PODZIM 2013 $\boxed{3}$

Zkouška M1100, 23.1.2014 (praktická část)

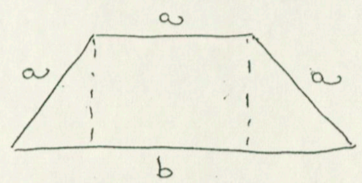
Skupina B

1. (1 bod) Určete všechny hromadné body a dále $\liminf_{n\to\infty} a_n$ a $\limsup_{n\to\infty} a_n$ pro posloupnost
$$b_n = \left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

2. (1 bod) Určete definiční obor funkce
$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\ln\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}.$$

3. (1 bod) Vypočtěte následující limity
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-4x^2+3x^3}{2+2x-x^3}, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3x+\cos x}{x+\sin x}.$$

4. (2 body) Je zadán lichoběžník, jehož kratší strana a obě ramena mají délku $a = 2$ metry, viz obr. Určete délku b delší strany lichoběžníka tak, aby byl jeho obsah co největší.



5. (2 body) Vyšetřete průběh funkce
$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}.$$

6. (1 bod) Vypočtěte primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x)$. Určete také maximální interval(y), na kterých je $F(x)$ primitivní k $f(x)$.
$$f(x) = \frac{x^3+1}{x\,(x-1)^3}.$$

7. (2 body) Anuloid je těleso zpodobňující nafouklou pneumatiku – vzniká rotací kružnice kolem osy, která tuto kružnici neprotíná. Je dána kružnice se středem v bodě $[0,5]$ a poloměrem $r = 1$. Pomocí vhodného integrálu určete povrch (tj. obsah pláště) anuloidu, který vznikne rotací této kružnice kolem osy x. Nakreslete si obrázek a uvažte, že generující kružnice má rovnici $x^2+(y-5)^2 = 1$.