Soubor příkladů z Matematické analýzy 1 (M1100)[1]

1. Opakování

1. Upravte následující výrazy:

(a) $\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-2x^2-3x}$,

(b) $\left[\frac{a+b}{2a-2b}-\frac{a-b}{2a+2b}-\frac{2b^2}{b^2-a^2}\right]\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$,

(c) $\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a\sqrt[3]{a}a^{-\frac{2}{3}}}}$,

(d) $\frac{6+x-x^2}{(x+2)|x-3|}$,

(e) $\frac{\left(a^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(a-b)^{\frac{2}{3}}}{\left[(a-b)^4\cdot(a+b)^5\right]^{\frac{1}{6}}} : \left[\frac{a^2-b^2}{(a-b)^{-1}(a+b)^2}\right]^{\frac{1}{3}}$,

(f) $\frac{x^3+2x-3}{x^2-1}$.

2. Vyjádřete racionální lomenou funkci jako součet polynomu a racionální ryze lomené funkce:

(a) $\frac{2x^5-x^4+3x^2-x+1}{x^2-2x+4}$,

(b) $\frac{2x-1}{x+1}$,

(c) $\frac{3x^4+2x^3-x^2+1}{3x+2}$,

(d) $\frac{x^3+2x-1}{x-4}$.

3. Řešte rovnice:

(a) $| x-5 |= 4$,

(b) $x^2+4x-7=0$,

(c) $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-1}{x-5}=4$,

(d) $| 2x-7 | + | x-2 |= 3$,

(e) $\sqrt{1+x}-\sqrt{4-x}=1$,

(f) $3\cdot 2^x+2^{3-x}=10$,

(g) $3^x+3^{x+1}-5^{x+1}=5^x-3^{x+3}+5^{x+2}$,

(g) $\frac{1}{2}\log(2x-3)=\log(x-3)$,

(h) $\sin 2x-\cos x=0$,

(i) $\cos 2x-\cos x=\sin x-\sin 2x$.

4. Řešte soustavy rovnic:

(a) $x+y=1$, $3x+2y=-6$,

(b) $x+2y+z=-6$, $x+z=4$, $2x-3y+z=7$,

(c) $x^2+y^2=25$, $3x+2y=6$.

5. Řešte nerovnice:

(a) $| x-5 |> 4$,

(b) $x^2+2x-3>0$,

(c) $| 2x-3 |\geq| 3x-2 |$,

(d) $| 6x^2-5x |< 6$,

(e) $\frac{1-3x}{x+4}<2$,

(f) $\sqrt{x+2}>\sqrt{2x-8}$,

(g) $| \log x-1 |< 2$,

(h) $\log\sqrt{x^2-4}-\log\sqrt{x+2}<5$,

(i) $\cos x\leq\frac{1}{\cos x}$.

[1]Příklady jsou vybrány z nejrůznějších pramenů, např.:
B. P. Dĕmidovič: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy.* Fragment, Praha 2003 (překlad z ruštiny).
Z. Došlá, J. Kuben: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* Brno 2004.
L. Fuchsová: *Matematická analýza 1 (Diferenciální počet funkcí jedné proměnné).* MU Brno, Brno 1992.
Dále pak z více i méně dostupné středoškolské i vysokoškolské literatury, vlastních poznámek,...

6. Řešte soustavy nerovnic:

   (a) $x + 2y > 6\,, \qquad 3x - y < 4\,,$

   (b) $\mid x - 2 \mid < 7\,, \qquad \mid x + 1 \mid \geq 3\,,$

   (c) $0 < \frac{|\log x| - 1}{3} < 1\,,$

   (d) $\mathrm{cotg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}\,, \qquad \sin x \geq -\frac{1}{2}\,.$

7. Doplňte následující tabulku a daná komplexní čísla zakreslete v Gaussově rovině:

Algebraický tvar	Goniometrický tvar	Exponenciální tvar
$z_1 = -6 + \mathrm{i}6\sqrt{3}$		
		$z_2 = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}$
	$z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$	

8. Pro komplexní čísla z předchozí úlohy:

   (a) určete z_1^*, z_2^*, z_3^* a vyjádřete je ve všech tvarech (algebraický, goniometrický, exponenciální),

