

I. část (Každý příklad 1 bod.)

1. Určete kořeny polynomu $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2$
2. Určete definiční obor funkce $y = \arccos \frac{x-1}{x+1}$
3. Definiujte co je hromadný bod posloupnosti a_n , a udejte příklad posloupnosti mající právě 3 hromadné body.
4. Udejte příklad funkci f, g takových, že $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x) = -1$.
5. Rozhodněte (pomocí druhé derivace) zda funkce $y = \frac{x-2}{x}$ je v okolí bodu s x -ovou souřadnicí $x_0 = 1$ konvexní nebo konkávní.
6. Určete rovnici tečny ke křivce zadané parametricky $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ v bodě daném hodnotou parametru $t_0 = \frac{\pi}{4}$.
7. Vypočítejte $\int_0^{2\sqrt{2}} x\sqrt{1+x^2} dx$.
8. Integrál
$$\int \frac{\sin x}{\sin x + 2 \cos x} dx$$
 převedte vhodnou substitucí na integrál z racionální funkce (vzniklý integrál z racionální funkce již nepočítejte).
9. Vypočítejte $\int_0^1 \arcsin x dx$.
10. Rozhodněte o konvergenci/divergenci/nevlastního integrálu $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

II. část

1. (4 b.) Derivujte a upravte

$$y = 4 \lg \frac{x}{1 + \sqrt{1 - 4x^2}} - \frac{\sqrt{1 - 4x^2}}{x^2}$$

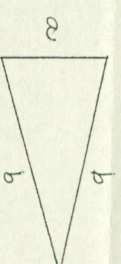
2. (3 body) Do koule s poloměrem R vepíše válec s maximálním objemem. Tento maximální objem určete.

3. (3 body) Určete plochu rovinného obrazce daného nerovnostmi $y \geq -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ a $x^2 + y^2 \leq 1$.

Zkouška M1100, středa 5.1.2011, 9:00–10:50 hodin

I. část (praktická)
Skupina B

1. (1 bod) Určete všechny hromadné body posloupnosti $b_n = 2^n \sin(\pi/2^n)$.
Určete také $\lim \inf b_n$ a $\lim \sup b_n$.
2. (1 bod) Určete derivaci funkce $f(t)$. Funkci $f'(t)$ zjednodušte.
 $f(t) = (t^4 + 1) \arctg \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$.
3. (1 bod) Vypočítejte následující limity
Pokud neznáte derivaci funkce $\arctg x$, můžete Vám ji za 0,5 bodu sdělit.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 4x^2 + 3x^3}{2 + 2x - x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \cos x}{x + \sin x}$$
4. (1,5 bodu) Architekt navrhuje zahrádku ve tvaru rovnostranného trojúhelníka (viz obr.), který má obsah $S = 16\sqrt{3}$ čtverečních metrů. Určete délky stran zahrady tak, aby byl obvod za daných podmínek minimální, tj. aby bylo potřeba co nejméně plotu na jeho oplotení.



5. (2 body) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{x+1}$$

Pokud neznáte derivaci funkce $\arctg x$, můžete Vám ji za 0,5 bodu sdělit.

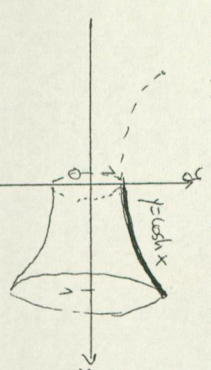
6. (1 bod) Vypočítejte

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^4 x dx.$$

Nápowěda: $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

7. (1 bod) Pomocí vhodného nevlastního integrálu vypočítejte plochu mezi grafem funkce a osou x na intervalu $[0, \infty)$.
 $g(x) = x e^{-3x}$

8. (1,5 bodu) Vypočítejte povrch rotačního tělesa tvaru vázy (včetně podstavy), které vznikne rotací plochy mezi grafem tetážovky $f(x) = \cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ a osou x na intervalu $[0, 1]$ kolem osy x , viz obr.



Jméno a příjmení: _____
UČO: _____

Zkouška M1100, středa 19.1.2011, 9:00–10:50 hodin

I. část (praktická)
Skupina B

Hodnocení: Zkoušková písemka (praktická) má maximum 10 bodů.

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ 1.

Instrukce ke zkoušce (čtete prosím pozorně):

Před začátkem zkoušky:

- Připravte si prosím psací potřeby a ISIC.
- Vypněte prosím mobil a odložte ho mimo pracovní plochu. Kalkulačky nejsou povoleny.
- Čitelně podepíšte vpravo nahoře všechny listy, které používáte. Pokud by se některý list zatoulal, můžeme ho pak správně přiřadit.
- Všechny své výpočty čádně zdůvodněte! Píšte čitelně a přehledně.
- Pokud potřebujete jít na WC, běžte ted hned! Po přechení zadání už to nebude možné (pokud neukončíte práci dříve).
- Zkouška končí v 10:50 přesně.

Před odevzdáním:

- Proškrtněte v tabulce nahoře políčka pro hodnocení příkladů, které jste vůbec nepočítali.
- Otišlujte stránky, jak následují za sebou. Sešitkou (kterou jste si měli přinést) severakněte vše, co odevzdáváte, v levém horním rohu (včetně tohoto úvodního listu).
- Odevzdáváte všechny papíry, včetně těch, které používáte na pomocné výpočty.
- Zadání zkoušky bude zveřejněno v Isu ve studijních materiálech.

I. část (Každý příklad 1 bod.)

1. Určete rozklad na parciální zlomky s neurčitými koeficienty (tyto koeficienty *nepočítejte!*) racionální funkce $\frac{x}{x^2+2x+1}$.
2. Řešte rovnici $\arcsin(x^2 - \frac{3}{2}x + 1) = \frac{\pi}{6}$.
3. Vypočítejte $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n^2 + 2n} - n)$.
4. Určete intervaly, kde je funkce $f(x) = \lg(x^2 - 2x + 2)$ prostá a na těchto intervalech určete inverzní funkci.
5. Pomocí vztahu pro derivaci inverzní funkce odvoďte vzorec pro derivaci $|\lg x|^x$.
6. Vypočítejte $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.
7. Určete počet reálných kořenů rovnice $x^3 - 12x + 8 = 0$ (využijte funkcíních hodnot v lokálních extrémech a Bolzanovu větu).
8. Vypočítejte $\int_1^e \lg x dx$.
9. Určete plochu obrazce omezeného grafem funkce $f(x) = -x^2 - x + 2$ a osou x .
10. Určete pro která α konverguje nevlastní integrál $\int_0^2 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$.

II. část

1. (3 body) Vyšetřete průběh funkce

$$y = \frac{\lg x^x}{x}$$

2. (4 body) Vypočítete obvod "křivočarého" trojúhelníka, jehož jedna strana je tvořena úsečkou osy x mezi body $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$ a zbyývající dvě strany jsou tvořeny částmi grafů funkcí $y = \ln(\sin x)$, $y = \ln(\cos x)$ (načrtněte obrázek tohoto křivočarého trojúhelníka, zejména určete průsečík grafů $y = \ln(\sin x)$, $y = \ln(\cos x)$).

3. (3 body) Vypočítejte

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$