III. Diferenciální počet funkcí více proměnných

III. 1. Definiční obor funkcí více proměnných

Definice 39. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$, nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných definovaná na M a buď $c \in \mathbb{R}$. Množina

$$f_c := \{[x, y] \in M : \ f(x, y) = c\}$$

se nazývá *vrstevnice funkce f na úrovni c*

Příklad. Určeme definiční obor funkce $f(x, y) = \ln[x \ln(y - x)]$.

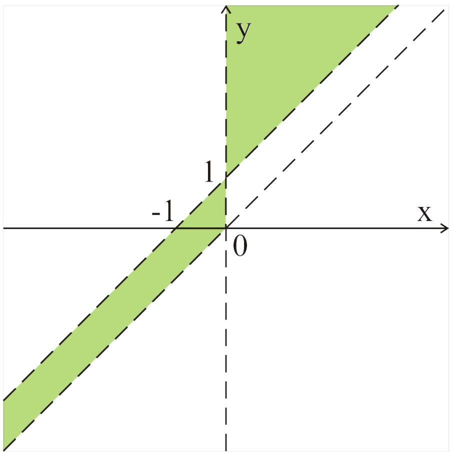
Řešení. Protože definiční obor je množina bodů, ve kterých je funkce definována, budeme postupovat zevnitř funkce a hledat podmínky, které musí body roviny splňovat, aby byly součástí definičního oboru zadané funkce. Vnitřní funkce je $y - x$, která je definována pro všechna x a všechna y. Další na řadě je $\ln(y - x)$. Argument logaritmu musí být kladný, tedy $y - x > 0$. Protože vynásobení proměnnou x žádnou podmínku nepřidá, postoupíme rovnou k vnější funkci, kterou je opět logaritmus, tedy musí platit $x \ln(y - x) > 0$. To znamená, že oba činitelé musí mít stejné znaménko, přičemž nula je vyloučena. Odtud dostáváme

$$(x > 0 \wedge \ln(y - x) > 0) \vee (x < 0 \wedge \ln(y - x) < 0),$$
$$(x > 0 \wedge y - x > 1) \vee (x < 0 \wedge 0 < y - x < 1).$$

Tím máme zjištěny všechny podmínky pro definiční obor dané funkce. Protože tyto podmínky musí být splněny současně (aby se nepokazila žádná složka funkce), uvažujeme jejich průnik. Protože omezení z vnitřního logaritmu jsme uvažovali a zapracovali přímo při řešení logaritmu vnějšího, je definičním oborem množina

$$D(f) = \Big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y - x > 1) \vee (x < 0 \wedge 0 < y - x < 1)\Big\}.$$

Nyní můžeme definiční obor znázornit. Připomeňme, že 'a současně' ($\wedge$) znamená pro kreslenou množinu bodů průnik a 'nebo' ($\vee$) pro ni znamená sjednocení. Definiční obor bude mít tedy dvě části. První obsahuje všechny body s kladnou souřadnicí x (první a čtvrtý kvadrant bez osy y), které splňují nerovnici $y - x > 1$ ekvivalentní s nerovnicí $y > x + 1$. Jde tedy o všechny body napravo od osy y a nad přímkou $y = x + 1$ (osa prvního a třetího kvadrantu posunutá o 1 nahoru). Do druhé části patří všechny body roviny mající zápornou první souřadnici a splňující současně (děláme tedy průnik) dvojici nerovnic $y - x > 0$ a $y - x < 1$, nebo ekvivalentně $y > x$ a $y < x + 1$. Tomu odpovídají body, které jsou nad přímkou $y = x$ a zároveň pod přímkou $y = x + 1$. Výsledný obrázek vypadá tedy takto:

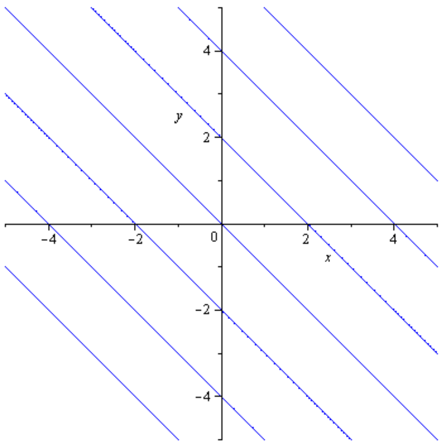


Příklad. Zjistěme tvar vrstevnic funkce $f(x, y) = \frac{x+y}{2}$.