   (b) vypočtěte $z_1 \cdot z_2$ (obě čísla vyjádřete v algebraickém tvaru),

   (c) vypočtěte $z_1 \cdot z_3$ (obě čísla vyjádřete v goniometrickém tvaru),

   (d) vypočtěte $z_2 \cdot z_3$ (obě čísla vyjádřete v exponenciálním tvaru),

   (e) vypočtěte $\frac{z_2}{z_3}$ (obě čísla vyjádřete v algebraickém tvaru),

   (f) vypočtěte $\frac{z_1}{z_3}$ (obě čísla vyjádřete v goniometrickém tvaru),

   (g) vypočtěte $(z_1)^{157}$ (číslo z_1 vyjádřete ve tvaru, pro nějž bude výpočet nejjednodušší),

   (h) vypočtěte $\sqrt{z_1}$ (číslo z_1 vyjádřete ve tvaru, pro nějž bude výpočet nejjednodušší).

9. Dokažte, že pro libovolná komplexní čísla platí:

   (a) $(z_1 + z_2)^* = (z_1)^* + (z_2)^*\,,$

   (b) $(z_1 \cdot z_2)^* = (z_1)^* \cdot (z_2)^*\,,$

   (c) $\mid z_1 \cdot z_2 \mid = \mid z_1 \mid \cdot \mid z_2 \mid\,,$

   (d) $\mid \frac{z_1}{z_2} \mid = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,,$

   (e) $\mid z \mid^2 = z \cdot z^*,$

   (f) $\mathrm{Re} z = \frac{z + z^*}{2}\,, \quad \mathrm{Im} z = \frac{z - z^*}{2}\,.$

10. V komplexním oboru řešte rovnice:

    (a) $27x^3 + 125 = 0\,,$

    (b) $x^2 - 3x + 18 = 0\,,$

    (c) $x^2 - (2 + \mathrm{i})\, x - 1 + 7\mathrm{i} = 0.$

11. Popište a v Gaussově rovině zakreslete množinu komplexních čísel, pro něž platí:

    (a) $\mathrm{Re} z > 0\,,$

    (b) $\mathrm{Im} z = 0\,,$

    (c) $\mid z - 2 + \mathrm{i} \mid = 3\,,$

(d) $\mid z-1 \mid = \mid z+\mathrm{i} \mid$,

(e) $\mid z-2 \mid + \mid z+\mathrm{i} \mid = 5$.

12. Určete definiční obory, obory hodnot a základní vlastnosti (sudost, lichost, periodicita, omezenost, intervaly, na nichž roste, klesá,...) funkcí a načrtněte jejich průběh:

(a) $2x+6$,

(b) x^2+3x-7,

(c) $\mid x^2-8 \mid$,

(d) $\mid 2x-3 \mid + \mid x-4 \mid$,

(e) $\frac{2x-1}{x+1}$,

(f) $\sqrt{x+5}$,

(g) $x^2 - x \mid x-2 \mid -4$,

(h) $\log_2(3-x)+1$,

(i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$,

(j) $2\sin 2x - 1$.

13. Určete intervaly, na nichž jsou funkce prosté, a určete na nich funkce inverzní:

(a) $2x^2-3x+7$,

(b) $\mid x-3 \mid$,

(c) $\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$,

(d) $\cos\frac{x}{2}$.

14. Zapište ve tvaru zlomku číslo $0,6\overline{35}$.

15. Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

16. Určete supremum množiny $A = \left\{a \in \mathbf{R} \mid \ a = (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}\right\}$.

17. Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí:

(a) $A \cup B = B \cup A$,

(b) $A \cap B = B \cap A$,

(c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

(d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,

(e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

(f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

(g) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$,

(h) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

2. Obecné vlastnosti reálných funkcí. Elementární funkce. Polynomy.

A. Rozklad racionálních ryze lomených funkcí na parciální zlomky

1. Rozložte na parciální zlomky:

(a) $\frac{2x+1}{x(x^2+1)}$,

(b) $\frac{x^2+x-1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}$,

(c) $\frac{10}{x(x^2-4x-5)(x^2+2)}$,

(d) $\frac{x+1}{x^5+3x^3+2x}$,

(e) $\frac{1-2x}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$.

