ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

Instrukce ke zkoušce:

- Jméno a příjmení: ____________________
- UČO: _______________

Příklad	1.	2.	3.	4.	5.	6.	$\sum$	**Z**	$\sum\sum$
Bodový zisk									

TENTO LIST ODEVZDÁVÁTE SPOLEČNĚ S ŘEŠENÍM.

- Počet odevzdaných listů (včetně tohoto): _____
- Pokud jste přišli získat zápočet, napište ke svému jménu **Z** a proškrtněte sloupec s $\sum\sum$.
- Všechny své výpočty řádně zdůvodněte!
- Minimální čas na vypracování je 100 minut
- **HODNĚ ŠTĚSTÍ!** (Pokud jej potřebujete.)

ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ:

1. (7 bodů) Vyřešte následující diferenciální rovnici

$$y = x(y')^2 + \ln(y')^2.$$

2. (6 bodů) Vyřešte následující diferenciální rovnici

$$y'' - 4y' + 5y = \mathrm{e}^{2x} \cos 2x.$$

3. (5 bodů) Vypočtěte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1 + x^2y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

4. (6 bodů) Určete Taylorův polynom stupně 3 se středem v bodě $[1, -2]$ pro funkci

$$f(x, y) = \frac{2x}{3y}.$$

5. (7 bodů) Funkce $z = f(x, y)$ je zadána implicitně rovností

$$x + y + z = \mathrm{e}^{-(x+y+z)+1}.$$

Určete hodnoty všech parciálních derivací prvního řádu funkce $z(x, y)$ v bodě $[1, ?, -1]$. Z jejich znalosti určete rovnici tečné roviny a normály této implicitní funkce v bodě dotyku $[1, ?, -1]$.

6. (9 bodů) Určete vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

na množině $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4$.

- Zadání si můžete ponechat — správné řešení naleznete v ISu ve studijních materiálech předmětu M2100.
- Ústní část zkoušky začíná ve 13^{00} v učebně MS2 na ÚMS.

1) $y = x(y')^2 + \ln(y')^2$

$y' = p$

$y = xp^2 + \ln p^2$

$p = y' = p^2 + x \cdot 2p \cdot p' + 2 \cdot \frac{1}{p} \cdot p'$

$p(1-p) = \left(2px + \frac{2}{p}\right)p'$

$\frac{dx}{dp} = \frac{2px + \frac{2}{p}}{p(1-p)} \quad \Big| \quad p \neq 0,\ p \neq 1$

nevyhovuje zadání

vyhovuje zadání => $y = x$

$\frac{dx}{dp} = \frac{2x}{1-p} + \frac{2}{p^2(1-p)}$

$x' - \frac{2x}{1-p} = \frac{2}{p^2(1-p)} \quad \Big| \quad e^{-\int \frac{2}{1-p}dp} = e^{+2 \cdot \ln(1-p)} = (1-p)^2$

$x'(1-p)^2 + 2x(1-p) = \frac{2}{p^2}(1-p)$

$\left(x(1-p)^2\right)' = \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p}$

$x(1-p)^2 = -\frac{2}{p} - 2\ln|p| + C$

$$\underline{x = \frac{2}{(1-p)^2}\left(C - \frac{1}{p} - \ln p\right)}$$

$$\underline{y = \frac{2p^2}{(1-p)^2}\left(C - \frac{1}{p} \cdot \ln p\right) + \ln p^2,}$$

partikulární řešení:

$\underline{y = x}$

2) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \cdot \cos 2x$

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i$

$y_H(x) = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$

$y_p(x) = e^{2x}(A \cos x + B \cdot \sin x)$

$y_p'(x) = 2e^{2x}(A\cdot\cos 2x + B\cdot\sin 2x) + e^{2x}(-2A\cdot\sin 2x + 2B\cdot\cos 2x) =$

$= e^{2x}(2A\cos 2x + 2B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x)$

$y_p''(x) = 2e^{2x}(2A\cos 2x + 2B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$

$+ e^{2x}(-4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4A\cos 2x - 4B\cos 2x)$

$\Downarrow$

$e^{2x}(\cancel{4A\cos 2x} + 4B\sin 2x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x - \cancel{4A\cos 2x} -$

