PODZIM 2009 $\boxed{1}$

Zkouška M1100, pondělí 21.12.2009, 10:00–12:00 hodin

1. část (praktická)

Skupina A

1. (1 bod) Určete všechny hromadné body posloupnosti
$$a_n = \sqrt[n]{2 + (3^n)^{(-1)^n}}.$$

2. (1 bod) Určete definiční obor funkce f a funkce f'. Funkci f' zjednodušte.
$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} - 2\arccos\frac{x}{2}.$$

3. (1 bod) Vypočtěte následující limity
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{e^{3x} - \cos(3x)}, \qquad \lim_{x\to -3}\frac{6 - x^2}{(x^2 - 9)(x^3 + 27)}, \qquad \lim_{x\to 1^+}(\ln x)^{x-1}.$$

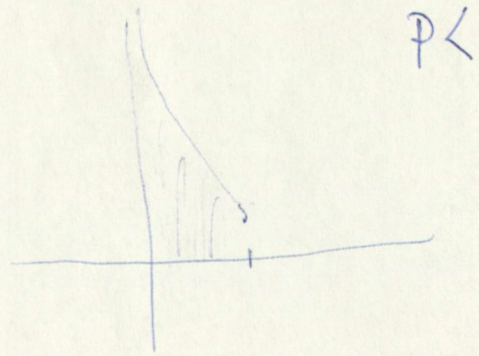
4. (1 bod) Půdorys divadelního jeviště je sjednocením obdélníka a půlkruhu, přičemž průměr půlkruhu je stejně velký jako jedna strana obdélníka (viz obr.). Celkový obvod půdorysu je 42 metrů. Určete rozměry půdorysu, víte-li, že byly stanoveny tak, aby byla plocha jeviště co největší. Určete také tuto maximální plochu jeviště. Pro jednoduchost počítejte s hodnotou $\pi \approx 3$.

5. (2 body) Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}\, e^{-x/3}$. První a druhá derivace funkce f jsou
$$f'(x) = \frac{1 - x}{3\sqrt[3]{x^2}}\, e^{-x/3}, \qquad f''(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{9x\sqrt[3]{x^2}}\, e^{-x/3}.$$
Pro výpočty můžete použít $\sqrt{3} \approx 1.73$, $e^{-1/3} \approx 0.72$, $f(1 - \sqrt{3}) \approx -0.71$, $f(1 + \sqrt{3}) \approx 0.56$.

6. (1 bod) Určete primitivní funkci k
$$f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x - 2}{x^4 - 1}.$$

7. (1 bod) Uvažujme funkci
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left|\cos\frac{1}{x}\right| \quad \text{pro } 0 < x \le 1, \quad f(0) = 0.$$
Tato funkce je nezáporná. Pomocí vhodného nevlastního integrálu odhadněte plochu mezi grafem funkce f a osou x na intervalu $[0, 1]$.

8. (2 body) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené mezi graf funkce $f(x) = x\ln x$ a osu x kolem osy x (viz obr.). Počítejte s hodnotou $\pi \approx 3$.



$$P < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$= \lim_{A\to 0+}\left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = \underline{\underline{2}}$$

PODZIM 2009 $\boxed{1}$

Zkouška M1100, pondělí 21.12.2009, 12:00–13:00 hodin

2. část (teoretická)

Skupina A

1. (2 body) Uvažujme funkci $f(x) = \sqrt{x}$.
   (a) Definujte pojem limity funkce f v bodě $x_0 = 1$. Podle této definice určete $\lim_{x\to 1} f(x)$.
   (b) Definujte pojem spojitosti funkce f v bodě $x_0 = 1$. Podle této definice určete, jestli je funkce f spojitá v bodě $x_0 = 1$.
   (c) Definujte pojem derivace funkce f v bodě $x_0 = 1$ a pojem derivace zprava funkce f v bodě $x_1 = 0$. Podle této definice vypočtěte $f'(1)$ a $f'_+(0)$.

2. (1 bod)
   (a) Zformulujte věty o střední hodnotě diferenciálního počtu (Rolleovu a Lagrangeovu) a rozeberte jejich obsah na obrázku.
   (b) Dokažte následující tvrzení: Nechť má funkce f na otevřeném intervalu I vlastní derivaci a platí $f'(x) < 0$ pro každé $x \in I$. Potom je funkce f klesající na intervalu I.
   (c) Definujte pojem inflexní bod funkce f.

3. (1 bod)
   (a) Definujte pojem primitivní funkce k funkci f na intervalu I. Určete primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x) = \sqrt{x}$ a dále určete interval I, na kterém tento jejich vztah platí.
   (b) Zformulujte větu o existenci primitivní funkce.

4. (1 bod)
   (a) Popište konstrukci Riemannova integrálu (Riemannovy součty, dolní Riemannův integrál, horní Riemannův integrál, Riemannův integrál) pro funkci $f(x) = \sqrt{x}$ na intervalu $[0, 4]$.
   (b) Zformulujte větu o střední hodnotě integrálního počtu. Na obrázku rozeberte obsah této věty pro funkci $f(x) = \sqrt{x}$ na intervalu $[0, 4]$.