B. Základní vlastnosti funkcí (periodické, sudé, liché, rostoucí, klesající, prosté, omezené,...)

2. Rozhodněte, zda jsou následující funkce periodické. Pokud ano, určete jejich nejmenší periodu:

(a) $f(x) = \sin x\,, \quad D_f = \mathbf{R}\,,$

(b) $f(x) = \sin 2x + 2\cos\frac{x}{2}\,, \quad D_f = \mathbf{R}\,,$

(c) $f(x) = \sin \pi x + \sin x\,, \quad D_f = \mathbf{R}\,,$

(d) $f(x) = konst.\,, \quad D_f = \mathbf{R}\,,$

(e) $f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in \mathbf{Q} \\ x\,, & x \in \mathbf{I} \end{cases}\,, \quad D_f = \mathbf{R}\,,$

(f) $f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in \mathbf{Q} \\ x\,, & x \in \mathbf{I} \end{cases}\,, \quad D_f = \mathbf{Q}\,.$

3. Rozhodněte, zda jsou následující funkce sudé či liché (zdůvodněte!):

(a) $f(x) = x\,, \quad D_f = \mathbf{R}\,,$

(b) $f(x) = x\,, \quad D_f = \mathbf{R}_0^+\,,$

(c) $f(x) = x^2\,, \quad D_f = \mathbf{R}\,,$

(d) $f(x) = x^2+3x-1\,, \quad D_f = \mathbf{R}\,,$

(e) $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}\,, \quad D_f = \mathbf{R}\,,$

(f) $f(x) = \frac{e^{-x}-e^x}{e^x+e^{-x}} \operatorname{arctg}(x^2+1)\,, \quad D_f = \mathbf{R}\,,$

(g) $f(x) = \frac{x^2+1}{x} \sin x\,, \quad D_f = \mathbf{R}\,,$

(h) lineární kombinace sudých/lichých funkcí.

4. Rozhodněte, zda (event. na jakých intervalech) jsou funkce rostoucí/klesající/nerostoucí/neklesající/monotónní/ryze monotónní (určete rovněž definiční obory funkcí):

(a) $f(x) = x^2\,,$

(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3\,,$

(c) $f(x) = x^6 + 2x^4\,,$

(d) $f(x) = \frac{1}{x-1}\,,$

(e) $f(x) = \frac{x}{x^2+x-2}\,,$

(f) $f(x) = e^{-x}\,.$

5. U funkcí zadaných v příkladu 4. rozhodněte, zda jsou omezené zdola/omezené shora/omezené.

C. Inverzní funkce

6. Určete intervaly, na nichž jsou funkce prosté, a sestrojte na nich funkce inverzní:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}\,,$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}\,,$

(c) $f(x) = 2^{x^2-2x+2}\,,$

(d) $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}\,,$

(e) $f(x) = \ln(x^2+6x+10)\,,$

(f) $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2-x+1)\,.$

D. Spojité funkce

7. Zjistěte, kde jsou spojité zprava/spojité zleva/spojité následující funkce:

(a) $f(x) = \frac{(x^2+1)(x-2)}{|x-1|}\,,$

(b) $f(x) = x^6 + 3x^5 - 2x^3 + 2\,,$

(c) $f(x) = |\,x-3\,|\,,$

(d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4x}\,,$

(e) $f(x) = \frac{x+1}{x^4+8x}\,,$

(f) $f(x) = \frac{1}{(x^2-4)(x^3-1)}\,,$

(g) $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{x+1}\,.$

8. Rozhodněte, zda je funkce $f(x) = \begin{cases} |x| \sin x, & x > 0 \\ 6, & x = 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ v bodě $x = 0$ spojitá zprava/spojitá zleva/spojitá.

9. Rozhodněte, zda je funkce $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$ v bodě $x = 1$ spojitá zprava/spojitá zleva/spojitá.

10. Dokažte, že polynom $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$ má v intervalu $[2, 3]$ (alespoň jeden) kořen.