Řešení. Protože vrstevnice spojují body se stejnou funkční hodnotou, dostaneme je tak, že položíme $f(x, y) = c$, kde c je konstanta nabývající hodnoty z oboru hodnot dané funkce (jinde nemá význam vrstevnice dělat). Pro různá c pak dostáváme různé vrstevnice (vždy obdržíme vrstevnici v dané 'výšce', tedy pro danou funkční hodnotu). Pro danou funkci jsou vrstevnice dány rovnicí

$$\frac{x+y}{2} = c \qquad \Rightarrow \qquad y = 2c - x.$$

Jde tedy o přímky rovnoběžné s osou druhého a čtvrtého kvadrantu. Konkrétně např. body s funkční hodnotou 0 leží přímo na této ose $y = -x$, body s funkční hodnotou 1 leží na přímce $y = 2 - x$ apod. Snadno zjištěné vrstevnice načrtneme:



Poznamenejme, že je někdy výhodnější z rovnice vrstevnic y nevyjadřovat. Např. rovnice $x^2 + y^2 = c$ značí kružnici o poloměru $\sqrt{c}$, přičemž z oboru hodnot je vidět, že podmínka $c \geq 0$ je splněna automaticky apod.

III. 2. Limity funkcí více proměnných

Definice 40. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ má v bodě $a \in (\mathbb{R}^*)^n$ *limitu* L, kde $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(a)$ bodu a takové, že pro každý bod $x \in \mathcal{O}(a) \cap D(f)$ platí $f(x) \in (L)$. Píšeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Předchozí definice platí pro libovolné n. Pro funkci dvou proměnných lze zformulovat i tzv. $\varepsilon - \delta$ definici.

Definice 41. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ limitu $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý bod $[x, y] \in D(f)$ splňující $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, $[x, y] \neq [x_0, y_0]$, platí $|f(x, y) - L| < \varepsilon$. Píšeme

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L.$$

Poznámka 42. Pro výpočet limity funkce dvou proměnných v bodě $[x_0, y_0]$ lze použít substituci do *polárních souřadnic*, tj.

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi, \qquad y = y_0 + \rho \sin \varphi,$$

kde $\rho \geq 0$ je vzdálenost bodů $[x_0, y_0]$ a $[x, y]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ je úhel, který svírá spojnice těchto bodů s kladným směrem osy x. Pokud je hodnota limity závislá na hodnotě úhlu φ, tak limita funkce neexistuje. O podmínkách pravdivosti opačného směru vypovídá následující věta.

Věta 43. *Je-li* $L \in \mathbb{R}$ *a existuje-li nezáporná funkce* g *taková, že*

$$\lim_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0 \quad a \quad |f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) - L| \leq g(\rho)$$

pro každé ρ *z nějakého pravého ryzího okolí bodu* 0 *a každé* $\varphi \in [0, 2\pi)$, *pak platí*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L.$$

Poznámka 44. Uvažujme dvojnou limitu

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L.$$

a dvojnásobné limity

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right) = L_{xy} \quad \text{a} \quad \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right) = L_{yx}.$$

Potom

- Z rovnosti postupných limit L_{xy} a L_{yx} *neplyne* existence dvojné limity L dané funkce v bodě (x_0, y_0).
- Existuje-li limita L (i nevlastní), *nemusí existovat* ani limita L_{xy} ani L_{yx}. Ovšem pokud existuje L a také některá z limit L_{xy} nebo L_{yx}, *musí se nutně obě rovnat*.
- Existují-li všechny tři limity, pak nutně $L = L_{xy} = L_{yx}$.