$-\cancel{4B\sin 2x}) - e^{2x}(8A\cos 2x + 8B\sin 2x - 8A\sin 2x + 8B\cos 2x) +$

$+ e^{2x}(5A\cos 2x + 5B\sin 2x) = e^{2x}\cos 2x$

$-4A - 4A - 8B + 8A + 5B = 0$

$\underline{B = 0}$

$4B + 4B - 8A - 8B + 5A = 1$

$-3A = 1$

$\underline{A = -\frac{1}{3}}$

$$\underline{y(x) = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x - \frac{1}{3}e^{2x}\cos 2x}$$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\ln(1+x^2y^2)}$

$x = r\cdot\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$\lim\limits_{r\to 0^+} -\frac{1}{r^2}\cdot\ln(1+r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi) = \lim\limits_{r\to 0^+} -\frac{\ln(1+r^4\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi)}{r^2} \left|\frac{0}{0}\right| \overset{L'H.P.}{=}$

$= \lim\limits_{r\to 0^+} -\frac{\frac{1}{1+r^4\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi}\cdot 4r^3\cdot\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{2r} = \lim\limits_{r\to 0^+} \frac{-2r^2\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi}{1+r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi} =$

$= \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = e^0 = \underline{\underline{1}}$

4) $f(x,y) = \frac{2x}{3y}$, $[1,-2]$

$f(1,-2) = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$

$f_x = \frac{2}{3y} \rightsquigarrow -\frac{1}{3}$

$f_y = -\frac{2x}{3y^2} \rightsquigarrow -\frac{1}{6}$

$f_{xx} = 0$

$f_{xy} = -\frac{2}{3y^2} \rightsquigarrow -\frac{1}{6}$

$f_{yy} = +\frac{4x}{3y^3} \rightsquigarrow -\frac{1}{6}$

$f_{xxx} = 0$

$f_{xxy} = 0$

$f_{xyy} = -\frac{4}{3y^3} \rightsquigarrow -\frac{1}{6}$

$f_{yyy} = -\frac{12x}{3y^4} \rightsquigarrow -\frac{1}{4}$

$$T_3(x,y) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{6}(y+2) - \frac{1}{6}(x-1)(y+2) - \frac{1}{12}(y+2)^2 - \frac{1}{12}(x-1)(y+2)^3 - \frac{1}{24}(y+2)^3$$

5) $x+y+z-e^{-(x+y+z)+1} = 0$ bod dotyku $[1,?,-1]$

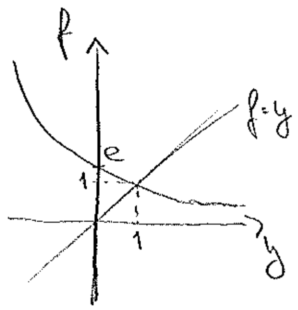
$\Downarrow$

$1+y-1-e^{-(1+y-1)+1} = 0$

$y = e^{-y+1}$

$\Downarrow$

$y = 1$



$F_x = 1 + e^{-(x+y+z)+1} \overset{[1,1,-1]}{\rightsquigarrow} 2$

$F_y = 1 + e^{-(x+y+z)+1} \rightsquigarrow 2$

$F_z = 1 + e^{-(x+y+z)+1} \rightsquigarrow 2$

$z_x = -\frac{F_x}{F_z} \rightsquigarrow -1$

$z_y = -\frac{F_y}{F_z} \rightsquigarrow -1$

$t: \quad 2(x-1) + 2(y-1) + 2(z+1) = 0$

$2x + 2y + 2z - 2 = 0$

$\underline{x+y+z=1}$

$$n: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+2t \\ z = -1+2t \end{cases}$$

6) $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $\quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-4=0$

$$L(x,y,\lambda)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\lambda\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-4\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} L_x=-\frac{1}{x^2}+2\cdot\lambda\,\frac{1}{x^3}=0 \\ L_y=-\frac{1}{y^2}+2\lambda\cdot\frac{1}{y^3}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+2\lambda=0 \Rightarrow x=2\lambda \\ -y+2\lambda=0 \Rightarrow y=2\lambda \end{array}\right\} x=y$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=4$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}=4$$

$$1+1=4x^2$$

$$\frac{1}{2}=x^2$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;\&\; y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$L_{xx}=\frac{2}{x^3}-6\lambda\cdot\frac{1}{x^4}$$

$$L_{xy}=0$$

$$L_{yy}=\frac{2}{y^3}-6\cdot\lambda\cdot\frac{1}{y^4}$$

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]: \begin{vmatrix} \overset{<0}{-2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 8>0$$

lok. maximum

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]: \begin{vmatrix} \overset{>0}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 8>0$$

lok. minimum