E. Elementární funkce

11. Určete definiční obory funkcí:

(a) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{x-1}$,

(b) $f(x) = \arcsin(x^2 - 5)$,

(c) $f(x) = \arccos \frac{x}{x^2+1}$,

(d) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$,

(e) $f(x) = \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$,

(f) $f(x) = \log_2 \frac{x+1}{2x-3}$.

12. Načrtněte grafy funkcí:

(a) $f(x) = \arcsin(\sin x)$,

(b) $f(x) = \sin(\arcsin x)$,

(c) $f(x) = \cos(2\arccos x)$,

(d) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{3}\right)$,

(e) $f(x) = 2\arccos\left(\frac{3x+4}{2}\right)$.

13. Řešte rovnice:

(a) $2\operatorname{arctg} \frac{x^2+1}{2} = \frac{\pi}{2}$,

(b) $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\pi}{3}$,

(c) $3\arcsin\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

14. Upravte:

(a) $f(x) = \sin(3\arcsin x)$,

(b) $f(x) = \operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x)$.

15. Dokažte:

(a) $\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arctg} x$,

(b) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

F. Polynomy

16. Určete:

(a) $P(2)$ a $P(-2)$ pro $P(x) = x^5 + 4x^3 + 2x^2 - x + 5$,

(b) $P(3)$ pro $P(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^3 - 4x^2 + 2$.

17. V reálném oboru rozložte:

(a) $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$,

(b) $P(x) = x^6 + 1$,

(c) $P(x) = x^5 + x$.

3. Limity funkcí [2]

1. Vypočtěte jednostranné limity a v každé z částí (a)–(h) interpretujte získané výsledky:

   (a) $\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1}$, $\lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1}$,

   (b) $\lim_{x\to 1+} \frac{1}{(x-1)^2}$, $\lim_{x\to 1-} \frac{1}{(x-1)^2}$,

   (c) $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x}$, $\lim_{x\to 0-} \frac{\ln x}{x}$,

   (d) $\lim_{x\to 1+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x-1}$, $\lim_{x\to 1-} \frac{\operatorname{arctg} x}{x-1}$,

   (e) $\lim_{x\to 1+} \frac{1}{\ln x}$, $\lim_{x\to 1-} \frac{1}{\ln x}$,

   (f) $\lim_{x\to 0+} \frac{\text{sin x}}{x}$, $\lim_{x\to 0-} \frac{\text{sin x}}{x}$,

   (g) $\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x}$, $\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x}$,

   (h) $\lim_{x\to 1+} \frac{|x|}{x}$, $\lim_{x\to 1-} \frac{|x|}{x}$.

2. Rozhodněte a zdůvodněte, zda existují následující limity:

   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{x}{\ln^3 x}$,

   (b) $\lim_{x\to 3} \frac{x}{x^3-27}$,

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{x+10}{e^x-1}$,

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2}$.

3. Vypočtěte limity (pokud existují):

   (a) limitu Dirichletovy funkce v libovolném bodě,

   (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2+2}{-x^3+x-1}$,

   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x^3+x^2+1}{x^5+5}$,

   (d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^6+x^3+x^2+1}{x^5+5}$,

   (e) $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x+3}$,

   (f) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[5]{x^6}+\sqrt[7]{x^{13}}}$,

   (g) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}+x}{\sqrt[3]{x^2+1}+2x}$,

   (h) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x^3+x^2+1}}{\sqrt[5]{x^4+x+1}+\sqrt{x+1}}$,

   (i) $\lim_{x\to\infty} \frac{3^x+2^x}{2\cdot 3^x-2^x}$,

   (j) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+2}\right)$,

   (k) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}\right)$,

---

[2] Další příklady na výpočty limit budou řešeny v paragrafu *L'Hospitalovo pravidlo*.

(l) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$,

(m) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-x\right)$,

(n) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2+8x+1}\right)$,

(o) $\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$,

(p) $\lim_{x\to 0}\left(x\sin x\right)$,

(q) $\lim_{x\to 0}\left(x\,\mathrm{tg}\,x\right)$,

(r) $\lim_{x\to 0}\left(x\,\frac{\sin x}{x+1}\right)$,

(s) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{x^3-2x^2+4}\right]$,

(t) $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{\log_2 x}$,

(u) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}$.