- Určovat limitu L funkce v bodě postupnými limitami L_{xy}, L_{yx} má smysl jen tehdy, je-li předem známa existence L. To je vždy možné, je-li to funkce spojitá v okolí vyšetřovaného bodu. Existují-li L_{xy} a L_{yx}, avšak $L_{xy} \neq L_{yx}$, pak neexistuje limita L (tj. rovnost postupných limit je nutnou podmínkou existence dvojné limity).

Poznámka 45. Limitu funkce tří proměnných v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ lze vypočítat pomocí substituce do *sférických souřadnic*, tj.

$$x = x_0 + \rho \cos\varphi \sin\vartheta, \quad y = y_0 + \rho \sin\varphi \sin\vartheta, \quad z = z_0 + \cos\vartheta,$$

kde $\rho \geq 0$ je vzdálenost bodů $[x_0, y_0, z_0]$ a $[x, y, z]$ (tzv. *sférický poloměr*), $\varphi \in [0, \pi)$ je úhel, který svírá průmět průvodiče (spojnice bodů) do podstavné roviny xy s kladným směrem osy x (tzv. *azimutální úhel*), a ϑ je úhel, který svírá průvodič s kladným směrem osy z (tzv. *sférický úhel*). Pokud je hodnota limity závislá na hodnotě úhlu φ nebo ϑ, tak limita funkce neexistuje. O podmínkách pravdivosti opačného směru vypovídá následující věta.

Věta 46. *Je-li $L \in \mathbb{R}$ a existuje-li nezáporná funkce g taková, že*

$$\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = 0 \quad a \quad |f(x_0 + \rho\cos\varphi\sin\vartheta, y_0 + \rho\sin\varphi\sin\vartheta, z_0 + \cos\vartheta) - L| \leq g(\rho)$$

pro každé ρ z nějakého pravého ryzího okolí bodu 0 a každé $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [0, \pi]$, pak platí

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y) = L.$$

Věta 47 (O limitě funkce sevřené dvěma funkcemi). *Nechť existují funkce $h(X)$ a $g(X)$ takové, že $h(X) \leq f(X) \leq g(X)$ v nějakém ryzím okolí bodu $X \in \mathbb{R}^n$, a platí*

$$\lim_{X\to X_0} h(X) = \lim_{X\to X_0} g(X) = L.$$

Potom platí

$$\lim_{X\to X_0} f(X) = L.$$

Věta 48 (O limitě složeného zobrazení I). *Nechť existuje složené zobrazení $f \circ g$, nechť platí $\lim_{X\to X_0} g(X) = B$ a zobrazení f je v bodě B spojité. Potom platí*

$$\lim_{X\to X_0} f\left(g(X)\right) = f(B).$$

Věta 49 (O limitě složeného zobrazení II). *Nechť funkce g je definována v ryzím okolí bodu X_0, $\lim_{X\to X_0} g(X) = B$ a $g(X) \neq B$ pro $X \in \mathcal{O}^*(X_0)$. Je-li funkce f definována v ryzím okolí bodu B a $\lim_{X\to B} f(X) = C$, pak platí*

$$\lim_{X\to X_0} f\left(g(X)\right) = C.$$

Definice 50. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $[x_0, y_0]$, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0). \tag{8}$$

Funkce $f(x, y)$ se nazývá *spojitá na množině* $M \subseteq \mathbb{R}^2$, jestliže identita (8) platí pro každý bod $[x_0, y_0] \in M$.

