

Zkouška M1100, středa 20.1.2010, 10:00–11:00 hodin

## 2. část (teoretická)

1. (1.5 bodu) Uvažujme posloupnost

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Definujte pojem limity posloupnosti  $a_n$ . Podle této definice určete  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .  
 (b) Zformulujte větu o třech limitách pro posloupnosti a pro funkce.  
 (c) Odvoďte následující limitu (bez použití l'Hospitalova pravidla):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. (1 bod)

- (a) Definujte pojem spojitosti funkce  $f$  v bodě  $x_0$  a pojem derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$ .  
 (b) Dokažte následující větu: Má-li funkce  $f$  vlastní derivaci v bodě  $x_0$ , potom je v bodě  $x_0$  spojitá.  
 (c) Uveďte příklad funkce, která má v nějakém bodě nevlastní derivaci, a přitom je v tomto bodě spojitá/nespojité.

3. (1.5 bodu)

- (a) Definujte pojem primitivní funkce k funkci  $f$  na intervalu  $I$ .  
 (b) Zformulujte větu o existenci primitivní funkce. Na čem (z teorie Riemannova integrálu) je důkaz této věty založen?

4. (1 bod) Uvažujme funkci  $f(x) = \sqrt{x}$  na intervalu  $[0, 25]$ .

- (a) Pro dělení  $\mathcal{D}$  intervalu  $[0, 25]$  dané jako  $\mathcal{D} := \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$  vypočítejte příslušný dolní a horní Riemannův součet. Nakreslete obrázky těchto součtů.  
 (b) Je tato funkce Riemannovsky integrovatelná na intervalu  $[0, 25]$ ? Pokud ano, podle které věty (zformulujte ji)?

Zkouška M1100, středa 6.1.2010, 10:00–11:00 hodin

## 2. část (teoretická)

1. (1.5 bodu) Uvažujme posloupnost

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Definujte pojem limity posloupnosti  $a_n$ . Podle této definice určete  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .  
 (b) Definujte pojem hromadného bodu posloupnosti. Jaký je vztah mezi hromadnými body a limitou posloupnosti?  
 (c) Co je to Cauchyovská posloupnost a jaký je vztah Cauchyovských a konvergentních posloupností.

2. (1 bod)

- (a) Zformulujte větu o l'Hospitalově pravidle.  
 (b) Uveďte konkrétní příklady, kdy l'Hospitalovo pravidlo nelze použít, protože nejsou splněny předpoklady věty.

3. (1.5 bodu)

- (a) Definujte pojem primitivní funkce k funkci  $f$  na intervalu  $I$ .  
 (b) Zformulujte a dokažte integrační metodu per-partes a jednu z vět o substituci pro neurčitý integrál.

4. (1 bod)

- (a) Je každá funkce Riemannovsky integrovatelná na intervalu  $[a, b]$ ? Pokud ne, jaké funkce jsou integrovatelné? Případně uveďte příklad funkce, která není Riemannovsky integrovatelná.  
 (b) Popište aplikace Riemannova integrálu v geometrii a fyzice.