4. Určete konstanty a a b (vlastní reálná čísla) tak, aby platilo:

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$,

(b) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0$.

4. Posloupnosti reálných čísel

A. Opakování

1. Následující posloupnosti určete rekurentně:

(a) $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

(b) $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$,

(c) $\{3^n\}_{n=1}^{\infty}$,

(d) $\{1\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Následující posloupnosti určete předpisem pro n-tý člen (správnost výsledku dokažte matematickou indukcí):

(a) $a_{n+1}=\left(\frac{n}{n+2}\right)^2 a_n$, $\quad a_1=1$,

(b) $a_{n+1}=\left(\frac{1}{a_n}\right)$, $\quad a_1=1$,

(c) $a_{n+1}=a_n-\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$, $\quad a_1=\frac{1}{2}$,

(d) $a_{n+1}=a_n-2$, $\quad a_2=2$.

3. Dokažte, že posloupnost $\left\{\frac{3n-1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí.

4. Pro která čísla p je posloupnost $\left\{\frac{np}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ klesající?

5. Určete, které z následujících posloupností jsou aritmetické, resp. geometrické a určete diferenci, resp. kvocient:

   (a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

   (b) $\{3^{2n}\}_{n=1}^{\infty}$,

   (c) $\{2^3\}_{n=1}^{\infty}$,

   (d) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

6. Pro aritmetickou, resp. geometrickou posloupnost stanovte podmínky na diferenci, resp. kvocient, aby posloupnost byla rostoucí/klesající/nerostoucí/neklesající.

7. Kolik členů posloupnosti $\{1, 2, 3, 4, ...\}$ dává součet větší než 210?

8. Kolik členů aritmetické posloupnosti, v níž $a_{10} = 8$ a $a_{15} = 18$, musíme sečíst, aby součet byl větší než 100 a menší než 110?

9. Na kolik procent původního tlaku klesne tlak v recipientu vývěvy po 50 zdvizích pístu, klesne-li při jednom zdvihu o 4%?

10. Mezi čísla 4 a 108 vložte dvě čísla tak, aby s danými čísly tvořila geometrickou posloupnost.

11. Rozhodněte, zda jsou následující posloupnosti shora omezené/zdola omezené/omezené:

    (a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

    (b) $\{3^n\}_{n=1}^{\infty}$,

    (c) $\{n+7\}_{n=1}^{\infty}$,

    (d) $\{3-2n\}_{n=1}^{\infty}$,

    (e) $\left\{2-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

    (f) $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

B. Hromadné body posloupností, limita superior, limita inferior

12. Určete hromadné body, limitu superior a limitu inferior posloupností:

    (a) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$,

    (b) $\{1, 2, 3, 4, ...\}$,

    (c) $\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ...\}$,

    (d) $a_n = [3 + (-1)^n]\ \frac{n}{n+1}$,

    (e) $a_n = \left[1 + \frac{(-1)^n}{2}\right] \frac{n^2}{3n^2+1}$.

C. Limity posloupností

13. Určete, které z posloupností zadaných v předchozí úloze jsou konvergentní, resp. divergentní.

14. Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+...+n}{n^2}$.

15. Určete (pokud existují) limity následujících posloupností [3]:

(a) $a_n = \frac{1}{n}$,

(b) $a_n = n$,

(c) $a_n = (-1)^n n$,

(d) $a_n = 1$,

(e) $a_n = \frac{n^3}{2n^3-n^2+2}$,

(f) $a_n = \frac{n}{\ln n}$,

(g) $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{pn+\sqrt{n}+2}$, $p \in \mathbf{R}$,

(h) $a_n = \frac{\sin n+n}{\sin n-n}$.

5. Diferenciální počet

A. Výpočty derivací funkcí, geometrický význam derivace

1. Vypočtěte a upravte derivace zadaných funkcí. U funkcí v levém sloupci určete rovněž jejich definiční obory a definiční obory derivací.