Příklad. Určeme limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$$

Řešení. Po dosazení zjistíme, že jde o typ $\frac{0}{0}$. (Pozor, pro více než jednu proměnnou nemáme k dispozici l'Hospitalovo pravidlo.) Transformací do polárních souřadnic, kde $[x_0, y_0] = [0, 0]$, ji ale snadno vypočítáme.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos\varphi)^3+(\rho\sin\varphi)^3}{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2}$$
$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} = \lim_{\rho\to 0} \rho(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi) = 0.$$

Ve výpočtu jsme využili faktu, že sinus i kosinus jsou ohraničené funkce. Protože je výsledek nezávislý na φ, limita existuje.

Příklad. Dokažme, že limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

neexistuje.

Řešení. Nejprve se budeme k limitnímu bodu přibližovat po přímkách $y = kx$. Tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^2(x^2+k^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0.$$

Tento výsledek je platný pro každé k, tedy pro přibližování se po libovolné přímce, ovšem nezaručuje existenci limity. Jako další otestujme přibližování po parabolách $y = kx^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Tento výsledek závisí na k a tedy se mění v závislosti na tom, po které parabole se přibližujeme. Proto limita neexistuje.

(182) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(-4,1)} \frac{x+y}{x^2}.$$

$\left[\frac{-3}{16}\right]$

(183) Vypočtěte následující limitu

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}.$$

[2]

(222) Rozhodněte, zda je funkce $f(x,y)$ spojitá v bodě $[0,0]$, kde

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & [x,y] \neq [0,0], \\ 0, & [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

[ano]

III. 3. Derivování funkcí více proměnných

Definice 51. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definována v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí. Položme $\varphi(x) = f(x, y_0)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě x_0, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce f podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$ a označujeme $f_x(x_0, y_0)$, příp. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$. Tuto definici lze zapsat jako

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Analogicky, má-li funkce $\psi(y) = f(x_0, y)$ derivaci v bodě y_0, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce f podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$ a označujeme $f_y(x_0, y_0)$, příp. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$.

Definice 52. Nechť $[x_0, y_0] \in D(f_x)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$ nazýváme tuto derivaci *parciální derivací 2. řádu* funkce f podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme $f_{xx}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$.

Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné y v době $[x_0, y_0]$ nazýváme tuto derivaci *smíšenou parciální derivací 2. řádu* funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme $f_{xy}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$

Věta 53 (Schwarzova). *Nechť funkce f má spojité parciální derivace f_{xy} a f_{yx} v bodě $[x_0, y_0]$. Pak jsou tyto derivace záměnné, tj. platí*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \tag{9}$$

Definice 54. Nechť f je funkce n proměnných, x buď vnitřním bodem $D(f)$ a $u \in \mathbb{V}^n$. Položme $\varphi(t) = f(x + tu)$. Má-li funkce φ derivaci v bodě 0, nazýváme ji *směrovou derivací* funkce f v bodě x (derivací funkce f ve směru vektoru u) a označujeme $f_u(x)$. To znamená, že

$$f_u(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}.$$

Poznámka 55. Směrovou derivaci je možné spočítat i pomocí parciálních derivací prvního řádu. *Gradient* funkce f s n proměnnými v bodě x^* je definován vztahem

$$\operatorname{grad} f(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix}.$$

Potom pro derivaci ve směru vektoru u platí

$$f_u(x^*) = \langle\, \operatorname{grad} f(x^*),\, u \rangle,$$

kde $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ je standardní skalární součin.

Definice 56. Rovina v $\mathbb{R}^3$ o rovnici

$$t:\ z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

se nazývá *tečná rovina* ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$.

