PODZIM 2015 $\boxed{2}$

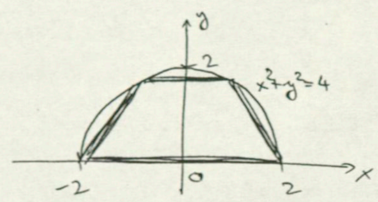
Zkouška M1100, 12.1.2016 (praktická část)

Skupina B

1. (1 bod) Udejte příklad posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ takových, že
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -1, \quad \lim_{n\to\infty} b_n \text{ neexistuje}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$
Současně určete všechny hromadné body posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$.

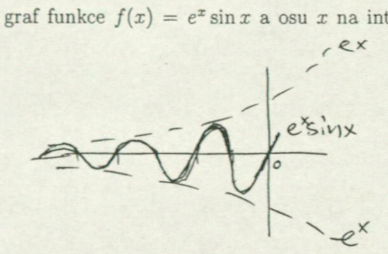
2. (1 bod) Pomocí metod diferenciálního počtu určete, jestli existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že
$$\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1} = c + \operatorname{arctg} x, \quad x \in (-\infty, 1).$$
Pokud ano, tuto konstantu c určete.

3. (1.5 bodu) Je dán půlkruh o poloměru $r = 2$. Vepište do něj lichoběžník, který má svou základnu totožnou s průměrem kruhu. Určete výšku lichoběžníku, tak aby byl jeho obvod co největší.



4. (3 body) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

5. (1.5 bodu) Určete plochu, která je sevřená mezi graf funkce $f(x) = e^x \sin x$ a osu x na intervalu $(-\infty, 0]$.



A

cos x

6. (2 body) Určete souřadnice těžiště plochy sevřené mezi graf funkce $f(x) = x^2 - 1$ a osu x na intervalu $[0, 1]$ se specifickou hmotností $s(x) = x + 1$.

x^2+1

PODZIM 2010 $\boxed{3}$

Zkouška M1100, středa 19.1.2011, 9:00–10:50 hodin

1. část (praktická)

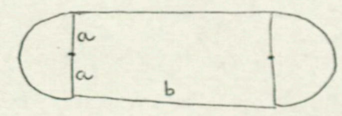
Skupina A

1. (1 bod) Určete všechny hromadné body posloupnosti
$$a_n = \cos(n\pi/4).$$
Určete také $\liminf a_n$ a $\limsup a_n$.

2. (1 bod) Určete derivaci funkce $f(t)$. Funkci $f'(t)$ zjednodušte.
$$f(t) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}.$$
Pokud neznáte derivaci funkce $\arcsin x$, můžu Vám ji za 0.5 bodu sdělit.

3. (1 bod) Vypočtěte následující limity
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x^2-1}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{3x + \operatorname{arctg} x}{x - \operatorname{arctg} x}.$$

4. (1.5 bodu) Architekt navrhuje zahradu ve tvaru obdélníka, k jehož bočním stranám jsou přidány půlkruhy (viz obr.). Celková plocha zahrady má být $S = 48$ čtverečních metrů. Určete délky stran obdélníkové části zahrady tak, aby byl celkový obvod zahrady (včetně přilehlých půlkruhů) za daných podmínek minimální, tj. aby bylo potřeba co nejméně plotu na jeho oplocení. Počítejte s hodnotou $\pi \approx 3$.

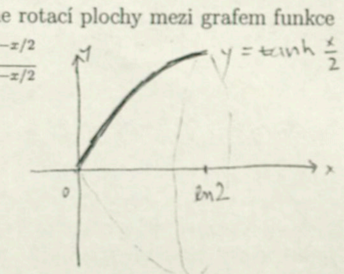


5. (2 body) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = \frac{4 - x^2}{x^2 + 3}.$$

6. (1 bod) Vypočtěte
$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^5 x \, dx.$$
Nápověda: $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

7. (1 bod) Pomocí vhodného nevlastního integrálu vypočtěte plochu mezi grafem funkce
$$f(x) = x e^{-4x}$$
a osou x na intervalu $[0, \infty)$.

8. (1.5 bodu) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy mezi grafem funkce
$$f(x) = \tanh(x/2) = \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{e^{x/2} + e^{-x/2}}$$
a osou x na intervalu $[0, \ln 2]$ kolem osy x, viz obr.



1

1. A+B

$a_n \equiv 1 \;\to\; 1, \quad b_n = (-1)^n \cdot n \;\to\; \nexists, \quad \frac{a_n}{b_n} = (-1)^n \frac{1}{n} \;\to\; 0$

1.0

2. A

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{1}{2(x^2+1)} \cdot 2 = \frac{1}{x^2+1}$$
$$(C + \operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{stejné} \Rightarrow \boxed{\text{ANO}}$$

0.8

Hodnota v $x = 0$ $(\in (-1, \infty))$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{arctg}\frac{0-1}{0+1} &= C + \operatorname{arctg} 0 \\ \underbrace{\operatorname{arctg}(-1)}_{-\frac{\pi}{4}} &= C + \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{C = -\frac{\pi}{4}}$$

0.2

1.0

B

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{\frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{(x-1)^2}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{1}{2(x^2+1)} \cdot (-2) = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$(C + \operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{nejsou stejné} \Rightarrow \boxed{\text{NE}}$$

1.0