Kapitola III. Diferenciální počet funkcí více proměnných

III. 1. Definiční obor a vrstevnice

Definice 3.1.1 (*Funkce více proměnných*).

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. Předpis (zobrazení) $f : M \to \mathbb{R}$, který každému $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n] \in M$ přiřadí právě jedno $y \in \mathbb{R}$, se nazývá *(reálná) funkce n (reálných) proměnných*. Množina M se nazývá *definiční obor* funkce f a značí se $D(f)$. *Oborem hodnot* funkce f rozumíme množinu

$$H(f) := \{y \in \mathbb{R} \mid \exists \boldsymbol{x} \in D(f) \text{ takové, že } f(\boldsymbol{x}) = y\}.$$

Jestliže není společně s předpisem f zadána množina M (v takovém případě píšeme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), pak definičním oborem $D(f)$ funkce f rozumíme největší podmnožinu (vzhledem k inkluzi) v $\mathbb{R}^n$, pro kterou má výraz $f(\boldsymbol{x})$ smysl, tj.

$$D(f) := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R} \text{ s vlastností } f(\boldsymbol{x}) = y\right\}.$$

Taková množina $D(f)$ se nazývá *přirozeným definičním oborem*.

Pro $n = 2$ se proměnné obvykle značí jako x, y, tj. píšeme $f(x, y)$. Pro $n = 3$ se proměnné obvykle značí jako x, y, z, tj. píšeme $f(x, y, z)$. Pro $n \geq 4$ se proměnné obvykle značí pomocí indexů jako $x_1, \ldots, x_n$. Někdy (viz např. předchozí definice) budeme místo $[x_1, \ldots, x_n]$ psát pouze $\boldsymbol{x}$ (na rozdíl od $x \in \mathbb{R}$).

Definice 3.1.2 (*Graf funkce*).

Grafem funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ rozumíme množinu

$$G(f) := \Big\{[x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)] \in \mathbb{R}^{n+1} \mid [x_1, \ldots, x_n] \in D(f)\Big\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

(tedy hodnotu $f(x_1, \ldots, x_n)$ chápeme jako $n + 1$ souřadnici).

Pro $n = 2$ si lze graf funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ představit jako rovinu nebo její část zakřivenou v $\mathbb{R}^3$. Ovšem pro $n \geq 3$ již tuto možnost názorné představy ztrácíme, a proto graf funkce ztrácí na významu jakožto prostředek k získání představy o chování funkce n proměnných. Jediný graf funkce tří proměnných, který ještě dokážeme „znázornit“, je graf funkce $f(x, y, z) \equiv 0$ (víte, co je jejím grafem?).

Dalším užitečným nástrojem při studiu funkcí dvou nebo tří proměnných jsou jejich vrstevnice.

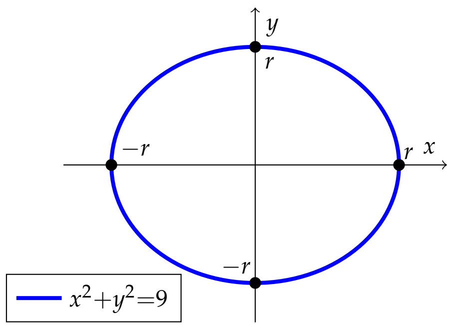
Definice 3.1.3 (*Vrstevnice funkce*).

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pro $c \in \mathbb{R}$ rozumíme *vrstevnicí funkce f na úrovni c* množinu

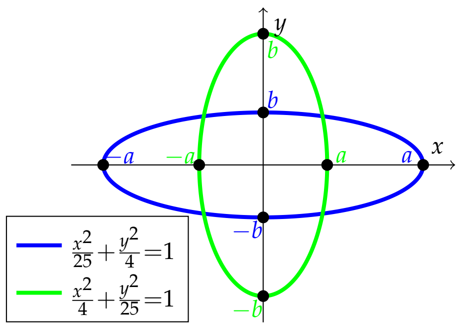
$$f_c := \{\boldsymbol{x} \in D(f) \mid f(\boldsymbol{x}) = c\}.$$

Předchozí definice samozřejmě připouští také případy $f_c = \mathbb{R}^n$ nebo $f_c = \emptyset$, přičemž druhá možnost nastane právě tehdy, když $c \notin H(f)$. Ještě poznamenejme, že mezi definičním oborem $D(f)$ a vrstevnicemi funkce f je velmi úzký vztah. Z definice funkce vyplývá, že každým bodem množiny $D(f)$ prochází právě jedna vrstevnice, takže definiční obor je totožný se sjednocením všech vrstevnic.

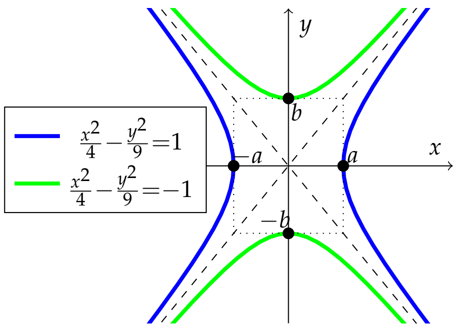
K vyšetřování definičních oborů a vrstevnic (případně grafickému znázorňování dalších vlastností) funkcí více je velmi užitečné si pamatovat analytická vyjádření některých důležitých křivek v $\mathbb{R}^2$ (tzv. kuželosečky) a ploch v $\mathbb{R}^3$ (tzv. kvadriky). Proto si je nyní připomeneme s rovnicemi v tzv. normálním tvaru (pro konstanty platí $a, b, c, d, r > 0$, $p, q \neq 0$) i s jejich grafickým znázorněním.



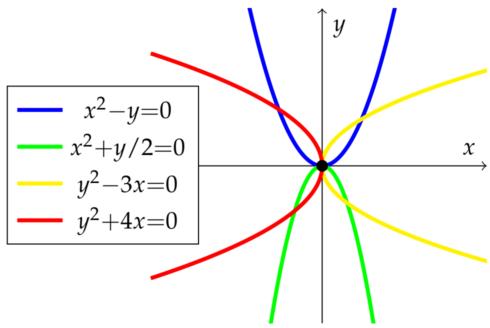
Kružnice $x^2 + y^2 = r^2$.



Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



Hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$.



Parabola $x^2 + 2py = 0$ nebo $y^2 + 2px = 0$.

III. 2. Limity funkcí více proměnných

Definice 3.2.1 (*Okolí*).

Nechť $\varepsilon > 0$. Pak ε-ové *okolí* bodu $\boldsymbol{a} = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^n$ rozumíme množinu

$$\mathcal{O}_\varepsilon(\boldsymbol{a}) := \Big\{ \boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n \mid \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \varepsilon \Big\},$$

kde $\rho(\cdot,\cdot)$ značí nějakou metriku (a index ε budeme obvykle vynechávat). *Ryzím okolím* bodu $\boldsymbol{a}$ rozumíme množinu $\mathcal{O}^*(\boldsymbol{a}) := \mathcal{O}(\boldsymbol{a}) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$.

Obvykle se $\rho(\cdot,\cdot)$ volí jako euklidovská metrika $\rho_2(\cdot,\cdot)$. Potom $\mathcal{O}_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ je vlastně otevřená n-dimenzionální koule se středem v $\boldsymbol{a}$ a poloměrem ε. Podobně jako pro $n = 1$ budeme symbolem $(\mathbb{R}^*)^n$ značit množinu $\mathbb{R}^n$ rozšířenou o nevlastní body, tj.

$$(\mathbb{R}^*)^n := \underbrace{\mathbb{R}^* \times \cdots \times \mathbb{R}^*}_{n\text{-krát}}, \quad \text{kde } \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Pro definici okolí nevlastních bodů je však vhodnější využít maximální metriku $\rho_\infty(\cdot,\cdot)$. Potom v případě $n = 2$ rozumíme okolím bodu $[+\infty, +\infty]$ libovolnou množinu typu $(a, +\infty) \times (b, +\infty)$ pro $a, b \in \mathbb{R}$. Analogicky definujeme okolí dalších nevlastních bodů v $\mathbb{R}^2$, tj. $[-\infty, +\infty]$, $[+\infty, -\infty]$ a $[-\infty, -\infty]$. Podobně definujeme okolí nevlastních bodů pro libovolné n.

Pro následující definici limity ještě potřebujeme, aby uvažovaná funkce f byla definována alespoň v jednom bodě libovolně malého ryzího okolí daného bodu z definičního oboru. To znamená, že budeme uvažovat pouze *hromadné body* definičního oboru (tj. body, jejichž každé ryzí okolí obsahuje alespoň jeden bod z této množiny – v takovém případě jich obsahuje dokonce nekonečně mnoho). Hromadný bod může (ale nemusí) být prvkem dané množiny (je to buď vnitřní nebo hraniční bod).

Definice 3.2.2 (*Limita funkce*).

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{x}^*$ je hromadným bodem $D(f)$. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $\boldsymbol{x}^* \in (\mathbb{R}^*)^n$ *limitu* L, kde $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\mathcal{O}^*(\boldsymbol{x}^*)$ bodu $\boldsymbol{x}^*$ takové, že pro každý bod $\boldsymbol{x} \in \mathcal{O}^*(\boldsymbol{x}^*) \cap D(f)$ platí $f(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{O}(L)$. V takovém případě píšeme

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^*} f(\boldsymbol{x}) = L.$$

Poznámka 3.2.3. V případě vlastní limity ve vlastním bodě můžeme zformulovat i tzv. $\varepsilon - \delta$ definici: řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\boldsymbol{x}^* \in D(f)$ *limitu* rovnu číslu $L \in \mathbb{R}$, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in D(f)$ splňující $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^*) < \delta$ platí $|f(\boldsymbol{x}) - L| < \varepsilon$.

Pro výpočet limit v nevlastních bodech se obvykle využívá substituce pomocí převrácených hodnot $1/u$, $1/v$, např.

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} f(x,y) = \lim_{\substack{u>0,v>0\\(u,v)\to(0,0)}} f(1/u,1/v).$$

Pro výpočet limit platí analogická pravidla jako pro funkce jedné proměnné. Zejména, každá funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v libovolném bodě $\boldsymbol{x}^*$ nejvýše jednu limitu.

Věta 3.2.4.

Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ splňují

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} f(\boldsymbol{x}) = L_1 \quad a \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} g(\boldsymbol{x}) = L_2,$$

kde $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. Potom pro libovolné $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\text{(a)} \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} cf(\boldsymbol{x}) = cL_1,$$

$$\text{(b)} \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} [c_1 f(\boldsymbol{x}) \pm c_1 g(\boldsymbol{x})] = c_1 L_1 \pm c_2 L_2,$$

$$\text{(c)} \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} [f(\boldsymbol{x})\, g(\boldsymbol{x})] = L_1\, L_2.$$

Je-li navíc $L_2 \neq 0$, potom

$$\text{(d)} \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Věta 3.2.5.

Nechť jsou dány funkce $f, g\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$. Jestliže $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} f(\boldsymbol{x}) = 0$ a funkce g je ohraničená na nějakém ryzím okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$ (tj. existuje $K \geq 0$ takové, že na tomto ryzím okolí platí $|g(\boldsymbol{x})| \leq K$). Potom

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} f(\boldsymbol{x})\, g(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Věta 3.2.6 (*O limitě sevřené funkce*).

