Zkouška M1100, 26.1.2016 (praktická část)

Skupina B

1. (1 bod) Udejte příklad posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ takových, že
   (a) $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, $\lim_{n\to\infty} b_n$ neexistuje, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ existuje (vlastní),
   (b) $\lim_{n\to\infty} c_n$ neexistuje, $\lim_{n\to\infty} d_n$ neexistuje, $\lim_{n\to\infty} c_n d_n$ existuje (nevlastní).
   Současně určete všechny hromadné body posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$.

$\nexists$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ (1

0.5

$d_n \nexists$, $\lim_{n\to\infty} c_n d_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$

0.5

1.0

2. (1 bod) Pomocí metod diferenciálního počtu určete, jestli existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x^2} = c + \operatorname{arctg}(1+x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$
Pokud ano, tuto konstantu c určete.

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x^2}\right)'$$

$$= \frac{1}{\frac{(1+x^2)^2+1}{\cancel{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-1}{\cancel{(1+x^2)^2}} \cdot 2x$$

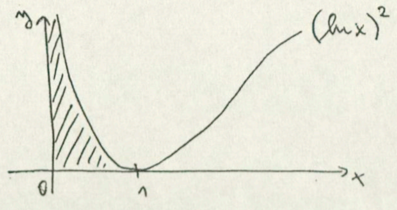
STEJNÉ!

$$\frac{-2x}{1+(1+x^2)^2}$$

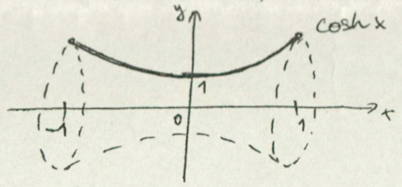
3. (1.5 bodu) Krejčí má látku tvaru půlkruhu o poloměru $r = 20$ cm. Z něj chce vystřihnout dekoraci tvaru obdélníku. Aby se látka co nejlépe využila, je potřeba vystřihnout obdélník s co největším obsahem. Poraďte krejčímu, jaké rozměry má zvolit.

4. (3 body) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = -1 + \sqrt[3]{1-x^3}, \qquad \text{přičemž} \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1-x^3)^{5/3}}.$$

5. (1.5 bodu) Určete plochu P, která je sevřená mezi graf funkce $f(x) = (\ln x)^2$ a osy x, y na intervalu $[0,1]$. Viz také bonusový Příklad 7 uvedený níže.



6. (2 body) Vypočtěte objem a obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy pod grafem funkce $f(x) = \cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ na intervalu $[-1,1]$ kolem osy x. Uvedená funkce se nazývá řetězovka, protože modeluje volně visící řetěz (volně visící lano).



7. (Bonusový příklad, +1 bod k Příkladu 5) Určete plochu P_n (včetně znaménka), která je sevřená mezi graf funkce $f(x) = (\ln x)^n$ a osy x, y na intervalu $[0,1]$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Zkouška M1100, 26.1.2016 (praktická část)

Skupina A

1. (1 bod) Udejte příklad posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ takových, že
   (a) $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, $\lim_{n\to\infty} b_n$ neexistuje, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ existuje (vlastní),
   (b) $\lim_{n\to\infty} c_n$ neexistuje, $\lim_{n\to\infty} d_n$ neexistuje, $\lim_{n\to\infty} c_n d_n$ existuje (nevlastní).
   Současně určete všechny hromadné body posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$.

$\nexists$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ (1

0.5

$d_n \nexists$, $\lim_{n\to\infty} c_n d_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$

0.5

1.0

2. (1 bod) Pomocí metod diferenciálního počtu určete, jestli existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že
$$\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x^2} = c - \operatorname{arctg}(1+x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$
Pokud ano, tuto konstantu c určete.

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x^2}\right)'$$

$$= \frac{1}{\frac{(1+x^2)^2+1}{\cancel{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-1}{\cancel{(1+x^2)^2}} \cdot 2x$$

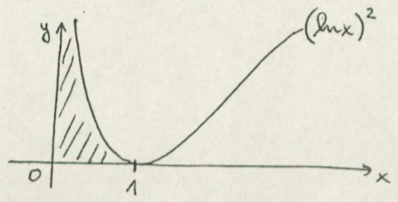
STEJNÉ!

$$\frac{-2x}{1+(1+x^2)^2}$$

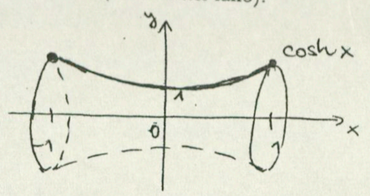
3. (1.5 bodu) Krejčí má látku tvaru půlkruhu o poloměru $r = 10$ cm. Z něj chce vystřihnout dekoraci tvaru obdélníku. Aby se látka co nejlépe využila, je potřeba vystřihnout obdélník s co největším obsahem. Poraďte krejčímu, jaké rozměry má zvolit.

4. (3 body) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{1-x^3}, \qquad \text{přičemž} \quad f''(x) = \frac{2x}{(1-x^3)^{5/3}}.$$

5. (1.5 bodu) Určete plochu P, která je sevřená mezi graf funkce $f(x) = (\ln x)^2$ a osy x, y na intervalu $[0,1]$. Viz také bonusový Příklad 7 uvedený níže.



6. (2 body) Vypočtěte objem a obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy pod grafem funkce $f(x) = \cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ na intervalu $[-1,1]$ kolem osy x. Uvedená funkce se nazývá řetězovka, protože modeluje volně visící řetěz (volně visící lano).



7. (Bonusový příklad, +1 bod k Příkladu 5) Určete plochu P_n (včetně znaménka), která je sevřená mezi graf funkce $f(x) = (\ln x)^n$ a osy x, y na intervalu $[0,1]$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.