PRŮBĚH FUNKCE
JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

Cílem vyšetřování průběhu funkce je umět nakreslit její graf. Obvykle postupujeme tak, že nalezneme

- její maximální definiční obor,
- průsečíky jejího grafu s osami x a y,
- intervaly, na nichž je spojitá, a body nespojitosti,
- limity (i jednostranné) v krajních bodech jejího definičního oboru a v bodech, v nichž není spojitá,
- intervaly monotonie, tj. intervaly, na nichž je klesající, rostoucí či konstantní,
- její lokální extrémy,
- intervaly, na nichž je konkávní či konvexní, a její inflexní body,
- její asymptoty.

Po provedení výše uvedeného programu máme již o studované funkci zpravidla k dispozici dostatek informací na to, abychom její graf mohli načrtnout. Další užitečné informace mohou být, zda je funkce sudá či lichá, zda je periodická apod.

PŘÍKLAD 1

Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

Řešení

Maximální definiční obor

Protože výraz $1+x^2$ je vždy nenulový, je maximální definiční obor studované funkce totožný s množinou všech reálných čísel, $D_f=\mathbb{R}$.

Průsečík s osou y

$$f(0)=\frac{0}{1+0^2}=0$$

Průsečíky s osou x

$$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{1+x^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$$

Body nespojitosti

Funkce je spojitá na množině všech reálných čísel, neboť funkce $g(x)=x$ a $h(x)=1+x^2$ jsou spojitými funkcemi na $\mathbb{R}$[1] a funkce $h(x)$ nenabývá navíc v žádném bodě reálné osy nulové hodnoty.[2]

---

[1] Viz *Breviář*, kap. 1.1, str. 11.

[2] Podle věty o limitě podílu, viz *Breviář* kap. 1.1, platí pro libovolný bod *a* reálné osy

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} g(x)}{\lim\limits_{x\to a} h(x)}.$$

Protože jsou ale obě funkce spojité, můžeme dále psát

$$\ldots=\frac{g(a)}{h(a)}=\frac{g}{h}(a).$$

Limita funkce *g*/*h* se tedy v libovolném bodě reálné osy rovná její funkční hodnotě, a proto je tato funkce v libovolném bodě reálné osy též spojitá (viz Breviář, kap. 1.1, str. 7).

Limity v nekonečnu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+x}=\frac{1}{\frac{1}{\infty}+\infty}=\frac{1}{0+\infty}=\frac{1}{+\infty}=0\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+x}=\frac{1}{\frac{1}{-\infty}-\infty}=\frac{1}{0-\infty}=\frac{1}{-\infty}=0$$

Intervaly monotonie

Intervaly monotonie hledáme řešením nerovnic $f'(x)>0$ resp. $f'(x)<0$. Potřebujeme tedy znát první derivaci studované funkce

$$f'(x)=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{x'\left(1+x^2\right)-x\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1\left(1+x^2\right)-x\left(2x\right)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,.$$

Příslušné nerovnice řešíme obvyklým způsobem

- $f'(x)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}>0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-x^2>0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in(-1,1)\,,$
- $f'(x)<0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}<0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-x^2<0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\,.$

Na intervalu (-1,1) je tedy funkce *f* rostoucí, na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(1,+\infty)$ klesající.

Lokální extrémy

Na základě právě určených intervalů monotonie vidíme okamžitě, že v bodě x = -1 nabývá studovaná funkce svého lokálního minima a v bodě x = 1 lokálního maxima. Samostatně to ověřte výpočtem nulových bodů první derivace funkce *f* a pomocí znaménka derivace druhé.

Intervaly konvexnosti a konkávnosti

Při vyšetřování konvexnosti a konkávnosti zadané funkce řešíme nerovnice $f''(x)>0$ resp. $f''(x)<0$, musíme proto znát její druhou derivaci

$$f''(x)=\left(\frac{x}{1+x^2}\right)''=\left[\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\right]'=\frac{\left(1-x^2\right)'\left(1+x^2\right)^2-\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)^{2'}}{\left(1+x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{(-2x)\left(1+x^2\right)^2-\left(1-x^2\right)\left[2\left(1+x^2\right)2x\right]}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-2x\left(3-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}\,,$$

Nerovnice vedoucí k intervalům, na nichž je studovaná funkce konvexní či konkávní, řešíme opět některým ze standardních způsobů. Např. nalezneme nejdříve nulové body $f''(x)$

$$f''(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-2x\left(3-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x\left(3-x^2\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(x=0\vee x=\pm\sqrt{3}\right)$$

a vezmeme v úvahu fakt, že na intervalech $(-\infty,-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},0)$, $(0,\sqrt{3})$ a $(\sqrt{3},+\infty)$ nemění druhá derivace studované funkce znaménko. Snadným výpočtem ověříme, že