Poznámka 57. Pokud je $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ a $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ lze *normálu* ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $T = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ určit vztahem

$$n:\ f(x_0, y_0) - z = \frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)}.$$

Pokud je $f_x(x_0, y_0) = 0$ nebo $f_y(x_0, y_0) = 0$ je nutné normálu vyjádřit parametricky

$$n: \begin{cases} x &= x_0 + f_x(x_0, y_0)t, \\ y &= y_0 + f_y(x_0, y_0)t, \\ z &= z_0 - t. \end{cases}$$

Věta 58. *Nechť funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ mají parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$. Označme $u_0 = u(x_0, y_0)$ a $v_0 = v(x_0, y_0)$. Je-li funkce $z = f(u, v)$ diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak složená funkce $z = F(x, y) = f\,(u(x, y), v(x, y))$ má parciální derivace prvního řádu v bodě $[x_0, y_0]$ a platí*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Zkráceně lze zapsat jako

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x, \qquad z_y = z_u u_y + z_v v_y$$

nebo také

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Příklad. Pomocí parciálních derivací snadno určíme rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^4 - 2xy$$

v bodě $[1, 2, ?]$.

Řešení. Nejprve je třeba si uvědomit, že graf funkce n proměnných je $n + 1$ rozměrný objekt, protože funkce každé n-tici z definičního oboru přiřazuje funkční hodnotu. Otazník v souřadnicích tečného bodu je tedy funkční hodnota dané funkce pro $[x, y] = [1, 2]$. Tedy

$$f(1, 2) = 1^3 + 2^4 - 4 = 13.$$

Tečný bod má proto souřadnice $[1, 2, 13]$. Pro dosazení do vzorce pro tečnou rovinu potřebujeme ještě znát rychlosti růstu zadané funkce ve směru souřadných os x a y v tečném bodě, tedy hodnoty příslušných parciálních derivací. Připomeňme, že derivujeme-li podle jedné proměnné, ke všem ostatním se chováme jako ke konstantám (omezujeme se na řezy ve směru daném derivovanou proměnnou a každý takový řez je dán konstantní hodnotou ostatních proměnných). Tedy

$$f_x = 3x^2 + 0 - 2y = 3x^2 - 2y, \qquad f_y = 0 + 4y^3 - 2x = 4y^3 - 2x.$$

Pro $[x, y] = [1, 2]$ získáme ihned hodnoty

$$f_x(1, 2) = -1, \qquad f_y(1, 2) = 30.$$

Tím máme všechny informace nutné k použití vzorce pro tečnou rovinu:

$$t: \ z = 13 - 1\,(x - 1) + 30\,(y - 2).$$

Po úpravě získáme rovnici tečné roviny ve tvaru

$$t: \ z = -x + 30y - 46.$$

Příklad. Vyzkoušejme výpočet směrové derivace funkce

$$f(x, y) = xy \ln y$$

v bodě $[1, \mathrm{e}]$ ve směru vektoru $u = (2, -1)$ podle definice a pomocí gradientu.

Řešení. Podle definice nejprve z bodu a vektoru získáme

$$x = 1 + 2t, \qquad y = \mathrm{e} - t,$$

tedy

$$\varphi(t) = (1 + 2t)(\mathrm{e} - t)\ln(\mathrm{e} - t) = \left(\mathrm{e} - t + 2\,\mathrm{e}\,t - 2t^2\right)\ln(\mathrm{e} - t).$$

Hledaná derivace tedy je

$$\begin{aligned} f_u(1, \mathrm{e}) &= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(\mathrm{e} - t + 2\,\mathrm{e}\,t - 2t^2)\ln(\mathrm{e} - t) - \mathrm{e}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{(-1 + 2\,\mathrm{e} - 4t)\ln(\mathrm{e} - t) + (\mathrm{e} - t + 2\,\mathrm{e}\,t - 2t^2)\,\frac{1}{\mathrm{e} - t}(-1)}{1} \\ &= (-1 + 2\,\mathrm{e})1 + \mathrm{e}\,\frac{1}{\mathrm{e}}(-1) = 2\,\mathrm{e} - 2, \end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že jde o limitu funkce jedné proměnné, pro kterou máme k dispozici l'Hospitalovo pravidlo.