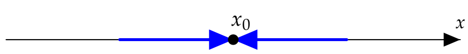
Nechť pro funkce $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí $h(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$ v nějakém ryzím okolí bodu $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ a současně

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} h(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} g(\boldsymbol{x}) = L.$$

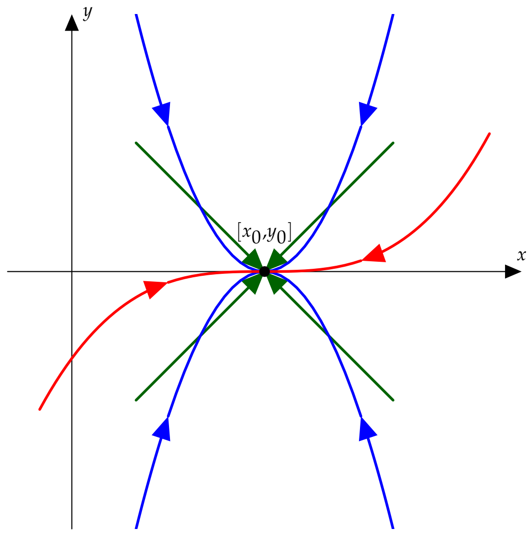
Potom také

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} f(\boldsymbol{x}) = L.$$

Poznámka 3.2.7. Zásadní rozdíl mezi limitami v $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{R}^n$ pro $n \geq 2$ spočívá v dimenzi okolí limitního bodu. U funkce jedné proměnné jsme se do limitního bodu mohli blížit pouze po přímce (zprava nebo zleva, pokud se rovnají, má funkce limitu), zatímco u funkce dvou a více proměnných se do limitního bodu můžeme dostat v nekonečně mnoha směrech – po přímkách, parabolách, kubických křivkách,... (viz Obrázky 3.2.39 a 3.2.40). Ovšem existence limity musí být nezávislá na cestě, po které se do limitního bodu blížíme. Pokud se nám tedy podaří najít dvě různé křivky takové, že při přibližování do limitního bodu po těchto křivkách dostaneme různé (částečné) limity (ty bude obvykle mnohem jednodušší určit), tak samotná limita nemůže existovat.



Obrázek 3.2.39: limita v $\mathbb{R}$



Obrázek 3.2.40: limita v $\mathbb{R}^2$

Obvykle se za tyto křivky volí přímky $y = y_0 + a(x - x_0$ (typicky $y = ax$). S jejich pomocí lze ukázat neexistenci limity (pokud výraz závisí na hodnotě a). Ovšem to, že výsledná limita nezávisí na hodnotě a pro libovolnou přímku, ještě neznamená, že daná limita existuje (museli bychom vyšetřit všechny možné křivky).

Poznámka 3.2.8. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných. Pak limita ve smyslu Definice 3.2.2 se nazývá *dvojná*. Limitní proces také můžeme aplikovat postupně: limity

$$L_{xy} = \lim_{y \to y_0} \big(\lim_{x \to x_0} f(x,y) \big) \quad \& \quad L_{yx} = \lim_{x \to x_0} \big(\lim_{y \to y_0} f(x,y) \big)$$

se nazývají *dvojnásobné* (též postupné). Potom pro L_{xy}, L_{yx} a $L := \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ platí:

(a) existují-li limity L_{xy} a L_{yx} takové, že $L_{xy} = L_{yx}$, pak limita L *nemusí* existovat;

(b) existuje-li limita L (i nevlastní), pak L_{xy} a L_{yx} *nemusí* existovat;

(c) existuje-li L a některá z limit L_{xy} nebo L_{yx}, pak se obě *rovnají*;

(d) existují-li limity L_{xy}, L_{yx} a L, pak $L_{xy} = L_{yx} = L$;

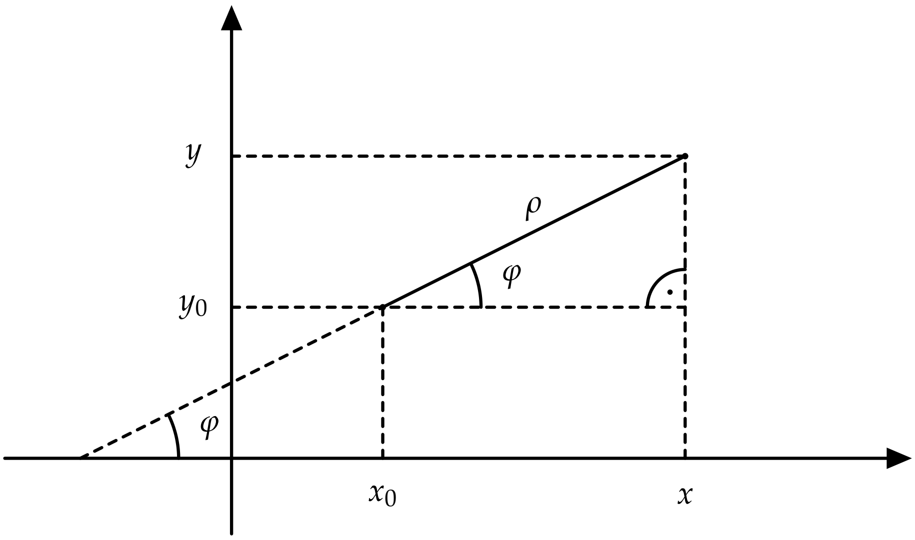
(e) existují-li limity L_{xy} a L_{yx} takové, že $L_{xy} \neq L_{yx}$, pak limita L neexistuje (tj. rovnost postupných limit je nutnou podmínkou existence dvojné limity).

Výpočet limity L pomocí postupných limit L_{xy}, L_{yx} je výhodné zejména tehdy, je-li předem známa existence L. Na druhou stranu část (e) udává další nutnou podmínku pro existenci limity L (pro neexistenci limity L stačí ukázat $L_{xy} \neq L_{yx}$).

Výpočet konkrétní limity v $\mathbb{R}^n$ však může být značně obtížné (zejména když nemáme k dispozici ani l'Hospitalovo pravidlo). Velmi účinným nástrojem v $\mathbb{R}^2$ je tzv. transformace do *polárních souřadnic*

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi, \qquad y = y_0 + \rho \sin \varphi,$$

kde $[x_0, y_0]$ je limitní bod, $\rho \in [0, \infty)$ popisuje vzdálenost bodu $[x, y]$ od pevného bodu $[x_0, y_0]$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$ je úhel, který svírá přímka procházející body $[x_0, y_0]$ a $[x, y]$ s kladnou částí osy x (viz Obrázek 3.2.41).



