Průběh funkce

20. srpna 2007

- 1. $f = x^3 - 12x$
- 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$
- 3. $f = \frac{x}{\ln x}$

Příklad 1. Nakreslete graf funkce

$f(x) = x^3 - 12x$

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

Nejprve je třeba určit definiční obor. Výraz je vždy definován.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

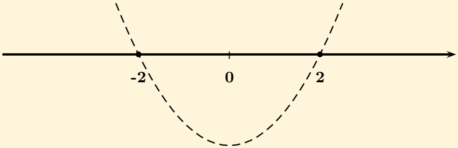
$f' = 3x^2 - 12$

Určíme první derivaci a zjistíme, kdy je kladná a kdy záporná. K tomu je třeba zjistit nulové body derivace, tedy řešit rovnici $3x^2 - 12 = 0$.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f' = 3x^2 - 12 \qquad x_{1,2} = \pm 2$

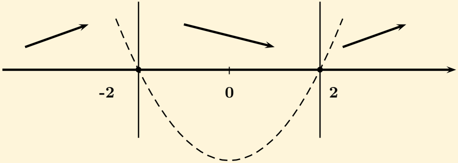


Grafem derivace je parabola. Tam, kde je její graf nad osou x je první derivace kladná, kde je parabola pod osou x, je první derivace záporná. **Poznámka:** Lze to zjistit i tak, že do předpisu derivace dosadíme libovolný bod ze zkoumaného intervalu a zjistíme znaménko výsledné hodnoty.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f' = 3x^2 - 12 \qquad x_{1,2} = \pm 2$

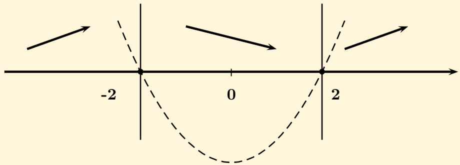


Určili jsme intervaly monotonnosti.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f' = 3x^2 - 12 \qquad x_{1,2} = \pm 2$



V bodech $x = \pm 2$ dochází ke změně monotonie a derivace v nich existuje a je v nich rovna nule, tudíž v nich nastávají lokální extrémy. Konkrétně v bodě $x = -2$ lokální maximum, v bodě $x = 2$ lokální minimum, $f(2) = -16$, $f(-2) = 16$.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

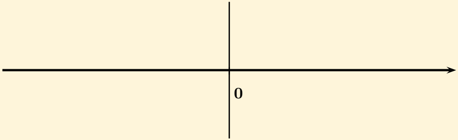
$f'' = 6x$

Určíme druhou derivaci a zjistíme, kdy je kladná a kdy záporná. K tomu je třeba zjistit nulové body derivace, tedy řešit rovnici $6x = 0$.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f'' = 6x \qquad x = 0$

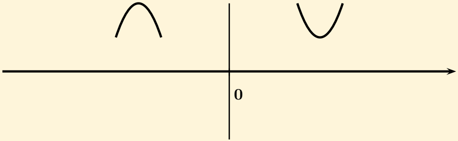


Vpravo od bodu $x = 0$ je druhá derivace kladná a proto je zde původní funkce f konvexní, vlevo od bodu $x = 0$ je záporná a tedy f je zde konkávní. Toto jsme zjistili dosazením libovolného bodu ze zkoumaného intervalu, např $f''(2) = 24 > 0$.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f'' = 6x \qquad x = 0$

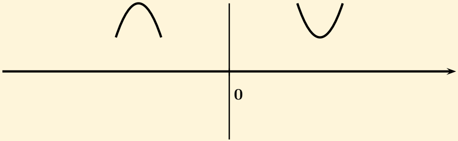


Určili jsme intervaly konvexnosti a konkávnosti.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f'' = 6x \qquad x = 0$



V bodě $x = 0$ dochází ke změně z konkávní na konvexní, je to tedy inflexní bod $f(0) = 0$.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

Je třeba ještě určit asymptoty. Asymptoty bez směrnice zde nebudou vzhledem k definičnímu oboru, budeme tedy hledat asymptoty se směrnicí:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-12x}{x} =$

Takto se určí směrnice asymptoty pro $x \to \infty$.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

Je třeba ještě určit asymptoty. Asymptoty bez směrnice zde nebudou vzhledem k definičnímu oboru, budeme tedy hledat asymptoty se směrnicí:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-12x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} 3x^2 - 12 = \infty$

