

Zkouška M1100, středa 20.1.2010, 10:00–11:00 hodin

2. část (teoretická)

1. (1.5 bodu) Uvažujme posloupnost

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Definujte pojem limity posloupnosti a_n . Podle této definice určete $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 (b) Zformulujte větu o třech limitách pro posloupnosti a pro funkce.
 (c) Odvoďte následující limitu (bez použití l'Hospitalova pravidla):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. (1 bod)

- (a) Definujte pojem spojitosti funkce f v bodě x_0 a pojem derivace funkce f v bodě x_0 .
 (b) Dokažte následující větu: Má-li funkce f vlastní derivaci v bodě x_0 , potom je v bodě x_0 spojitá.
 (c) Uveďte příklad funkce, která má v nějakém bodě nevlastní derivaci, a přitom je v tomto bodě spojitá/nespojité.

3. (1.5 bodu)

- (a) Definujte pojem primitivní funkce k funkci f na intervalu I .
 (b) Zformulujte větu o existenci primitivní funkce. Na čem (z teorie Riemannova integrálu) je důkaz této věty založen?

4. (1 bod) Uvažujme funkci $f(x) = \sqrt{x}$ na intervalu $[0, 25]$.

- (a) Pro dělení \mathcal{D} intervalu $[0, 25]$ dané jako $\mathcal{D} := \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$ vypočítejte příslušný dolní a horní Riemannův součet. Nakreslete obrázky těchto součtů.
 (b) Je tato funkce Riemannovsky integrovatelná na intervalu $[0, 25]$? Pokud ano, podle které věty (zformulujte ji)?

Zkouška M1100, středa 6.1.2010, 10:00–11:00 hodin

2. část (teoretická)

1. (1.5 bodu) Uvažujme posloupnost

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Definujte pojem limity posloupnosti a_n . Podle této definice určete $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 (b) Definujte pojem hromadného bodu posloupnosti. Jaký je vztah mezi hromadnými body a limitou posloupnosti?
 (c) Co je to Cauchyovská posloupnost a jaký je vztah Cauchyovských a konvergentních posloupností.

2. (1 bod)

- (a) Zformulujte větu o l'Hospitalově pravidle.
 (b) Uveďte konkrétní příklady, kdy l'Hospitalovo pravidlo nelze použít, protože nejsou splněny předpoklady věty.

3. (1.5 bodu)

- (a) Definujte pojem primitivní funkce k funkci f na intervalu I .
 (b) Zformulujte a dokažte integrační metodu per-partes a jednu z vět o substituci pro neurčitý integrál.

4. (1 bod)

- (a) Je každá funkce Riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$? Pokud ne, jaké funkce jsou integrovatelné? Případně uveďte příklad funkce, která není Riemannovsky integrovatelná.
 (b) Popište aplikace Riemannova integrálu v geometrii a fyzice.