PODZIM 2013 $\boxed{2}$

Zkouška M1100, 9.1.2014 (teoretická část)

Skupina A

1. (1 bod) Definujte pojem vlastní limity $L = 3$ funkce $f(x)$ ve vlastním bodě $x_0 = 1$. Vhodným obrázkem ilustrujte Vaši definici.
2. (1 bod) Definujte spojitost funkce $f(x)$ v bodě x_0 a derivaci funkce $f(x)$ v bodě x_0. Pomocí této definice určete, ve kterých bodech má funkce
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
derivaci $f'(x)$ a ve kterých bodech je tato derivace spojitá.
3. (1 bod) Zformulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě z diferenciálního počtu. Vhodným obrázkem tvrzení ilustrujte. Pomocí této věty dokažte, že funkce $f(x)$ s kladnou derivací na intervalu (a,b) je na tomto intervalu rostoucí.
4. (1 bod) Je každá monotónní funkce $f(x)$ definovaná na $[a,b]$ na tomto intervalu integrovatelná? Pokud ano, pak toto tvrzení dokažte. Pokud ne, pak uveďte protipříklad.
5. (1 bod) Definujte střední hodnotu (průměr) funkce $f(x)$ na intervalu $[a,b]$. Zformulujte a dokažte větu o střední hodnotě integrálního počtu.

Matematická analýza I, 20. 12. 2007

I. Část Každý příklad 1 bod.

1. Určete polynom s reálnými koeficienty 3. stupně víte-li, že dva z jeho kořenů jsou $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1 + i$.
2. Určete definiční obor funkce $f(x) = \arcsin\frac{x-1}{x+1}$.
3. Určete inverzní funkci k funkci $y = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$.
4. Určete číslo c z Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro $f(x) = \sqrt{x}$ a $[a,b] = [0,1]$.
5. Určete rovnici tečny ke grafu funkce $y = \sin^2 x$ v bodě s x-ovou souřadnicí $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
6. Určete rovnici asymptoty v $+\infty$ ke grafu funkce $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$.
7. Udejte příklad funkce f takové, že dolní a horní Riemannův integrál jsou
$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = -2, \quad \overline{\int_0^1} f(x)\,d = 1.$$
8. Integrál
$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$$
převeďte vhodnou substitucí na integrál z racionální lomené funkce (vzniklý integrál z racionální lomené funkce již *nepočítejte*).
9. Vypočtěte $\int \sin 4x \cos 3x\,dx$.
10. Vypočtěte $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$

II. Část

1. (4 body) Derivujte a upravte
$$y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$
2. (3 body) Vyšetřete průběh funkce
$$y = \frac{x}{2} + \operatorname{arccotg} x.$$
3. (3 body) Vypočtěte
$$\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x} + 2e^x + 2}.$$

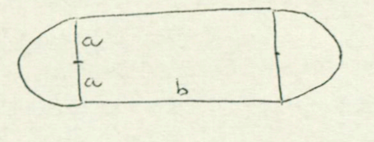
PODZIM 2010 $\boxed{3}$

Zkouška M1100, středa 19.1.2011, 9:00–10:50 hodin

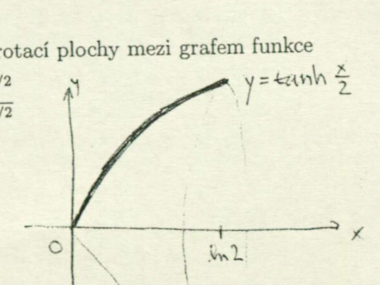
1. část (praktická)

Skupina B

1. (1 bod) Určete všechny hromadné body posloupnosti
$$b_n = \sin(n\pi/4).$$
Určete také $\liminf b_n$ a $\limsup b_n$.
2. (1 bod) Určete derivaci funkce $f(t)$. Funkci $f'(t)$ zjednodušte.
$$f(t) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}.$$
Pokud neznáte derivaci funkce $\arcsin x$, můžu Vám ji za 0.5 bodu sdělit.
3. (1 bod) Vypočtěte následující limity
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x^2-1}, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{4x + \operatorname{arctg} x}{x - \operatorname{arctg} x}.$$
4. (1.5 bodu) Architekt navrhuje zahradu ve tvaru obdélníka, k jehož bočním stranám jsou přidány půlkruhy (viz obr.). Celková plocha zahrady má být $S = 75$ čtverečních metrů. Určete délky stran obdélníkové části zahrady tak, aby byl celkový obvod zahrady (včetně přilehlých půlkruhů) za daných podmínek minimální, tj. aby bylo potřeba co nejméně plotu na jeho oplocení. Počítejte s hodnotou $\pi \approx 3$.



5. (2 body) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}.$$
6. (1 bod) Vypočtěte
$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x\,\mathrm{d}x.$$
Nápověda: $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.
7. (1 bod) Pomocí vhodného nevlastního integrálu vypočtěte plochu mezi grafem funkce
$$g(x) = x\,e^{-5x}$$
a osou x na intervalu $[0, \infty)$.
8. (1.5 bodu) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy mezi grafem funkce
$$f(x) = \tanh(x/2) = \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}}$$
a osou x na intervalu $[0, \ln 2]$ kolem osy x, viz obr.



Matematická analýza I, 15. 1. 2008

I. část (Každý příklad 1 bod.)

1. Určete kořeny polynomu $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2$
2. Určete definiční obor funkce $y = \arccos\frac{x-1}{x+1}$
3. Definujte co je hromadný bod posloupnosti a_n a udejte příklad posloupnosti mající právě 3 hromadně body.
4. Udejte příklad funkcí f, g takových, že $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$ a $\lim_{x\to 1} f(x)g(x) = -1$.
5. Rozhodněte (pomocí druhé derivace) zda funkce $y = \frac{x}{x-2}$ je v okolí bodu s x-ovou souřadnicí $x_0 = 1$ konvexní nebo konkávní.
6. Určete rovnici tečny ke křivce zadané parametricky $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ v bodě daném hodnotou parametru $t_0 = \frac{\pi}{4}$.
7. Vypočtěte $\int_0^{2\sqrt{2}} x\sqrt{1+x^2}\,dx$.
8. Integrál
$$\int \frac{\sin x}{\sin x + 2\cos x}\,dx$$
převeďte vhodnou substitucí na integrál z racionální funkce (vzniklý integrál z racionální funkce již *nepočítejte*).
9. Vypočtěte $\int_0^1 \arcsin x\,dx$.
10. Rozhodněte o konvergenci/divergenci nevlastního integrálu $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

II. část

1. (4 b.) Derivujte a upravte
$$y = 4\lg\frac{x}{1+\sqrt{1-4x^2}} - \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}.$$
2. (3 body) Do koule s poloměrem R vepište válec s maximálním objemem. Tento maximální objem určete.
3. (3 body) Určete plochu rovinného obrazce daného nerovnostmi $y \geq -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $x^2 + y^2 \leq 1$.