Obrázek 3.2.41: Transformace do polárních souřadnic.

Pokud je hodnota limity závislá na hodnotě úhlu φ, tak limita funkce neexistuje. O podmínkách pravdivosti opačného tvrzení vypovídá následující věta.

Věta 3.2.9.

Je-li $L \in \mathbb{R}$ a existuje-li nezáporná funkce $g(\rho)$ taková, že

$$\lim_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0 \quad \& \quad |f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) - L| \leq g(\rho)$$

pro každé ρ z nějakého ryzího okolí 0 a každé $\varphi \in [0, 2\pi)$, pak platí

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L.$$

Pomocí transformace do polárních souřadnic převedeme výpočet limity funkce dvou proměnných na výpočet limity $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho)$, k čemuž již můžeme využít i l'Hospitalovo pravidlo.

Poznámka 3.2.10. Zejména pokud po transformaci do polárních souřadnic platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} h(\varphi)\, g(\rho),$$

kde $\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = 0$ a funkce $h(\varphi)$ je ohraničená pro $\varphi \in [0, 2\pi)$, pak

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0.$$

Podobně můžeme při výpočtu limity funkce tří proměnných v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ využít transformaci do *sférických souřadnic*, tj.

$$x = x_0 + \rho\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = y_0 + \rho\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = z_0 + \rho\cos\vartheta,$$

kde $\rho \geq 0$ je vzdálenost bodů $[x_0, y_0, z_0]$ a $[x, y, z]$ (tzv. *sférický poloměr*), $\varphi \in [0, \pi)$ je úhel, který svírá průmět průvodiče (spojnice bodů) do podstavné roviny xy s kladným směrem osy x (tzv. *azimutální úhel*), a ϑ je úhel, který svírá průvodič s kladným směrem osy z (tzv. *sférický úhel*). Pokud je hodnota limity závislá na hodnotě úhlu φ nebo ϑ, tak limita funkce neexistuje. O podmínkách pravdivosti opačného tvrzení vypovídá následující věta.

Věta 3.2.11.

Je-li $L \in \mathbb{R}$ a existuje-li nezáporná funkce g taková, že

$$\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = 0 \quad a \quad |f(x_0 + \rho\cos\varphi\sin\vartheta, y_0 + \rho\sin\varphi\sin\vartheta, z_0 + \cos\vartheta) - L| \leq g(\rho)$$

pro každé ρ z nějakého pravého ryzího okolí bodu 0 *a každé $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [0, \pi]$, pak platí*

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y) = L.$$

Definice 3.2.12.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$, jestliže platí jedno z následujících tvrzení

(a) bod $\boldsymbol{x}^*$ je hromadným bodem definičního oboru $D(f)$, existuje v tomto bodě vlastní limita a platí

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^*);$$

(b) bod $\boldsymbol{x}^*$ je izolovaným bodem definičního oboru $D(f)$.

Funkce f je *spojitá na množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$*, jestliže je spojitá v každém bodě $\boldsymbol{x} \in M$.

- Z části (a) vyplývá, že f musí být definována v bodě $\boldsymbol{x}^*$, musí mít v tomto bodě limitu a tato čísla si musí být rovna.
- Část (b) zahrnuje body, v nichž nelze limitu počítat, viz Definici 3.2.2.

Věta 3.2.13 (*O limitě složeného zobrazení I*).

Nechť pro funkci $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} g(\boldsymbol{x}) = L$ a nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě L. Potom

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} f\left(g(\boldsymbol{x})\right) = f(L).$$

Věta 3.2.14 (*O limitě složeného zobrazení II*).

Nechť funkce $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém ryzím okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$, přičemž $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} g(\boldsymbol{x}) = L$ a $g(\boldsymbol{x}) \neq L$ pro $\boldsymbol{x}$ z nějakého ryzího okolí $\mathcal{O}^*(\boldsymbol{x}^*)$. Jestliže funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém ryzím okolí bodu L a platí $\lim_{x\to L} f(x) = M$, potom

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} f\left(g(\boldsymbol{x})\right) = M.$$

III. 3. Derivování funkcí více proměnných

Definice 3.3.1 (*Parciální derivace*).

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí. Položme $\varphi(x) := f(x, y_0)$. Má-li funkce $\varphi(x)$ derivaci v bodě x_0, nazýváme ji *parciální derivací funkce f podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$* a označujeme ji jako $f_x(x_0, y_0)$ nebo $f'_x(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, tj.

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Podobně, má-li funkce $\psi(y) := f(x_0, y)$ derivaci v bodě y_0, nazýváme ji *parciální derivací funkce f podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$* a označujeme ji jako $f_y(x_0, y_0)$ nebo $f'_y(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Parciální derivace pro funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou definovány zcela analogicky, tj. pro vhodný bod $\boldsymbol{x}^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]$ klademe

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) := \lim_{x_i \to x_i^*} \frac{f(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{x_i - x_i^*}, \qquad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Věta 3.3.2 (*Pravidla pro počítání parciálních derivací*).

Nechť funkce $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mají na otevřené množině M (vlastní) parciální derivace podle proměnné x_i, kde $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak jejich součet, rozdíl, součin a podíl (pokud $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$) má na M také parciální derivaci podle x_i, přičemž pro všechna $\boldsymbol{x} \in M$ platí

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big[f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})\big] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \pm \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big[f(\boldsymbol{x})\, g(\boldsymbol{x})\big] = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})\right) g(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})\, \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}\right) = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) g(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})\, \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})}{g^2(\boldsymbol{x})}.$$

Věta 3.3.3 (*O derivování složené funkce*).

