PODZIM 2008 $\boxed{1}$

Zkouška M1100, čtvrtek 8.1.2009, 8:00–10:00 hodin

Skupina A

1. (1 bod)
   (a) Definujte nebo charakterizujte hromadné body posloupnosti.
   (b) Určete všechny hromadné body posloupnosti
   $$a_n = \left(\frac{1}{2} + (-1)^n\right)^n.$$
   (c) Určete $\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n$ pro výše uvedenou posloupnost a_n.

2. (1 bod) Uvažujme funkci
   $$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \ln\left(1 - \sqrt{1-x^2}\right).$$
   (a) Určete definiční obor funkce f.
   (b) Vypočtěte $f'(x)$ a výsledek zjednodušte (minimálně složené zlomky).

3. (1 bod) Vypočtěte následující limity
   $$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-2x}}{\sin x}, \qquad \lim_{x\to -2} \frac{1-x^2}{(x^2-4)(x^3+8)}, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x.$$

4. (1 bod) Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení (odpovězte ANO, NE, NEVÍM):
   (a) Je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0, potom existuje $f'(x_0)$.
   (b) Spojitá funkce na intervalu (a,b) nabývá v tomto intervalu svého maxima a minima.
   (c) Inverzní funkce ke spojité a ryze monotónní funkci je funkce spojitá a ryze monotónní.
   (d) Je-li $f'(x_0) = 0$, potom je x_0 bodem lokálního extrému funkce f.
   (e) Je-li x_0 inflexním bodem funkce f, potom je $f''(x_0) = 0$.
   Pozor! Správná odpověď = 0.2, chybná odpověď = −0.2, žádná odpověď (nebo "nevím") = 0.

5. (2 body) Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x^2 \ln x$. Pokud by bylo potřeba, můžete využít hodnoty $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.6$, $\frac{1}{2e} \approx 0.18$, $\frac{1}{e\sqrt{e}} \approx 0.22$, $\frac{3}{2e^3} \approx 0.07$.

6. (1 bod) Určete Taylorův polynom stupně $n = 4$ v bodě $x_0 = 0$ pro funkci $f(x) = \ln\cos x$ a pomocí něj přibližně vypočtěte hodnotu $\ln\cos 0.2$.

7. (1 bod) Určete primitivní funkci k
   $$f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x - 2}{x^4 - 1}.$$

8. (2 body)
   (a) Vypočtěte obsah plochy sevřené mezi graf funkce $f(x) = x^2 \ln x$ a osu x (viz Příklad 5).
   (b) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené mezi graf funkce $f(x) = x^2 \ln x$ a osu x kolem osy x. Pokud bude potřeba, můžete použít fakt, že primitivní funkce k $x^4 \ln x$ je funkce $\frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{25}x^5$.