

Monotonnost, extrémny a průběh funkce

O správnosti výpočtů u příkladů, kde nejsou uvedeny výsledky, se lze přesvědčit nakreslením grafu funkce (např. s využitím programu MAPLE).

Příklad 1. Vyšetřete, kdy je funkce rostoucí a klesající a nalezněte extrémny:

- a) $f(x) = \sqrt[3]{(x^4 - 1)^2}$;
- b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$;
- c) $f(x) = x \ln^2 x$;
- d) $f(x) = x^3 \sqrt[3]{(x - 1)^2}$;
- e) $f(x) = x - \frac{1}{x}$;
- f) $f(x) = \ln(1 + x - 4x^2)$;
- g) $f(x) = x^x$;
- h) $f(x) = |x|$.

Příklad 2. Nalezněte absolutní extrémny funkce na zadaném intervalu:

- a) $f(x) = x^2 - 2x + 5, \quad x \in \langle -2, 4 \rangle$;
- b) $f(x) = x^3 - 3x + 20, \quad x \in \langle -3, 3 \rangle$;
- c) $f(x) = x - 2 \ln x, \quad x \in \langle 1, e \rangle$;
- d) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 3, \quad x \in \langle -4, 4 \rangle$;
- e) $f(x) = x^3 - 3x + 20, \quad x \in \langle -3, 3 \rangle$.

Příklad 3. Vyšetřete kdy je funkce rostoucí, klesající, konvexní, konkávní a určete lokální extrémny a inflexní body:

- a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$;
- b) $f(x) = e^{-x^2}$;
- c) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$;
- d) $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;
- e) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$;
- f) $f(x) = x + 2 \operatorname{arccotg} x$.

Příklad 4. Určete asymptoty funkce:

- a) $f(x) = \frac{3}{2x-1} - \frac{2x-1}{3}, \quad \text{Výsledek : } x = \frac{1}{2}, y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$;
- b) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}, \quad \text{Výsledek : } x = -1, y = x - 5$;
- c) $f(x) = x - \frac{1}{x}, \quad \text{Výsledek : } x = 0, y = x$;
- d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x^2}, \quad \text{Výsledek : } y = x + \frac{4}{3}$;
- e) $f(x) = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right), \quad \text{Výsledek : } x = -\frac{1}{e}, y = x + \frac{1}{e}$;
- f) $f(x) = x + 2 \operatorname{arccotg} x, \quad \text{Výsledek : } y = x, y = x + 2\pi$;
- g) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}, \quad \text{Výsledek : } y = -x$;

- h) $f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}$, Výsledek : $y = -x$, $x = 0$;
i) $f(x) = x + e^{-x}$, Výsledek : $y = x$;
j) $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-1}$, Výsledek : $x = 1$, $y = 0$;
k) $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$, Výsledek : $x = -1$, $y = \frac{1}{2}x - 1$;
l) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$, Výsledek : $x = 0$, $y = x + 1$;
m) $f(x) = \frac{2x}{x^2-1} + x$, Výsledek : $y = x$, $x = 1$, $x = -1$;
n) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, Výsledek : $y = 0$.

Příklad 5. Vyšetřete průběh funkce

- a) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$;
b) $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-1}$;
c) $f(x) = x + 2\operatorname{arccotg} x$;
d) $f(x) = x + e^{-x}$;
e) $f(x) = \frac{1-x^3}{x^2}$;
f) $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$;
g) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$;
h) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$;
i) $f(x) = \frac{2x}{x^2-1} + x$;
j) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$.