Nechť funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ mají parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$. Položme $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Nechť funkce $f(u, v)$ je diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0]$. Pak složená funkce $F(x, y) = f\big(u(x, y), v(x, y)\big)$ má parciální derivace prvního řádu v $[x_0, y_0]$ a platí tzv. řetězové pravidlo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),$$

neboli zkráceně

$$F_x = f_u\, u_x + f_v\, v_x \quad \text{a} \quad F_y = f_u\, u_y + f_v\, v_y.$$

Definice 3.3.4 (*Parciální derivace 2. řádu*).

Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a bod $[x_0, y_0] \in D(f)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme ji *parciální derivací druhého řádu podle proměnné x funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$ a značíme jako $f_{xx}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme ji *smíšenou parciální derivací druhého řádu funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$ a značíme jako $f_{xy}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Zcela analogicky jsou definovány zbývající parciální derivace druhého řádu $f_{yx}(x_0, y_0)$ a $f_{yy}(x_0, y_0)$.

Věta 3.3.5 (*Schwarzova/Youngova*).

Nechť pro funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existují v nějakém okolí $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ bodu $[x_0, y_0] \in D(f)$ smíšené parciální derivace druhého řádu $f_{xy}(x, y)$ a $f_{yx}(x, y)$, které jsou spojité v bodě $[x_0, y_0]$. Pak platí

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

(tedy smíšené parciální derivace druhého řádu jsou zaměnitelné).

Věta 3.3.6.

Nechť v nějakém okolí $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ bodu $[x_0, y_0] \in D(f)$ pro funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ platí

- *existují parciální derivace prvního řádu $f_x(x, y)$ a $f_y(x, y)$,*
- *existuje smíšená parciální derivace druhého řádu $f_{xy}(x, y)$ (s případnou výjimkou samotného bodu $[x_0, y_0]$),*
- *existuje*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_{xy}(x, y) = K.$$

Pak obě smíšené parciální derivace druhého řádu $f_{xy}(x_0, y_0)$ a $f_{yx}(x_0, y_0)$ existují a platí

$$f_{xy}(x_0, y_0) = K = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Poznámka 3.3.7. Podobné tvrzení i pro smíšené parciální derivace vyšších řádů:

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má na otevřené množině M spojité všechny parciální derivace až do řádu m, kde $m \in \mathbb{N}$ a $m \geq 2$. Pak hodnoty všech smíšených parciálních derivací funkce

f až do řádu m nezávisí na pořadí derivování, ale pouze na tom, kolikrát se derivovalo podle proměnné x a kolikrát podle proměnné y.

Definice 3.3.8 (*Směrová derivace*).

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}^*$ je vnitřní bod $D(f)$ a $\vec{u} \in \mathbb{V}^n \setminus \{0\}$. Položme $\varphi(t) := f(\boldsymbol{x}^* + t\vec{u})$. Má-li funkce $\varphi(t)$ derivaci pro $t = 0$, nazýváme ji *směrovou derivací funkce f v bodě $\boldsymbol{x}^*$* (nebo derivací funkce f ve směru vektoru $\vec{u}$) a značíme jako $f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$, tj.

$$f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}^* + t\vec{u}) - f(\boldsymbol{x}^*)}{t}.$$

Poznámka 3.3.9. Vzhledem k tomu, že i směrová derivace je vlastně definována jako obyčejná derivace funkce $\varphi(t)$, platí pro její počítání následující pravidla. Nechť pro $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ existuje $f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$ a $g_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$, pak

- pro každé $c \in \mathbb{R}$ existuje $f_{c\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$ a platí $f_{c\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) = c\, f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$,
- $(f \pm g)_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) = f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) \pm g_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$,
- $(fg)_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) = f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)\, g(\boldsymbol{x}^*) + f(\boldsymbol{x}^*)\, g_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) = \dfrac{f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)\, g(\boldsymbol{x}^*) + f(\boldsymbol{x}^*)\, g_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)}{g^2(\boldsymbol{x}^*)}$, je-li $g(\boldsymbol{x}^*) \neq 0$.

Ovšem aditivita směrových derivací vzhledem ke směrům derivace již platit nemusí. Pokud existují $f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$ a $f_{\vec{v}}(\boldsymbol{x}^*)$, nemusí existovat $f_{\vec{u}+\vec{v}}(\boldsymbol{x}^*)$. A i když existuje $f_{\vec{u}+\vec{v}}(\boldsymbol{x}^*)$ může být $f_{\vec{u}+\vec{v}}(\boldsymbol{x}^*) \neq f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) + f_{\vec{v}}(\boldsymbol{x}^*)$. Na druhou stranu, jestliže $f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*)$ je spojitá v nějakém okolí $\mathcal{O}(\boldsymbol{x}^*)$ bodu $\boldsymbol{x}^*$ a existuje $f_{\vec{v}}(\boldsymbol{x}^*)$, potom platí $f_{\vec{u}+\vec{v}}(\boldsymbol{x}^*) = f_{\vec{u}}(\boldsymbol{x}^*) + f_{\vec{v}}(\boldsymbol{x}^*)$.

Poznámka 3.3.10. Jestliže pro funkci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $\boldsymbol{x}^*$ existují parciální derivace prvního řádu podle všech proměnných $x_1, \dots, x_n$ v bodě $\boldsymbol{x}^*$, potom (sloupcový!) vektor

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*) \end{pmatrix}$$

nazýváme *gradientem* funkce f v bodě $\boldsymbol{x}^*$. Má-li funkce f spojité parciální derivace prvního řádu v $\boldsymbol{x}^*$, potom pro směrovou derivaci ve směru vektoru $\vec{u}$ v bodě $\boldsymbol{x}^*$ platí

$$f_u(\boldsymbol{x}^*) = \langle \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}^*),\, u \rangle\,,$$

kde $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ značí standardní skalární součin. Tento vztah platí dokonce v případě, že funkce f je pouze diferencovatelná (viz následující kapitola).

III. 4. Diferenciál a Taylorova věta pro funkce více proměnných

Následující výsledky jsou formulovány pouze pro funkci dvou proměnných. Nicméně jejich rozšíření pro funkce n proměnných je (téměř) zřejmé.

Definice 3.4.1.