Použili jsme l'Hospitalovo pravidlo

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

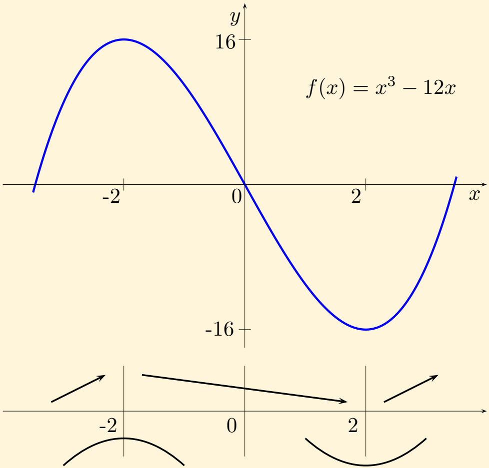
Je třeba ještě určit asymptoty. Asymptoty bez směrnice zde nebudou vzhledem k definičnímu oboru, budeme tedy hledat asymptoty se směrnicí:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-12x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} 3x^2 - 12 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-12x}{x} = \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} 3x^2 - 12 = \infty$$

Asymptota pro $x \to -\infty$ se hledá podobně. Jelikož obě směrnice jsou nekonečné, nebude zde žádná asymptota se směrnicí.

Příklad 1. $f = x^3 - 12x$



Příklad 2. Nakreslete graf funkce

$f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

Nejprve je třeba určit definiční obor. Výraz je vždy definován.

Příklad 2. $f = x^2\mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

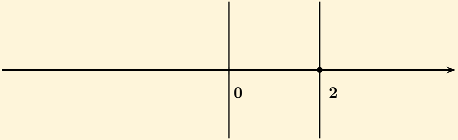
$f' = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}(2 - x)$

Určíme první derivaci a zjistíme, kdy je kladná a kdy záporná. K tomu je třeba zjistit nulové body derivace, tedy řešit rovnici $x\mathrm{e}^{-x}(2 - x) = 0$.

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$$f' = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}(2 - x) \qquad x_{1,2} = \{0, 2\}$$

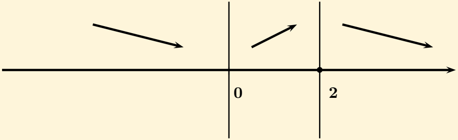


Výraz e^{-x} je vždy kladný, nulové body se týkají pouze ostatních členů. Nyní budeme postupovat tak, že do předpisu derivace dosadíme libovolný bod ze zkoumaného intervalu a zjistíme znaménko výsledné hodnoty.

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f' = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}(2-x) \qquad x_{1,2} = \{0, 2\}$

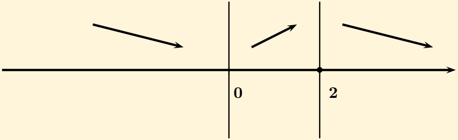


Určili jsme intervaly monotonnosti.

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f' = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}(2-x) \qquad x_{1,2} = \{0, 2\}$



V bodech $x = \{0, 2\}$ dochází ke změně monotonie a derivace v nich existuje a je v nich rovna nule, tudíž v nich nastávají lokální extrémy. Konkrétně v bodě $x = 2$ lokální maximum, v bodě $x = 0$ lokální minimum, $f(0) = 0$, $f(2) = 4\ln 2$.

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

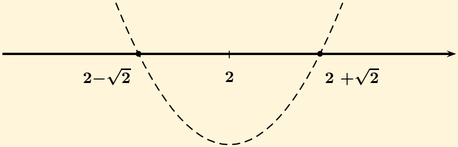
$f'' = \mathrm{e}^{-x}(2-x) - x\mathrm{e}^{-x}(2-x) - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

Určíme druhou derivaci a zjistíme, kdy je kladná a kdy záporná. K tomu je třeba zjistit nulové body derivace, tedy řešit rovnici $x^2 - 4x + 2 = 0$, protože výraz e^{-x} je vždy kladný.

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f'' = \mathrm{e}^{-x}(2-x) - x\mathrm{e}^{-x}(2-x) - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 4x + 2)$
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$

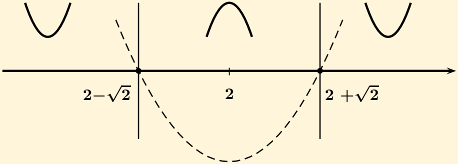


Grafem zkoumaného výrazu je parabola viz obr., znaménko druhé derivace závisí pouze na tomto výrazu, tedy kde je parabola nad osou x, je celý výraz kladný, kde pod osou x, je záporný.