- pro $x \in (-\infty,-\sqrt{3})$ je $f''(x) < 0$, a tedy funkce *f* je na tomto intervalu konkávní,
- pro $x \in (-\sqrt{3},0)$ je $f''(x) > 0$, a tedy funkce *f* je na tomto intervalu konvexní,
- pro $x \in (0,\sqrt{3})$ je $f''(x) < 0$, a tedy funkce *f* je na tomto intervalu konkávní,
- pro $x \in (\sqrt{3},+\infty)$ je $f''(x) > 0$, a tedy funkce *f* je na tomto intervalu konvexní.

<u>Asymptota v</u> $-\infty$

Asymptota v $-\infty$ je přímka $y = kx + q$, ke které se graf zadané funkce neomezeně blíží, pokud nezávislá proměnná klesá pode všechny meze, $x \to -\infty$. Její parametry *k* a *q* hledáme pro zadanou funkci pomocí vzorců [3]

$$k_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+(-\infty)^2} = \frac{1}{1+\infty} = 0,$$

$$q_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - k_{-\infty}x\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x}{1+x^2} - 0x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$$

Asymptotou v $-\infty$ je tedy přímka $y = 0$, čili osa x.

<u>Asymptota v</u> $+\infty$

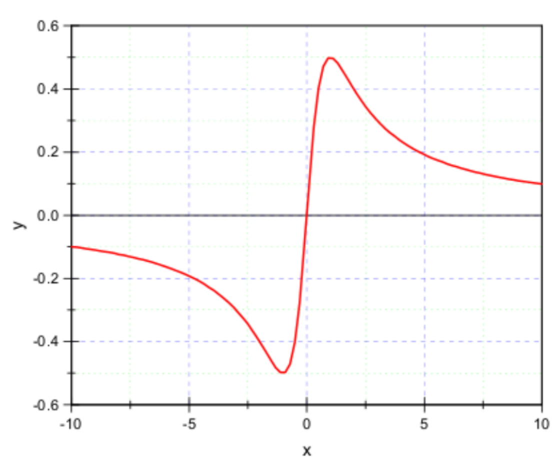
Zcela analogickým výpočtem získáme i parametry asymptoty v $+\infty$, ke které se graf funkce *f* neomezeně blíží pro $x \to +\infty$.

$$k_{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\infty^2} = \frac{1}{1+\infty} = 0,$$

$$q_{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - k_{+\infty}x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x}{1+x^2} - 0x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$$

I asymptotou v $+\infty$ je tedy osa x.[4]

<u>Graf</u>



[3] Abychom zdůraznili fakt, že se jedná o asymptotu v $-\infty$, opatřujeme parametry *k* a *q* indexem $-\infty$.

[4] Shodou okolností jsou v tomto příkladu asymptoty v $-\infty$ i v $+\infty$ totožné. Obecně tomu tak ale být nemusí!

CVIČENÍ

1. Vyšetřete průběh následujících funkcí a nakreslete jejich grafy.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$	d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$	g) $f(x) = \sin^2 x$ [5]
b) $f(x) = x^4 - x^2 - 2$	e) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$	h) $f(x) = \operatorname{tg} x$ [6]
c) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)$	f) $f(x) = 2x^{3/2} - 9x + 12\sqrt{x}$	i) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

Výsledky:

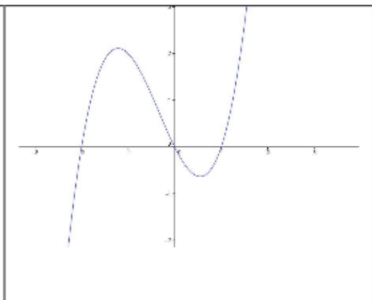
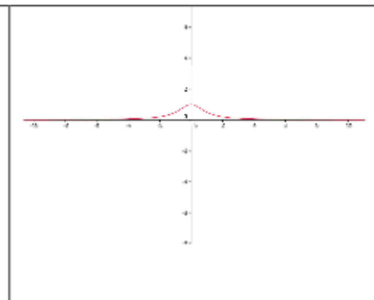
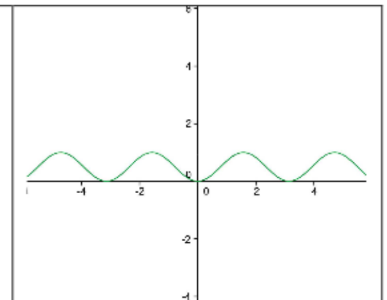
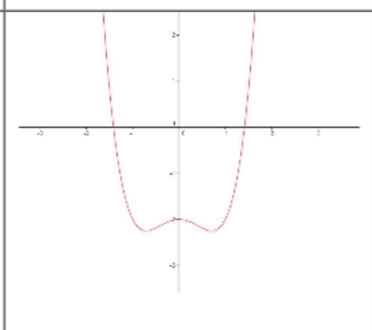
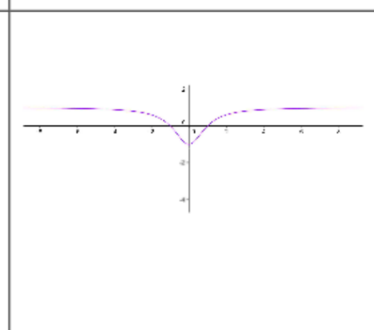
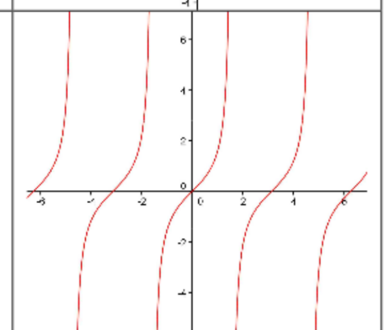
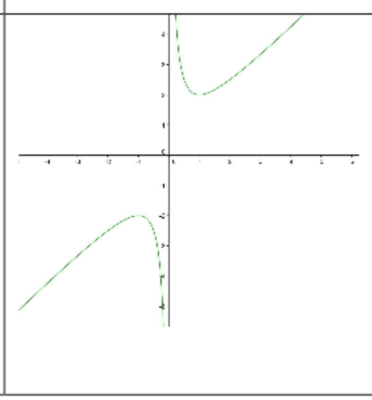
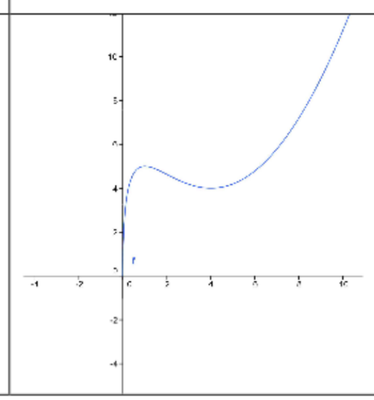
CVIČENÍ 1

a)	$D_f = R$, Klesající $\left(\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3};\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)$, Rostoucí $\left(-\infty;-\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3};\infty\right)$, $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)$ konkávní, $\left(-\dfrac{1}{3};\infty\right)$ konvexní,	d)	$D_f = R$, rostoucí $(-\infty,0)$, klesající $(0,\infty)$, $x = 0$ maximum, Na celém D_f konkávní,	g)	$D_f = R$, klesající $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right) + k\pi$, kde $k \in Z$, rostoucí $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) + k\pi$, kde $k \in Z$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ maximum, $x = \pi + k\pi$ minimum, konkávní $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right) + k\pi$, konvexní $\left(\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right) + k\pi$,
b)	$D_f = R$, Klesající (-1,2;0,3), Rostoucí $(-\infty;-1{,}2)\cup(0{,}3;\infty)$, $x = -\dfrac{1}{2}$ maximum, $x = \dfrac{1}{2}$ minimum, $\left(\dfrac{1}{6};\infty\right)$ konvexní,	e)	$D_f = R$, klesající $(-\infty,0)$, rostoucí $(0,\infty)$, $x = 0$ minimum, $(-1;1)$ konvexní, $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$, konkávní,	h)	$D_f = R \setminus (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ konkávní $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right) + k\pi$, konvexní $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right) + k\pi$, Na každém intervalu rostoucí Nemá max ani min,

[5] U této funkce vyšetřete její průběh na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$.

[6] U této funkce vyšetřete její průběh na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$.

c)	$D_f = R \setminus 0$ $(-\infty;-1) \cup (1;\infty)$ rostoucí, $(-1;1)$ klesající, $x = -1$ maximum, $x = 1$ minimum, $(0;\infty)$ konvexní, $(-\infty;0\rangle$ konkávní,	f)	$D_f = (0,\infty)$ rostoucí $(0,1) \cup (4,\infty)$, klesající $(1,4)$, $x = 1$ maximum, $x = 4$ minimum, $\langle 0;2)$ konkávní, $(2;\infty)$ konvexní,	i)	$x = \{n\pi\}$, kde $n \in N$ lok. max, $x = \left\{\frac{(2n-1)\pi}{2}\right\}$ lok. min, V celém D_f je rostoucí, Nemá max ani min, $(-\infty;0)$ konvexní, $(0;\infty)$ konkávní.

a		d		g	
b		e		h	
c		f		i