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována v nějakém okolí bodu $\mathcal{O}(x_0, y_0)$. Existují-li taková konečná čísla $A, B \in \mathbb{R}$, že pro funkci $w(h,k)$ definovanou jako

$$w(h,k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk$$

platí

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{w(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0, \tag{3.4.1}$$

pak říkáme, že funkce f je *diferencovatelná* v $[x_0, y_0]$. Lineární funkci $\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k) = Ah + Bk$ v proměnných h a k nazýváme (*totálním*) *diferenciálem funkce f v bodě* $[x_0, y_0]$.

Věta 3.4.2.

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$. Pak jsou čísla A, B ve vztahu (3.4.1) určena jednoznačně, existují parciální derivace $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ a platí

$$A = f_x(x_0, y_0), \quad B = f_y(x_0, y_0).$$

Tedy pro diferenciál funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ dostáváme

$$\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k) = f_x(x_0, y_0)\, h + f_y(x_0, y_0)\, k.$$

Navíc funkce f je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$.

Věta 3.4.3.

Má-li funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spojité parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$, pak je v tomto bodě diferencovatelná.

Definice 3.4.4.

Rovina $\tau : z = Ax + By + C$ se nazývá *tečnou rovinou* funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $M_0 = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, jestliže

- rovina τ prochází bodem M_0,
- platí $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - Ax - By - C}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$

Všimněte si, že z první podmínky předchozí definice plyne $f(x_0, y_0) = Ax_0 + By_0 + C$, tedy $C = f(x_0, y_0) - Ax_0 - By_0$, což po dosazení dává

$$\tau:\ z = A(x - x_0) + B(y - y_0) + f(x_0, y_0).$$

Věta 3.4.5.

Tečná rovina τ ke grafu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ existuje právě tehdy, když je funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$. Její rovnice je potom

$$\tau:\ z = f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0) + f(x_0, y_0).$$

Poznámka 3.4.6. Jestliže τ je tečnou rovinu ke grafu funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v bodě dotyku $M = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, pak přímka procházející bodem M a kolmá k rovině τ je tzv. *normálou* ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě M. Její parametrické vyjádření je

$$n:\ \begin{cases} x = x_0 + t\, f_x(x_0, y_0), \\ y = y_0 + t\, f_y(x_0, y_0), \\ z = z_0 - t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

V případě $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ a $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ lze dokonce parametr t vyloučit, tj.

$$n:\ f(x_0, y_0) - z = \frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)}.$$

Poznámka 3.4.7. Diferenciál funkce lze použít k přibližnému výpočtu funkčních hodnot. Platí

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x_0, y_0) + \mathrm{d}f_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0) = \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0). \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

V „praktických“ úlohách na určení přibližné funkční hodnoty pomocí vzorce (3.4.2) je obvykle potřeba si vhodně zvolit funkci $f(x, y)$ a bod $[x_0, y_0]$. Při této aplikaci bychom se samozřejmě měli obejít bez kalkulačky, takže bod $[x_0, y_0]$ je potřeba volit tak, abychom dokázali snadno vyčíslit hodnoty $f(x_0, y_0)$, $f_x(x_0, y_0)$ a $f_y(x_0, y_0)$.

Věta 3.4.8 (*Taylorova*).

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $n + 1$ včetně. Pak pro každý bod $[x, y]$ z tohoto okolí platí

$$f(x, y) = T_n(x, y) + R_n(x, y),$$

přičemž Taylorův polynom $T_n(x,y)$ je dán jako

$$
\begin{aligned}
T_n(x,y) &= \\
&= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) + \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\,(x-x_0)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\,(x-x_0)(y-y_0) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\,(y-y_0)^2\right] + \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(x_0,y_0)\,(x-x_0)^{n-j}(y-y_0)^j
\end{aligned}
$$

a zbytek po n-tém členu $R_n(x,y)$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$
\begin{aligned}
R_n(x,y) &= \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}\big(x_0+\vartheta(x-x_0), y_0+\vartheta(y-y_0)\big) \times \\
&\quad \times (x-x_0)^{n+1-j}(y-y_0)^j,
\end{aligned}
$$

kde $\vartheta \in (0,1)$.

III. 5. Lokální a globální extrémy funkcí více proměnných

Definice 3.5.1.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ *lokálního maxima (minima)*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(\boldsymbol{x}^*)$ bodu $\boldsymbol{x}^*$ takové, že pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathcal{O}(\boldsymbol{x}^*)$ platí $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}^*)$ ($f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^*)$).

Jsou-li nerovnosti ostré pro $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*$, mluvíme o *ostrých* lokálních maximech a minimech. Pro (ostrá) lokální maxima a minima se užívá jednotné označení *(ostrý) lokální extrém*.

Definice 3.5.2.

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že bod $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ je *stacionárním bodem funkce* f, jestliže v bodě x^* existují všechny parciální derivace prvního řádu a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{pro } i = 1, \dots, n.$$

Věta 3.5.3.

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $\boldsymbol{x}^*$ lokální extrém a nechť v tomto bodě existují všechny parciální derivace prvního řádu funkce f. Pak bod $\boldsymbol{x}^*$ je stacionárním bodem funkce f.

Poznámka 3.5.4. Je zřejmé, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ může mít lokální extrém pouze ve stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna parciální derivace prvního řádu neexistuje.

Věta 3.5.5.

Nechť bod $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ je stacionárním bodem funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a nechť má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu. Jestliže platí

$$D(x_0, y_0) := f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 = \det \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} > 0,$$

pak má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ostrý lokální extrém. Je-li $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, jedná se o minimum, je-li $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, jedná se o maximum. V případě $D(x_0, y_0) < 0$ má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ sedlový bod, zatímco v případě $D(x_0, y_0) = 0$ nelze rozhodnout.