Příklad 2. $f = x^2\mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f'' = \mathrm{e}^{-x}(2-x) - x\mathrm{e}^{-x}(2-x) - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 4x + 2)$
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$

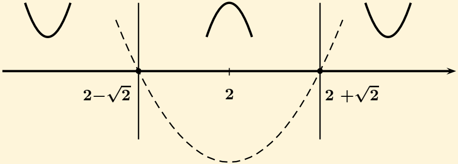


Určili jsme intervaly, na kterých je funkce f konvexní a konkávní. Lze to udělat i pomocí dosazování bodů ze zkoumaných intervalů do předpisu druhé derivace a určením znaménka tohoto výrazu.

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

$f'' = \mathrm{e}^{-x}(2-x) - x\mathrm{e}^{-x}(2-x) - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 4x + 2)$
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$



V bodech $x = 2\pm\sqrt{2}$ dochází ke změně z konvexní na konkávní resp. naopak, druhá derivace je v nich rovna nule, tudíž to jsou inflexní body.

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

Zbývá určit asymptoty. Aymptoty bez směrnice zde nebudou vzhledem k definičnímu oboru, určíme asymptoty se směrnicí: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{x} =$

Takto určíme směrnici asymptoty pro $x \to \infty$

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

Zbývá určit asymptoty. Aymptoty bez směrnice zde nebudou vzhledem k definičnímu oboru, určíme asymptoty se směrnicí: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$

Použili jsme l'Hospitalovo pravidlo, směrnice asyptoty pro $x \to \infty$ je 0.

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

Zbývá určit asymptoty. Aymptoty bez směrnice zde nebudou vzhledem k definičnímu oboru, určíme asymptoty se směrnicí:
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} - 0x$

Takto se zjistí konstantní člen asymptoty

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

Zbývá určit asymptoty. Aymptoty bez směrnice zde nebudou vzhledem k definičnímu oboru, určíme asymptoty se směrnicí: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} - 0x = \lim\limits_{x\to\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{\mathrm{e}^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^x} = 0$

Použili jsme dvakrát l'Hospitalovo pravidlo, rovnice asymptoty tedy je $y = 0x + 0 = 0$, tedy je to osa x.

Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

Zbývá určit asymptoty. Aymptoty bez směrnice zde nebudou vzhledem k definičnímu oboru, určíme asymptoty se směrnicí: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{x} =$

Takto určíme směrnici asymptoty pro $x \to -\infty$

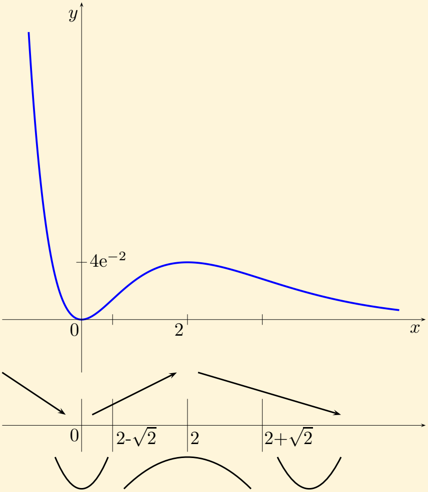
Příklad 2. $f = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}$

Zbývá určit asymptoty. Aymptoty bez směrnice zde nebudou vzhledem k definičnímu oboru, určíme asymptoty se směrnicí: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 \mathrm{e}^{-x}}{x} = [\infty \cdot \infty] = \infty$

Pro $x \to -\infty$ asymptota se směrnicí neexistuje, protože limita vyšla nekonečná

Příklad 2. $f = x^2 e^{-x}$



Příklad 3. Nakreslete graf funkce

$f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Příklad 3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

Nejprve je třeba určit definiční obor. Funkce $\ln x$ je definována pouze pro kladná čísla a navíc je ve jmenovateli zlomku, tedy nesmí být rovna nule. To vylučuje $x = 1$, protože $\ln 1 = 0$.

Příklad 3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

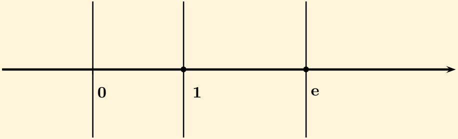
$f' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

Určíme první derivaci a zjistíme, kdy je kladná a kdy záporná. K tomu je třeba zjistit nulové body derivace, tedy řešit rovnici $\ln x - 1 = 0$. V bodě $x = 1$ není definována ani derivace funkce f ani samotná funkce. Je třeba jej zahrnout do dělících bodů.

