PODZIM 2008 $\boxed{2}$ Skupina A

Zkouška M1100, pondělí 19.1.2009, 8:00–10:00 hodin

1. (1 bod) Vypočtěte následující limity posloupností:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(2-\sqrt{\frac{1}{n}+4}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

2. (1 bod) Uvažujme funkci

$$f(x)=\frac{1}{\ln\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)}$$

   (a) Určete definiční obor funkce f.
   (b) Vypočtěte $f'(x)$ a výsledek nezjednodušujte.

3. (1 bod) Odvoďte (bez použití derivací či l'Hospitalova pravidla) následující limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}.$$

4. (1 bod) Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení (odpovězte ANO, NE, NEVÍM):
   (a) Jestliže existuje $f'(x_0)$, potom je funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0.
   (b) Spojitá funkce na intervalu $[a,b]$ nabývá v tomto intervalu svého maxima a minima.
   (c) Inverzní funkce ke spojité funkci je funkce spojitá.
   (d) Je-li bod x_0 lokálním extrémem funkce f, potom je $f'(x_0)=0$.
   (e) Je-li $f''(x_0)=0$, potom je x_0 inflexním bodem funkce f.
   Pozor! Správná odpověď = 0.2, chybná odpověď = −0.2, žádná odpověď (nebo "nevím") = 0.

5. (2 body) Vyšetřete průběh funkce $f(x)=4-\sqrt[3]{64-x^3}$.

6. (1 bod) Ramena a menší základna lichoběžníku mají velikost $a=2$ cm (viz obr.). Určete velikost b jeho větší základny tak, aby byl obsah lichoběžníku maximální.

7. (1 bod) Pomocí vhodné substituce převeďte dané integrály na integrály z racionální lomené funkce. Takto obdržené intgrály již dále nepočítejte.

$$\int\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x}-x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

8. (2 body)
   (a) Pro $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ vypočtěte plochu mezi grafem funkce $f(x)=\ln^n x$ a osou x na intervalu $[0,1]$.
   (b) Určete polohu těžiště půlkružnice $(x(t)=r\cos t,\ y(t)=r\sin(t))$, na které je specifická hmota dána funkcí $s(t)=\sin^2 t$.

PODZIM 2008 $\boxed{2}$ Skupina C

Zkouška M1100, pondělí 19.1.2009, 8:00–10:00 hodin

1. (1 bod) Vypočtěte následující limity posloupností:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(4-\sqrt{\frac{1}{n}+16}\right), \qquad \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}.$$

2. (1 bod) Uvažujme funkci

$$f(x)=\frac{1}{\ln\left(4-\sqrt{16-x^2}\right)}$$

   (a) Určete definiční obor funkce f.
   (b) Vypočtěte $f'(x)$ a výsledek nezjednodušujte.

3. (1 bod) Odvoďte (bez použití derivací či l'Hospitalova pravidla) následující limity

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}.$$

4. (1 bod) Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení (odpovězte ANO, NE, NEVÍM):
   (a) Je-li bod x_0 lokálním extrémem funkce f, potom je $f'(x_0)=0$.
   (b) Inverzní funkce ke spojité funkci je funkce spojitá.
   (c) Je-li $f''(x_0)=0$, potom je x_0 inflexním bodem funkce f.
   (d) Jestliže existuje $f'(x_0)$, potom je funkce $f(x)$ spojitá v bodě x_0.
   (e) Spojitá funkce na intervalu $[a,b]$ nabývá v tomto intervalu svého maxima a minima.
   Pozor! Správná odpověď = 0.2, chybná odpověď = −0.2, žádná odpověď (nebo "nevím") = 0.

5. (2 body) Vyšetřete průběh funkce $f(x)=2-\sqrt[3]{8-x^3}$.

6. (1 bod) Ramena a menší základna lichoběžníku mají velikost $a=6$ cm (viz obr.). Určete velikost b jeho větší základny tak, aby byl obsah lichoběžníku maximální.

7. (1 bod) Pomocí vhodné substituce převeďte dané integrály na integrály z racionální lomené funkce. Takto obdržené intgrály již dále nepočítejte.

$$\int\frac{\sqrt{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[4]{x}-x^4}\,\mathrm{d}x, \qquad \int\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

8. (2 body)
   (a) Pro $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ vypočtěte plochu mezi grafem funkce $f(x)=\ln^n x$ a osou x na intervalu $[0,1]$.
   (b) Určete polohu těžiště půlkružnice $(x(t)=r\cos t,\ y(t)=r\sin(t))$, na které je specifická hmota dána funkcí $s(t)=\cos^2 t$.