Poznámka 3.5.6. Zobecnění postačující podmínky z Věty 3.5.5 pro funkce n-proměnných je zprostředkováno tzv. *definitností Hessovy matice*:

(i) Nechť existují všechny parciální derivace funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, potom se čtvercová matice

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

nazývá *Hessovou maticí*. Pokud má funkce f v bodě $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ spojité smíšené parciální derivace, pak podle Věty 3.3.5 (ve formulaci pro funkce n proměnných) plyne, že matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ je v tomto bodě symetrická.

(ii) Máme-li matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, potom determinanty n-tice submatic

$$\begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se nazývají *vedoucí hlavní minory*.

Symetrická matice je *pozitivně definitní* právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla kladná ($\Leftrightarrow$ všechny vedoucí hlavní minory jsou kladné). Symetrická matice je *negativně definitní* právě tehdy, když všechna vlastní čísla jsou záporná ($\Leftrightarrow$ vedoucí hlavní minory střídají znaménka počínaje záporným).

(iii) Nechť bod $\boldsymbol{x}^*$ je stacionárním bode funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a nechť funkce f má v bodě $\boldsymbol{x}^*$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu. Je-li Hessova matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$ funkce f v bodě $\boldsymbol{x}^*$ pozitivně (negativně) definitní, pak funkce f má v bodě $\boldsymbol{x}^*$ ostré lokální minimum (maximum).

Definice 3.5.7.

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a množina $M \subseteq D(f)$ jsou dány. Řekneme, že bod $\boldsymbol{x}^* \in M$ je bodem *absolutního maxima* (nebo *minima*) funkce f na M, jestliže $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}^*)$ (nebo $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^*)$) pro každé $\boldsymbol{x} \in M$.

Věta 3.5.8 (*Weierstrassova věta*).

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá na kompaktní množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak funkce f je na množině M ohraničená a nabývá zde své největší i nejmenší hodnoty (tj. existují čísla $\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{x}^* \in M$ taková, že $f(\boldsymbol{x}_*) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}^*)$ pro každé $\boldsymbol{x} \in M$).

Jak ale prakticky postupovat při hledání globálních extrémů?

Věta 3.5.9.

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina a funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá na M. Pak

f nabývá svých globálních extrémů buď v bodech lokálního extrému uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.

III. 6. Vázané extrémy

Definice 3.6.1.

Nechť $f : D(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $M \subseteq D(f)$. Bod $x^* \in M$ nazveme bodem *lokálního minima funkce f na (vzhledem k) množině M* (neboli *vázaným minimem*), jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že $f(x^*) \leq f(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{O}(x^*) \cap M$. Podobně bod $\hat{x} \in M$ nazveme bodem *lokálního maxima funkce f na (vzhledem k) množině M* (neboli *vázaným maximem*), jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(\hat{x})$ bodu $\hat{x}$ takové, že $f(\hat{x}) \geq f(x)$ pro všechna $x \in \mathcal{O}(\hat{x}) \cap M$. Jsou-li předchozí nerovnosti ostré, hovoříme o *ostrých* vázaných extrémech.

Věta 3.6.2.

Nechť funkce n proměnných $f, g_1, \dots, g_m$ mají spojité parciální derivace prvního řádu na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$, kde $1 \leq m \leq n$. Uvažme množinu M danou systémem rovností jako

$$\begin{aligned} M &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = 0\} \bigcap \dots \bigcap \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_m(x) = 0\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0\} \subseteq U, \end{aligned}$$

přičemž vektory $\operatorname{grad} g_1(x), \dots, \operatorname{grad} g_m(x)$ *jsou lineárně nezávislé pro všechny body $x \in M$, tj. Jacobiho matice*

$$DG(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

má plnou hodnost (tj. m). Je-li bod $x^* \in M$ lokálním extrémem funkce funkce f na množině M, pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (tzv. Lagrangeovy multiplikátory*) taková, že x^* je stacionárním bodem Lagrangeovy funkce*

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(x),$$

tj. $\operatorname{grad}_x L(x^*, \lambda) = 0$ *neboli*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Předchozí tvrzení udává nutnou podmínku pro vázané extrémy. K tomu, aby bod x^* byl vázaným extrémem funkce f, není nutné, aby x^* byl také (klasickým) lokálním extrémem Lagrangeovy funkce vzhledem k x, tedy zejména aby matice $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda)$ byla pozitivně/negativně definitní (toto je sice postačující, ale velmi silný požadavek). Následující věta obsahuje postačující podmínku pro ostrý vázaný extrémem.

Věta 3.6.3.

Nechť funkce n proměnných $f, g_1, \ldots, g_m$ mají spojité parciální derivace druhého řádu na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$, kde $1 \le m \le n$. Uvažme množinu M danou systémem rovností jako

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = 0\} \cap \ldots \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_m(x) = 0\} = \\ = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0\} \subseteq U,$$

přičemž vektory $\operatorname{grad} g_1(x), \ldots, \operatorname{grad} g_m(x)$ jsou lineárně nezávislé pro všechna $x \in M$. Jestliže pro bod $x^* \in M$ existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ taková, že platí následující podmínky

(i) Lagrangeova funkce

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

má v bodě x^* stacionární bod, tj. $\operatorname{grad}_x L(x^*, \lambda) = 0$,

(ii) Hessova matice $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda)$ je pozitivně (negativně) definitní na podprostoru

$$\operatorname{Ker} DG(x^*) = \operatorname{Lin}\{\operatorname{grad} g_1(x^*), \ldots, \operatorname{grad} g_m(x^*)\}^{\perp} = \\ = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \perp \operatorname{grad} g_i(x^*)\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid DG(x^*)\, x = 0\},$$

tj. $h^\top \nabla_x^2 L(x^*, \lambda) h > (<) 0$ pro všechny vektory $h \in \operatorname{Ker} DG(x^*) \setminus \{0\}$,

pak má funkce f v bodě x^* ostré lokální minimum (maximum) na množině M.

Jestliže matice $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda)$ je indefinitní na $\operatorname{Ker} DG(x^*)$, pak extrém v bodě x^* nenastává, zatímco v případě pouhé semidefinitnosti matice $\nabla_x^2 L(x^*, \lambda)$ nemůžeme s pomocí uvedených tvrzení rozhodnout.

