangle = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$. Určete ortogonální průmět vektoru $f(x) = x^n + 1$ do podprostoru generovaného vektorem $g(x) = 1$.

3. Rozhodněte, zda matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ lze reprezentovat v diagonálním tvaru. Zdůvodněte. Bez výpočtu určete vlastní hodnoty a dimenze prostorů generovaných vlastními vektory, reprezentuje-li tato matice jisté lineární zobrazení ve $\mathcal{V}^3$.

4. Rozhodněte, zda matice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ jsou podobné. Zdůvodněte.

5. Zapište elementární matici, která realizuje úpravu polynomické matice 4. řádu, spočívající v přičtení $(\lambda + 1)$-násobku 3. řádku k dvojnásobku 1. řádku. Zapište úpravu ve tvaru maticového násobení.

6. Určete invariantní faktory matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \lambda^4 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$. Je tato matice unimodulární?

7. Lineární transformace ve V_3 nad $\mathbf{C}$ má právě dvě vlastní hodnoty $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 2$. Jaké možnosti Jordanova normálního tvaru připadají v úvahu pro tuto transformaci (pořadí bloků neuvažujte), jestliže víme, že podprostor vlastních vektorů příslušných hodnotě λ_1 má dimenzi jedna. Zapište k nim příslušné kanonické tvary charakteristické matice a uveďte u každého z nich, jaké jsou násobnosti jednotlivých vlastních hodnot.

8. Číslo λ_1 je dvojnásobným a λ_2 jednonásobným charakteristickým kořenem lineárního samoadjungovaného zobrazení $\varphi : \mathcal{U}_3 \to \mathcal{U}_3$. Vektory $\vec{a} = (1, i, 0), \vec{b} = (0, 0, 1)$ jsou vlastní vektory příslušné λ_1. Rozhodněte, zda vektor $\vec{c} = (1, i, i)$ je rovněž vlastním vektorem příslušným λ_1. Zdůvodněte. Určete vlastní vektor příslušný λ_2.

9. Matice skalárního součinu v bázi (e_1, e_2) je $G = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$. Uveďte příklad zobrazení (zadáním jeho matice v téže bázi), které
a) je ortogonální,
b) není ortogonální.

10. Jaké vlastní hodnoty může mít operátor f, pro který platí $f \circ f \circ f = -f$
a) nad $\mathbf{R}$,
b) nad $\mathbf{C}$.