Matematická analýza I, 9. 1. 2008

I. část (Každý příklad 1 bod.)

1. Určete rozklad na parciální zlomky s neurčitými koeficienty (tyto koeficienty *nepočítejte!*) racionální funkce $\frac{1}{x(x^4+2x^2+1)}$.
2. Řešte rovnici $\arcsin(x^2 - \frac{3}{2}x + 1) = \frac{\pi}{6}$.
3. Vypočtěte $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n} - n)$.
4. Určete intervaly, kde je funkce $f(x) = \lg(x^2 - 2x + 2)$ prostá a na těchto intervalech určete inverzní funkci.
5. Pomocí vztahu pro derivaci inverzní funkce odvoďte vzorec pro derivaci $[\lg x]'$.
6. Vypočtěte $\lim_{x\to 0+} x^x$.
7. Určete počet reálných kořenů rovnice $x^3 - 12x + 8 = 0$ (využijte funkčních hodnot v lokálních extrémech a Bolzanovu větu).
8. Vypočtěte $\int_1^e \lg x\, dx$.
9. Určete plochu obrazce omezeného grafem funkce $f(x) = -x^2 - x + 2$ a osou x.
10. Určete pro která α konverguje nevlastní integrál $\int_0^2 \frac{dx}{x^{2\alpha-1}}$.

II. část

1. (3 body) Vyšetřete průběh funkce
$$y = \frac{\lg x^2}{x}.$$
2. (4 body) Vypočtěte **obvod** "křivočarého" trojúhelníka, jehož jedna strana je tvořena úsekem osy x mezi body $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$ a zbývající dvě strany jsou tvořeny částí grafů funkcí $y = \ln(\sin x)$, $y = \ln(\cos x)$ (načrtněte obrázek tohoto křivočarého trojúhelníka, zejména určete průsečík grafů $y = \ln(\sin x)$, $y = \ln(\cos x)$).
3. (3 body) Vypočtěte
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx.$$

Matematická analýza I, 20. 12. 2007

I. Část Každý příklad 1 bod.

1. Určete polynom s reálnými koeficienty 3. stupně víte-li, že dva z jeho kořenů jsou $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1 + i$.
2. Určete definiční obor funkce $f(x) = \arcsin\frac{x-1}{x+1}$.
3. Určete inverzní funkci k funkci $y = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$.
4. Určete číslo c z Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro $f(x) = \sqrt{x}$ a $[a,b] = [0,1]$.
5. Určete rovnici tečny ke grafu funkce $y = \sin^2 x$ v bodě s x-ovou souřadnicí $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
6. Určete rovnici asymptoty v $+\infty$ ke grafu funkce $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$.
7. Udejte příklad funkce f takové, že dolní a horní Riemannův intgrál jsou
$$\underline{\int_0^1} f(x)\, dx = -2, \quad \overline{\int_0^1} f(x)\, d = 1.$$
8. Integrál
$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$$
převeďte vhodnou substitucí na integrál z racionální lomené funkce (vzniklý integrál z racionální lomené funkce již *nepočítejte*).
9. Vypočtěte $\int \sin 4x \cos 3x\, dx$.
10. Vypočtěte $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$

II. Část

1. (4 body) Derivujte a upravte
$$y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$
2. (3 body) Vyšetřete průběh funkce
$$y = \frac{x}{2} + \operatorname{arccotg} x.$$
3. (3 body) Vypočtěte
$$\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x} + 2e^x + 2}.$$

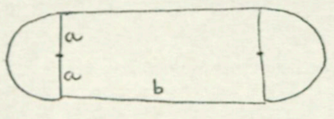
PODZIM 2010 $\boxed{3}$

Zkouška M1100, středa 19.1.2011, 9:00–10:50 hodin

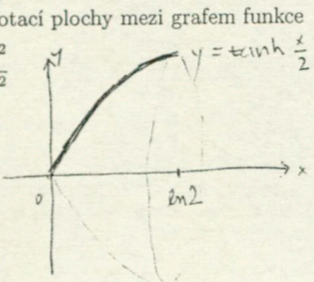
1. část (praktická)

Skupina A

1. (1 bod) Určete všechny hromadné body posloupnosti
$$a_n = \cos(n\pi/4).$$
Určete také $\liminf a_n$ a $\limsup a_n$.
2. (1 bod) Určete derivaci funkce $f(t)$. Funkci $f'(t)$ zjednodušte.
$$f(t) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}.$$
Pokud neznáte derivaci funkce $\arcsin x$, můžu Vám ji za 0.5 bodu sdělit.
3. (1 bod) Vypočtěte následující limity
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x^2-1}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{3x + \operatorname{arctg} x}{x - \operatorname{arctg} x}.$$
4. (1.5 bodu) Architekt navrhuje zahradu ve tvaru obdélníka, k jehož bočním stranám jsou přidány půlkruhy (viz obr.). Celková plocha zahrady má být $S = 48$ čtverečních metrů. Určete délky stran obdélníkové části zahrady tak, aby byl celkový obvod zahrady (včetně přilehlých půlkruhů) za daných podmínek minimální, tj. aby bylo potřeba co nejméně plotu na jeho oplocení. Počítejte s hodnotou $\pi \approx 3$.



5. (2 body) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+3}.$$
6. (1 bod) Vypočtěte
$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^5 x\, dx.$$
Nápověda: $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.
7. (1 bod) Pomocí vhodného nevlastního integrálu vypočtěte plochu mezi grafem funkce
$$f(x) = x\,e^{-4x}$$
a osou x na intervalu $[0,\infty)$.
8. (1.5 bodu) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy mezi grafem funkce
$$f(x) = \tanh(x/2) = \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}}$$
a osou x na intervalu $[0, \ln 2]$ kolem osy x, viz obr.



PODZIM 2010 $\boxed{2}$

Zkouška M1100, středa 5.1.2011, 11:00–11:50 hodin

2. část (teoretická)

Skupina A

1. (1 bod) Definujte pojem vlastní limity funkce $f(x)$ ve vlastním bodě $x_0 = 0$. Pomocí věty o třech limitách dokažte
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$
2. (1 bod) Zformulujte pravidlo pro derivaci součinu dvou funkcí a dokažte ho.
3. (1 bod)
   (a) Udejte příklad funkce $f(x)$ a intervalu $[a,b]$, na kterém je funkce $f(x)$ spojitá, ale nemá derivaci v některém bodě $x_0 \in [a,b]$. Dokažte, že Vaše funkce $f(x)$ skutečně nemá derivaci v bodě x_0.
   (b) Udejte příklad funkce $g(x)$ a intervalu $[a,b]$, na němž není funkce $g(x)$ spojitá a přesto má funkce $g(x)$ vlastní nebo nevlastní derivaci ve všech bodech $x_0 \in [a,b]$.
   (c) Udejte příklad funkce $h(x)$ a intervalu $[a,b]$, na němž funkce $h(x)$ není Riemannovsky integrovatelná.
4. (1 bod) Dokažte (nebo uveďte protipříklad) následující tvrzení: Je-li $f'(x_0) = 0$ a současně plat $f''(x_0) > 0$, potom má funkce $f(x)$ ostré lokální minimum v bodě x_0.
5. (1 bod) Definujte střední hodnotu funkce $f(x)$ na intervalu $[a,b]$. Zformulujte větu o střední hodnot integrálního počtu pro spojitou funkci $f(x)$ na $[a,b]$ a tuto větu dokažte.