III. 7. Implicitně zadané funkce

Definice 3.7.1 (*Impicitně zadaná funkce*).

Nechť $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $[\boldsymbol{x}^*, y^*] \in D(F)$ a nechť platí $F(\boldsymbol{x}^*, y^*) = 0$. Označme graf funkce F jako $Gr = \{[\boldsymbol{x}, y] \in D(F) \mid F(\boldsymbol{x}, y) = 0\}$. Jestliže existuje otevřená množina $\mathcal{U}$ obsahující bod $\boldsymbol{x}^*$ a okolí bodu y^*, tj. $\mathcal{O}(y^*) = (y^* - \varepsilon, y^* + \varepsilon)$ pro nějaké $\varepsilon > 0$, tak, že množina $Gr \cap \big(\mathcal{U} \times \mathcal{O}(y^*)\big)$ je totožná s grafem funkce $y = f(\boldsymbol{x})$ pro $x \in U$, řekneme, že funkce f je v okolí bodu $[\boldsymbol{x}^*, y^*]$ *definována implicitně* rovnicí $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$. Jinými slovy, rovnice $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$ je splněna v $\mathcal{U} \times \mathcal{O}(y^*)$ právě tehdy, když $y = f(\boldsymbol{x})$ pro $\boldsymbol{x} \in U$ neboli

$$\{[\boldsymbol{x}, y] \in \mathcal{U} \times \mathcal{O}(y^*) \mid F(\boldsymbol{x}, y) = 0\} = \{[\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})] \mid x \in \mathcal{U}\}.$$

Věta 3.7.2 (*O existenci implicitní funkce*).

Nechť funkce $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $[\boldsymbol{x}^*, y^*] \in D(F)$ a nechť platí $F(\boldsymbol{x}^*, y^*) = 0$. Jestliže funkce F je spojitá na otevřené množině obsahující bod $[\boldsymbol{x}^*, y^*]$, parciální derivace $F_y(x, y)$ je spojitou funkcí v bodě $[\boldsymbol{x}^*, y^*]$ a současně platí $F_y(\boldsymbol{x}^*, y^*) \neq 0$, pak lze rovnici $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$ lokálně vyřešit pomocí funkce $y = f(\boldsymbol{x})$, tj. existuje otevřená množina $\mathcal{U}$ obsahující $\boldsymbol{x}^*$ a okolí bodu y^* tak, že rovnice $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$ je pro $\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$ a $y \in \mathcal{O}(y^*)$ splněna právě tehdy, když $y = f(\boldsymbol{x})$ pro $\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$, tj. rovnicí $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$ je v okolí bodu $[\boldsymbol{x}^*, y^*]$ implicitně zadána funkce $y = f(\boldsymbol{x})$.

Má-li navíc funkce F v bodě $[\boldsymbol{x}^*, y^*]$ spojité parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}, y)$, má implicitní funkce f v bodě $\boldsymbol{x}^* = [x_1, \dots, x_n]$ parciální derivace a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^*, y^*)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}^*, y^*)}. \tag{3.7.1}$$

Poznámka 3.7.3.

(i) V případě $n = 1$ dostaneme v Definici 3.7.1 a ve Větě 3.7.2 implicitně zadanou funkci jedné proměnné $y = f(x)$ a místo parciálních derivací v (3.7.1) dostaneme vzorec pro výpočet obyčejné derivace $f'(x)$.

(ii) K určení derivací vyšších řádů (pro implicitně zadanou funkci jedné nebo více proměnných) lze také sestavit vzorec podobně jako v (3.7.1). Ovšem druhý (a vhodnější) způsob je ten, že zderivujeme identitu $F(\boldsymbol{x}, y) = 0$ podle jednotlivých proměnných $x_1, \dots, x_n$ s tím, že člen $y = f(x_1, \dots, x_n)$ samozřejmě nelze derivovat „explicitně“. Z takto zderivované rovnosti poté vyjádříme hledanou parciální/obyčejnou derivaci.

Poznámka 3.7.4. Ačkoli v případě implicitně zadané funkce $y = f(\boldsymbol{x})$ obvykle není možné získat explicitní předpis pro funkci f, můžeme díky vztahu (3.7.1) vyšetřit některé základní vlastnosti funkce f v bodě $\boldsymbol{x}^*$. Např. tečná (nad)rovina ke grafu funkce f v bodě $[\boldsymbol{x}^*, y^*] = [\boldsymbol{x}^*, f(\boldsymbol{x}^*)]$ je určena rovnicí

$$t: \ F_{x_1}(\boldsymbol{x}^*, y^*)\,(x_1 - x_1^*) + \cdots + F_{x_n}(\boldsymbol{x}^*, y^*)\,(x_n - x_n^*) + F_y(\boldsymbol{x}^*, y^*)\,(y - y^*) = 0. \tag{3.7.2}$$

Normálu k této tečné (nad)rovině lze vyjádřit parametricky

$$n: \begin{cases} x_1 &= x_1^* + F_{x_1}(\boldsymbol{x}^*, y^*)\,t, \\ &\vdots \\ x_n &= x_n^* + F_{x_n}(\boldsymbol{x}^*, y^*)\,t, \\ y &= y^* + F_y(\boldsymbol{x}^*, y^*)\,t, \end{cases}$$

pro $t \in \mathbb{R}$. V případě $F_{x_1}(\boldsymbol{x}^*, y^*) \neq 0, \dots, F_{x_n}(\boldsymbol{x}^*, y^*) \neq 0$ je dokonce možné parametr vyloučit a normála je určena rovnostmi

$$\frac{x_1 - x_1^*}{F_{x_1}(\boldsymbol{x}^*, y^*)} = \cdots = \frac{x_n - x_n^*}{F_{x_n}(\boldsymbol{x}^*, y^*)} = \frac{y - y^*}{F_y(\boldsymbol{x}^*, y^*)}. \tag{3.7.3}$$