Nyní problém vyřešme s použitím gradientu zadané funkce, který je

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \ln y \\ x(1 + \ln y) \end{pmatrix}.$$

Směrová derivace je tedy

$$f_u(x, y) = \left\langle \operatorname{grad} f(x, y),\, u \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y \ln y \\ x(1 + \ln y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2y \ln y - x(1 + \ln y).$$

V bodě $[1, \mathrm{e}]$ opět obdržíme hodnotu

$$f_u(1, \mathrm{e}) = 2\,\mathrm{e} - 2.$$

(265) Předpokládejme, že pro funkci f a g existují parciální derivace dostatečně vysokých řádů. Ověřte platnost následující rovnosti

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kde $u = f(x + g(y))$.

III. 4. Diferenciál a Taylorova věta pro funkce více proměnných

Definice 59. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná v okolí bodu $[x_0, y_0]$ je v tomto bodě *diferencovatelná*, jestliže existují reálná čísla A, B taková, že platí

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Lineární funkce $Ah + Bk$ proměnných h a k se nazývá *diferenciál funkce* v bodě $[x_0, y_0]$ a značí se $\mathrm{d}f(x_0, y_0)\,(h, k)$, příp. $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$.

Věta 60. *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$, pak má v tomto bodě parciální derivaci a platí $A = f_x(x_0, y_0)$, $B = f_y(x_0, y_0)$, tj.*

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k.$$

Poznámka 61. Diferenciál funkce lze použít k přibližnému výpočtu funkčních hodnot. Platí

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0).$$

Věta 62 (Taylorova). *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $n + 1$ včetně. Pak pro každý bod $[x, y]$ z tohoto okolí platí*

$$f(x, y) = T_n(x, y) + R_n(x, y),$$

přičemž

$$\begin{aligned}
&T_n(x, y) = \\
&= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) + \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\,(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\,(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\,(y - y_0)^2\right) + \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j} \partial y^j}(x_0, y_0)\,(x - x_0)^{n-j}(y - y_0)^j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&R_n(x, y) = \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j} \partial y^j}\,(x_0 + \vartheta(x - x_0), y_0 + \vartheta(y - y_0))\,(x - x_0)^{n+1-j}(y - y_0)^j,
\end{aligned}$$

kde $\vartheta \in (0, 1)$.

Příklad. Odhadněme pomocí diferenciálu hodnotu

$$\log_2\left[(1,96)^2+4,02\right]$$

pokud víme, že $\ln 2 \doteq 0,693$.

Řešení. Pro odhad použijeme funkci $f(x,y)=\log_2\left(x^2+y\right)$ v bodě $[x_0,y_0]=[2,4]$. Její parciální derivace jsou

$$f_x(x,y)=\frac{2x}{(x^2+y)\ln 2},\qquad f_y(x,y)=\frac{1}{(x^2+y)\ln 2},$$

tedy

$$f_x(2,4)=\frac{1}{2\ln 2},\qquad f_y(2,4)=\frac{1}{8\ln 2}.$$

Diferenciál je

$$\mathrm{d}f(2,4)=f_x(2,4)(1,96-2)+f_y(2,4)(4,02-4)=\frac{-0,04}{2\ln 2}+\frac{0,02}{8\ln 2}\doteq -0,025.$$

Tím získáme odhad

$$\log_2\left[(1,96)^2+4,02\right]\approx\log_2(2^2+4)-0,025=\log_2 2^3-0,025=3-0,025=2,975.$$

Poznamenejme, že přesná hodnota je $2,974822961\ldots$

Příklad. Nyní odhadněme pomocí Taylorova polynomu druhého řádu v bodě $[1,1]$ hodnotu funkce

$$f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2+1\right)$$

v bodě $[1,1;1,2]$.