(a) $\sin x \cos x$,

(b) $\sin^2 x$,

(c) $\sin x^2$,

(d) $\frac{x^2+1}{x^5-3x^3+2x}$,

(e) $\sqrt{1-x^2}$,

(f) $\sqrt[3]{x^2+1}$,

(g) $\exp(x^2)$,

(h) $\exp\left(x\sqrt{5+2x}\right)$,

(i) $A^{\tan^2(2x+1)}$,

(j) $\ln\frac{x+1}{x-1}$,

(k) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$,

(l) $\log_4 x^2$,

(m) $\log_7\frac{x^2-1}{x-1}$,

(n) x^x,

(o) $\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

(p) $\arctan\frac{1+x}{1-x}$,

(q) $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$,

(r) $\frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}$,

(s) $\frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$,

(t) $\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\arctan\sqrt{x}$,

(u) $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}+\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$,

(v) $\sqrt{1+2x-x^2}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{1+x}-\sqrt{2}\ln(1+x)$,

(w) $\frac{1}{4(1+x^4)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$,

(x) $\sqrt{1+x}-\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$,

(y) $-\sqrt{1+x^2}+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$,

(z) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

[3] Dále lze počítat některé limity z příkladu 3. oddílu 5. (které a proč?)

2. Vypočtěte a upravte derivace zadaných funkcí:

   (a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$,

   (b) $f(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$,

   (c) $f(x) = \sin\left[\sin\left(\sin x\right)\right]$,

   (d) $f(x) = \ln \frac{\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}}$,

   (e) $f(x) = \frac{\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x}{\ln x}$,

   (f) $f(x) = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{2x-x^2}$,

   (g) $f(x) = 2\sqrt{x+1} + \ln\frac{x+2-2\sqrt{x+1}}{x}$,

   (h) $f(x) = (x-2)\sqrt{1+\mathrm{e}^x} - \ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}$,

   (i) $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)$,

   (j) $f(x) = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$.

3. Rozhodněte, zda má funkce $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \geq 0 \\ 1-x^2, & x < 0 \end{cases}$ v bodě $x=0$ derivaci.

4. Rozhodněte, zda má funkce $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \geq 0 \\ 1-x^2, & x < 0 \end{cases}$ v bodě $x=0$ derivaci.

5. Najděte koeficienty a, b aby funkce $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq x_0 \\ ax+b, & x > x_0 \end{cases}$ byla v bodě $x = x_0$ spojitá a měla v něm derivaci.

6. Odvoďte vztah pro $f^{(n)}(x)$:

   (a) $f(x) = \frac{1}{x}$,

   (b) $f(x) = \ln(1-x)$,

   (c) $f(x) = \sin x$,

   (d) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$,

   (e) $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$,

   (f) $f(x) = \sqrt{x}$,

   (g) $f(x) = x\ln x$,

   (h) $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$.

7. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = \ln x$ v bodě $x_0 = 1$.

8. Najděte bod, v němž je třeba ke grafu funkce $y = 1-x^2$ sestrojit normálu, aby procházela bodem $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

9. Na parabole $y = 1-x^2$ najděte bod, v němž je tečna rovnoběžná s přímkou procházející průsečíky grafu paraboly s osami soustavy souřadnic.

10. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = x^3$ v bodě $x_0 = -1$.

11. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = \frac{1}{x^2+1}$ v bodě $x_0 = 1$.

12. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = 1 - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ v jeho průsečíku s osou x.

B. L'Hospitalovo pravidlo

13. Vypočtěte limity:

    (a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x}$,

    (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$,

    (c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$,

    (d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-6x+6\sin x}{2x^5}$,

    (e) $\lim_{x\to 0+} x^2 \ln x$,

    (f) $\lim_{x\to 1-} \ln x \cdot \ln(1-x)$,

    (g) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) \ln x$,

    (h) $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{\ln x}$,

    (i) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^{x}-1}\right)$,

    (j) $\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right)$,

    (k) $\lim_{x\to 1+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$,

    (l) $\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$,

    (m) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$,

    (n) $\lim_{x\to 0+} x^{\sin x}$,

    (o) $\lim_{x\to 0+} (\sin x)^{\frac{1}{x}}$,

    (p) $\lim_{x\to \infty} (1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}}$,

    (q) $\lim_{x\to 1+} (\ln x)^{1-x}$,

    (r) $\lim_{x\to 1} (2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

C. Extrémy funkcí, vyšetřování průběhu funkcí

14. Najděte lokální extrémy funkcí:

    (a) $f(x) = x^3 - 12x - 6$,

    (b) $f(x) = \frac{x-1}{x}$,

    (c) $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}}$.