Příklad 3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

$f' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, nulový bod v bodě x=$\mathrm{e}$.

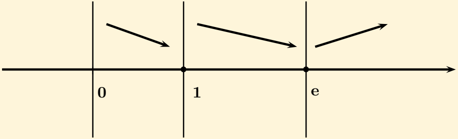


Nyní budeme postupovat tak, že do předpisu derivace dosadíme libovolný bod ze zkoumaného intervalu a zjistíme znaménko výsledné hodnoty. Zkoumáme tedy intervaly $(0,1)$, $(1,\mathrm{e})$ a (e,∞).

Příklad 3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

$f' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, nulový bod v bodě x=e.

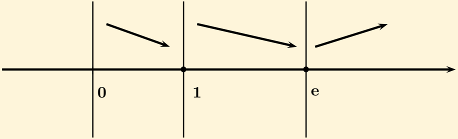


Určili jsme intervaly monotonnosti.

Příklad 3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

$f' = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, nulový bod v bodě x=e.



V bodě $x = \mathrm{e}$ dochází ke změně monotonie a derivace v něm existuje a je v rovna nule, tudíž v něm nastává lokální extrém. Konkrétně lokální minimum, $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$

Příklad 3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

$$f'' = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1) 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x}\ln x (2 - \ln x)}{\ln^4 x}$$

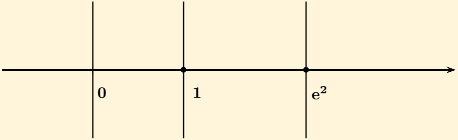
Určíme druhou derivaci a zjistíme, kdy je kladná a kdy záporná. K tomu je třeba zjistit nulové body derivace, tedy řešit rovnici $2 - \ln x = 0$. V bodě $x = 1$ není definována ani druhá derivace funkce f ani samotná funkce. Je třeba jej zahrnout do dělících bodů.

Příklad 3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

$f'' = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1) 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x}\ln x (2 - \ln x)}{\ln^4 x}$,

nulový bod v bodě $x = \mathrm{e}^2$.



Nyní budeme dosazovat do druhé derivace body ze zkoumaných intervalů $(0,1)$, $(1,\mathrm{e}^2)$ a (e^2,∞) a zjistíme znaménko výsledné hodnoty. Jmenovatel je vždy kladný, navíc $\frac{1}{x}$ je vždy kladné na $\mathrm{D}f$.

Příklad 3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

$f'' = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1) 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x}\ln x (2 - \ln x)}{\ln^4 x}$,
nulový bod v bodě $x = \mathrm{e}^2$.

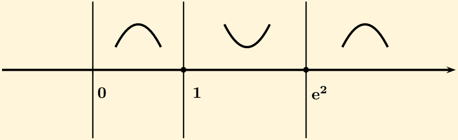
interval	znaménko $\ln x$	znaménko $2 - \ln x$
$(0,1)$	$-$	$+$
$(1,\mathrm{e}^2)$	$+$	$+$
(e^2,∞)	$+$	$-$

Určili jsme znaménka výrazů, odtud pak intervaly konvexnosti a konkávnosti.

Příklad 3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

$f'' = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1) 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x}\ln x (2 - \ln x)}{\ln^4 x}$,
nulový bod v bodě $x = \mathrm{e}^2$.



V bodě $x = \mathrm{e}^2$ dochází ke změně z konvexní na konkávní, druhá derivace v něm existuje a je v rovna nule, tudíž je to inflexní bod, $f(\mathrm{e}^2) = \frac{\mathrm{e}^2}{2}$

Příklad 3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

Zjistíme, jak se f chová pro $x \to 0^+$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = 0$$

Příklad 3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

Zjistíme, jak se f chová pro $x \to 1^-$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

Výraz se chová jako levá část funkce $\frac{1}{x}$, jmenovatel jde k 0 ze záporných hodnot, tedy zleva.

Příklad 3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

Zjistíme, jak se f chová pro $x \to 1^+$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

Výraz se chová jako pravá část funkce $\frac{1}{x}$, jmenovatel jde k 0 z kladných hodnot, tedy zprava.

Příklad 3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Řešení: $\mathrm{D}f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1,\infty)$

Tímto jsme našli asymptotu bez směrnice, je to přímka $x = 1$. Nyní asymptoty se směrnicí:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

Použili jsme l'Hospitalovo pravidlo. Asymptota se směrnicí neexistuje. Navíc nelze zkoumat směr $x \to -\infty$ vzhledem k definičnímu oboru.

Příklad 3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$