PODZIM 2009 2 **Skupina A**

Zkouška M1100, středa 6.1.2010, 8:00–10:00 hodin

1. část (praktická)

1. (1 bod) Určete všechny hromadné body posloupnosti
$$a_n = n^{\cos(n\pi/2)}.$$

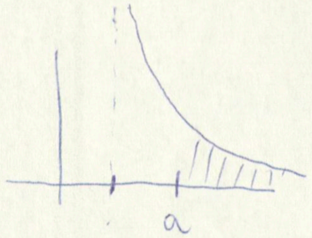
2. (1 bod) Určete definiční obor funkce f a funkce f'. Funkci f' zjednodušte.
$$f(x) = \ln\left(\ln(13 - \sqrt{169 - x^2})\right).$$

3. (1 bod) Vypočtěte následující limity
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, \quad (m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq 0,\ n \neq 0).$$
[Uvažte různé možnosti znamének pro exponenty m a n a využijte vztah $x^k = \frac{1}{x^{-k}}$ pro $k < 0$.]

4. (1 bod) Půdorys divadelního jeviště je sjednocením obdélníka, půlkruhu a dvou čtvrtkruhů, přičemž půlkruh přiléhá k jedné straně obdélníka a čtvrtkruhy přiléhají ke dvěma rovnoběžným stranám obdélníka (viz obr.). Celkový obvod půdorysu je $\ell = 100$ metrů. Určete rozměry půdorysu jeviště, víte-li, že byly stanoveny tak, aby byla plocha jeviště co největší. Určete také tuto maximální plochu jeviště. Pro jednoduchost počítejte s hodnotou $\pi \approx 3$.

5. (2 body) Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Druhá derivace funkce f je
$$f''(x) = \frac{-8 + 3\ln x}{4x\sqrt{x}}.$$
Pro výpočty můžete použít $e^2 \approx 7.39$, $e^{8/3} \approx 14.39$, $\frac{2}{e} \approx 0.74$, $\frac{8}{3e^{4/3}} \approx 0.70$, $\frac{1}{3e^4} \approx 0.01$.

6. (1 bod) Určete primitivní funkci k
$$f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}.$$
[Jedna z možností výpočtu je univerzální substituce $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.]



7. (1 bod) Uvažujme funkci
$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 1} \quad \text{pro } x \in (a, \infty),$$
kde $a \geq 1$ je parametr. Tato funkce je nezáporná. Pomocí vhodného nevlastního integrálu určete plochu mezi grafem funkce f a osou x na intervalu (a, ∞).

8. (2 body) Uvažujme čtverec s délkou hrany a ($a > 0$) umístěný svým levým dolním rohem do počátku souřadné soustavy (viz obr.). Plocha tohoto čtverce je pokryta hmotou tak, že specifická hmotnost v bodě $[x, y]$ ($x, y \in [0, a]$) je přímo úměrná vzdálenosti bodu x od počátku, tj. $s(x) = kx$ ($k > 0$). Určete polohu těžiště tohoto čtverce.

$$\int_a^\infty \frac{2}{x^2-1}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{|x-1|}{|x+1|}\right]_a^b = \boxed{\ln\frac{a+1}{a-1}}$$

$Ax - A + Bx + B$

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$$

PODZIM 2009 3 **Skupina A**

Zkouška M1100, středa 20.1.2010, 8:00–10:00 hodin

1. část (praktická)

1. (1 bod) Určete všechny hromadné body posloupnosti
$$a_n = n^{\cos(n\pi/2)}.$$

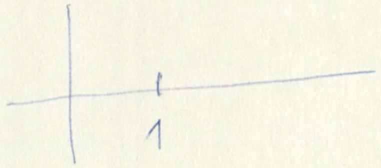
2. (1 bod) Určete definiční obor funkce f a funkce f'. Funkci f' zjednodušte (odstraňte složené zlomky).
$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} - \ln\left(3 - \sqrt{9 - x^2}\right).$$

3. (1 bod) Vypočtěte následující limity
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, \quad (m, n \in \mathbb{Z},\ m \neq 0,\ n \neq 0).$$
[Uvažte různé možnosti znamének pro exponenty m a n a využijte vztah $x^k = \frac{1}{x^{-k}}$ pro $k < 0$.]

4. (1 bod) Ramena a menší základna lichoběžníku mají velikost $a = 2$ cm (viz obr.). Určete velikost b jeho větší základny tak, aby byl obsah lichoběžníku maximální.

5. (2 body) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = e^{-\frac{6}{x^2}}.$$
[Pro výpočty můžete použít $e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.22$.]

6. (1 bod) Určete primitivní funkci k
$$f(x) = \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[3]{x}}.$$



7. (1 bod) Uvažujme funkci
$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3} \quad \text{pro } x \in [1, \infty).$$
Tato funkce je nezáporná. Pomocí srovnávacího kritéria pro nevlastní integrály určete horní odhad pro plochu mezi grafem funkce f a osou x na intervalu $[1, \infty)$. Přímým výpočtem pak určete jeho přesnou velikost této plochy.

8. (2 body) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce
$$f(x) = e^{3x}\sqrt{\sin(6\pi x)}$$
kolem osy x na intervalu $[0, \frac{1}{6}]$. (Viz obr.)

Doplňková (nepovinná) otázka: Určete obvod největší kružnice, kterou lze dostat na svislém řezu tohoto tělesa. [Nápověda pro doplňkovou otázku: Uvědomte si, že funkce $\operatorname{tg} x$ je periodická s periodou π a že záporné hodnoty funkce $\operatorname{arctg} x$ lze eliminovat přičtením periody nebo jejího vhodného násobku k argumentu (tj. použitím jiné větve funkce $\operatorname{tg} x$, než jakou bereme obvykle). Při výpočtu použijte $\operatorname{arctg}\pi \approx 1.26$.]

$$P < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^\infty$$

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}\,dx = \left|\begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = \frac{1}{x^3} & v = -\frac{1}{2x^2}\end{matrix}\right|$$

PZ

$$= \frac{-\operatorname{arctg} x}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^2(1+x^2)}\,dx$$