15. Najděte globální (absolutní) extrémy funkcí na daných intervalech:

    (a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 8$, $\quad x \in [-3, 6]$,

(b) $f(x) = x^2 \ln x\,, \qquad x \in [1, \mathrm{e}]\,,$

(c) $f(x) = x - 2\sqrt{x}\,, \qquad x \in [0, 5]\,,$

(d) $f(x) = \mid x^2 + 2x - 3 \mid + \frac{3}{2} \ln x\,, \qquad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]\,.$

16. Pod jakým úhlem vzhledem k vodorovné rovině musíme vrhnout těleso počáteční rychlostí $\vec{v}_0$, aby dopadlo co nejdále? Odpor vzduchu zanedbáváme.

17. Určete rozměry obdélníkového výběhu o největší ploše: k jeho oplocení je k dispozici 100 m pletiva, jednu stranu tvoří stěna budovy.

18. Do půlkruhu o poloměru r vepište obdélník maximálního obsahu.

19. Do kruhu o poloměru r vepište rovnoramenný trojúhelník o největším obsahu.

20. Určete rozměry válce, který má při daném povrchu maximální objem.

21. Ze čtvercového plechu se stranou $2a$ se zhotoví krabička tak, že se v rozích vystřihnou stejné čtverce. Jaká musí být strana vystřiženého čtverce, aby byl obsah krabičky maximální?

22. Do daného rovnoramenného trojúhelníku vepište pravoúhelník maximálního obsahu.

23. Dvě chodby o šířkách a a b na sebe kolmo navazují. S jakou délkou tyče můžeme ještě vodorovně projít?

24. Silážní jáma má mít tvar kvádru s objemem 200 m^3. Délka má být čtyřnásobkem šířky. 1 m^2 základny je dvakrát levnější než 1 m^2 stěny. Jaké mají být rozměry jámy, aby stavba vyšla co nejlevněji?

25. Vyšetřete průběhy funkcí:

(a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}\,,$

(b) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}\,,$

(c) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}\,,$

(d) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}\,,$

(e) $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}\,,$

(f) $f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)\,,$

(g) $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3}\,,$

(h) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}\,,$

(i) $f(x) = \ln \frac{x}{x+2}\,,$

(j) $f(x) = \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\,.$

D. Taylorův rozvoj

26. Pomocí diferenciálu zjistěte, o kolik se přibližně zvětší hodnota funkce $f(x) = \frac{x^2}{x^3+x^2+1}$, jestliže místo $x = 1$ vezmeme $x = 1,02$.

27. Představme si, že kolem rovníku je natažen drát. Nyní obtočíme rovník ve vzdálenosti 10 cm. O kolik metrů drátu budeme potřebovat víc?

28. Pomocí diferenciálu odhadněte, jaká je změna obsahu kruhové výseče o středovém úhlu $\alpha = 60^\circ$ a poloměru 1 m při zvětšení poloměru o 1 cm.

29. Z teorie relativity známe vztah pro kinetickou energii částice o klidové hmotnosti m_0 pohybující se rychlostí v
$$E_\mathrm{k} = mc^2 - m_0c^2,$$
kde $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ a c je rychlost světla. Užitím výsledku předchozí úlohy ukažte, že pro $v \ll c$ přejde tento vztah v klasický vzorec $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_0v^2$.

30. Pro spektrální objemovou hustotu záření absolutně černého tělesa o termodynamické teplotě T platí tzv. *Planckův vyzařovací zákon*
$$\rho_\mathrm{P}(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$
kde ν je frekvence záření, h (resp. k) je Planckova (resp. Boltzmannova) konstanta a c je rychlost světla. Ukažte, že pro malé frekvence nebo vysoké teploty (tj. pro $h\nu \ll kT$) můžeme tento vztah přepsat do přibližného tvaru (tzv. *Rayleighův-Jeansův zákon*)
$$\rho_\mathrm{RJ}(\nu, T) = konst.\, \nu^2 T\,.$$
(Konstantu úměrnosti rovněž určete.)

31. Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte:

    (a) $\sin 28^\circ$, (b) $\sqrt{3,98}$, (c) $\mathrm{e}^{0,05}$.

32. Určete Maclaurinův rozvoj funkcí:
    (a) $f(x) = \sin x$,
    (b) $f(x) = \cos x$,
    (c) $f(x) = \log(1 + x)$,
    (d) $f(x) = \mathrm{e}^x$,
    (e) $f(x) = (1 + x)^a$.

33. Řešte příklad 31. užitím Taylorova polynomu třetího stupně.

34. Spočtěte na čtyři desetinná místa přesně $\sin 18^\circ$.

35. Vypočtěte číslo e s chybou menší než 10^{-3}.

E. Křivky v rovině

Tečné vektory, normálové vektory, binormálové vektory, křivosti, poloměry křivosti, oskulační kružnice — viz cvičení z Mechaniky a molekulové fyziky

6. Integrální počet

A. Základní integrační metody

1. Vypočtěte a upravte následující jednoduché integrály (upravte a počítejte přímo):

   (a) $\int (x^2 + 3x + 5)\ \mathrm{d}x$,

   (b) $\int \frac{2}{x+3}\,\mathrm{d}x$,

   (c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2}$,

   (d) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$,

   (e) $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

   (f) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

2. Vypočtěte a upravte následující integrály (použijte substituční metodu I):

   (a) $\int \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x$,

   (b) $\int \mathrm{cotan} x\,\mathrm{d}x$,

   (c) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$,

   (d) $\int \frac{x^3}{x^8+1}\,\mathrm{d}x$,

   (e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a-bx^2}}$,

   (f) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

3. Vypočtěte a upravte následující integrály (rozložte na parciální zlomky):

   (a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$,

   (b) $\int \frac{3x-4}{(x^2-x-6)^2}\,\mathrm{d}x$.

4. Vypočtěte a upravte následující integrály (použijte substituční metodu II, vhodné substituce vyhledejte v literatuře):

   (a) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$,

   (b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(25+x^2)^3}}$,

   (c) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$,

   (d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$.

5. Vypočtěte a upravte následující integrály (použijte metodu per partes):

   (a) $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$,

   (b) $\int \mathrm{arctan} x\,\mathrm{d}x$,

   (c) $\int x^2\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$,

   (d) $\int x^3\ \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$,

   (e) $\int \mathrm{e}^{2x} \sin 3x\,\mathrm{d}x$,

   (f) $\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x$.

6. Odvoďte rekurentní formuli pro integrál

$$\mathrm{I}_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n},$$

   tj. vyjádřete jej prostřednictvím integrálů I_{n-1}, $\mathrm{I}_{n-2}, \ldots$ Použijte metodu per partes.

B. Speciální integrační postupy

7. Užitím vhodných metod vypočtěte a upravte následující integrály:

   (a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos 2x}$,

   (b) $\int (|\, x \,| - x)\, \mathrm{d}x$,

   (c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x}$,

   (d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-2-3x-x^2}}$,

   (e) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[4]{x+1}}$,

   (f) $\int x\sqrt{x^2+9}\ \mathrm{d}x$,

   (g) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\, \mathrm{d}x$,

   (h) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\, \mathrm{d}x$,

   (i) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+3\cos^2 x}$,

   (j) $\int \sin\left(\sqrt{2}x\right) \cos x \, \mathrm{d}x$.

C. Aplikace

8. Vypočtěte obsah obrazce omezeného grafy:

   (a) $y = x^2 , \quad x = y^2$,

   (b) $y = x^2 - 2x , \quad y = 3x - x^2$.

9. Vypočtěte délku křivky $y = \ln x$ pro $x \in \left[\sqrt{3}, \sqrt{8}\right]$.

10. Vypočtěte délku křivky $x = a\,(t - \sin t)$, $\quad x = a\,(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

11. Vypočtěte objem tělesa omezeného rovnicemi $z = x^2 + y^2$, $\quad z = 1$.

12. Vypočtěte objem kužele o výšce v a poloměru r.