PODZIM 2013 $\boxed{1}$

Zkouška M1100, 18.12.2013 (praktická část)

Skupina A

1. (1 bod) Určete všechny hromadné body a dále $\liminf_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup_{n\to\infty} a_n$ pro posloupnost
$$a_n = n\,(-1/n)^{\sin(n\pi/2)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. (1 bod) Rozhodněte a řádně zdůvodněte, jestli je daná funkce $F(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu a $(2,\infty)$:
$$F(x) = \frac{1}{2}\,x\,\sqrt{x^2-4} + 2 - 2\ln(x+\sqrt{x^2-4}), \qquad f(x) = \sqrt{x^2-4}.$$

3. (1 bod) Vypočtěte následující limity
$$\lim_{x\to\infty}\left(1-e^{-x}\right)^{e^{2x}}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin^3 x}.$$

4. (1.5 bodu) Námořník je v loďce na moři ve vzdálenosti 12 km od pobřeží. Potřebuje se v co nejkratším čase dostat do města na pobřeží, které je od něj vzdáleno vzdušnou čarou 20 km (nakreslete si obrázek). Námořník je schopen v loďce veslovat rychlostí 6 km/hod a po břehu běžet rychlostí 10 km/hod. Určete, ve kterém místě na pobřeží (v jaké vzdálenosti nejbližšího místa na pobřeží) se musí námořník vylodit, aby se do města dostal co nejdříve. Jak dlouho mu to bude trvat? Pro jednoduchost předpokládejme, že pobřeží má tvar přímky. Uvažte, že čas = dráha / rychlost.

5. (2 body) Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}/x^2)$.

6. (1.5 bodu) Určete plochu, která je sevřená mezi graf funkce $f(x) = e^{-x}\sin x$ a osu x na intervalu $[0,\infty)$. Nakreslete si obrázek.

7. (2 body) Určete polohu těžiště oblouku asteroidy v prvním kvadrantu. Asteroida je křivka zadaná parametricky jako $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, přičemž uvažujte parametr $t \in [0,\pi/2]$.

PODZIM 2013 $\boxed{4}$

Zkouška M1100, 6.2.2014 (praktická část)

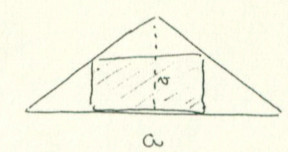
Skupina A

1. (1 bod) Určete všechny hromadné body a dále $\liminf_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup_{n\to\infty} a_n$ pro posloupnost
$$a_n = n^{\cos(n\pi/2)}, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

2. (1 bod) Určete definiční obor funkce $f(x)$ a funkce $f'(x)$, kde
$$f(x) = \sqrt{4-x^2} - 2\arccos(x/2).$$

3. (1 bod) Vypočtěte následující limity ($k \in \mathbb{R}$)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{kx+\operatorname{arctg} x}{x-\operatorname{arctg} x}, \qquad \lim_{x\to 1}\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

1.5
4. (~~2~~ body) Je zadán rovnoramenný trojúhelník se základnou délky $a > 0$ a výškou $v > 0$. Určete rozměry vepsaného obdélníka s co největším obsahem, který má jednu stranu souběžnou se základnou trojúhelníka (viz obr.). Tento největší obsah určete.



5. (2 body) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1.5
6. (~~1~~ bod) Vypočtěte nevlastní integrál (rozkladem na parciální zlomky)
$$\int_4^\infty \frac{4x^2}{x^4-16}\,dx.$$

7. (2 body) Anuloid je těleso zpodobňující nafouklou pneumatiku – vzniká rotací kružnice kolem osy, která tuto kružnici neprotíná. Je dána kružnice se středem v bodě $[0,4]$ a poloměrem $r = 1$. Pomocí vhodného integrálu určete povrch (tj. obsah pláště) anuloidu, který vznikne rotací této kružnice kolem osy x. Nakreslete si obrázek a uvažte, že generující kružnice má rovnici $x^2 + (y-4)^2 = 1$.