Řešení. Poznamenejme, že bod $[1,1]$ byl zvolen proto, že jde o nejbližší bod k bodu $[1,1;1,2]$, ve kterém lze funkci f snadno spočítat, nebo (jako v našem případě) jde o typickou tabulkovou hodnotu. Nejprve potřebujeme parciální derivace prvního a druhého řádu

$$f_x=\frac{2x}{x^2+y^2+1},\qquad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2+1},$$

$$f_{xx}=\frac{2\left(-x^2+y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2},\quad f_{xy}=f_{yx}=\frac{-4xy}{\left(x^2+y^2+1\right)^2},\quad f_{yy}=\frac{2\left(x^2-y^2+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}$$

a jejich hodnoty v bodě $[1,1]$

$$f_x=\frac{2}{3},\quad f_y=\frac{2}{3},\quad f_{xx}=\frac{2}{9},\quad f_{xy}=f_{yx}=-\frac{4}{9},\quad f_{yy}=\frac{2}{9}.$$

Nyní stačí dosadit do vzorce:

$$\begin{aligned}T_2&=f(1,1)+\begin{pmatrix}f_x(1,1) & f_y(1,1)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\end{pmatrix}+\\ &\qquad+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}x-1 & y-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}f_{xx}(1,1) & f_{xy}(1,1)\\ f_{yx}(1,1) & f_{yy}(1,1)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{9}\left(x^2+y^2-4xy+8x+8y-14\right)+\ln 3.\end{aligned}$$

V bodě $[1,1;1,2]$ je hodnota přibližně $1,295$. Dodejme, že přesná hodnota činí $1,2947\ldots$

(274) Napište Taylorův polynom třetího stupně se středem v počátku pro funkci
$$f(x,y) = \mathrm{e}^x \ln(1+y).$$

$$\left[y + xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2y - xy^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]$$

(275) Napište Taylorův polynom třetího stupně se středem v bodě $[1,1]$ pro funkci
$$f(x,y) = x^y.$$

$$\left[1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + \tfrac{1}{2}(x-1)^2(y-1)\right]$$

(276) Napište Taylorův polynom druhého stupně se středem v bodě $[-2,-3]$ pro funkci
$$f(x,y) = \ln\left(\frac{1}{xy}\right).$$

$$\left[\ln\tfrac{1}{6} + 3 + x + \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{18}y^2\right]$$

(277) Pomocí Taylorova polynomu druhého stupně vypočtěte přibližně
$$\frac{\cos 44^\circ}{\cos 31^\circ}.$$

$[0,8392012]$

(278) Pomocí Taylorova polynomu druhého stupně pro funkci tří proměnných vypočtěte přibližně
$$f(x,y,z) = \operatorname{arctg}\frac{1,1+0,1+0,01}{1,1-0,1+0,01}.$$

$[0,9733981635]$

III. 5. Lokální a globální extrémy funkcí více proměnných

Definice 63. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $x^* \in \mathbb{R}^n$ *lokálního maxima* (*minima*) funkce f, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x^*)$ platí $f(x) \le f(x^*)$ ($f(x) \ge f(x^*)$).

Definice 64. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že bod $x^* \in \mathbb{R}^n$ je *stacionární bod funkce* f, jestliže v bodě x^* existují všechny parciální derivace funkce f a platí
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Věta 65. *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě x^* lokální extrém a nechť v tomto bodě existují všechny parciální derivace prvního řádu funkce f. Pak je bod x^* stacionárním bodem funkce f.*

Poznámka 66. Je zřejmé, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ může mít lokální extrém pouze ve stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna parciální derivace prvního řádu neexistuje.

Věta 67. *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť $[x_0, y_0]$ je její stacionární bod. Jestliže*

$$D(x_0, y_0) := f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - \left[f_{xy}(x_0, y_0)\right]^2 > 0,$$

pak má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ostrý lokální extrém. Je-li $f_{xx} > 0$, jde o minimum, je-li $f_{xx} < 0$, jde o maximum. Jestliže $D(x_0, y_0) < 0$, pak v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém nenastává.

Definice 68. Nechť existují všechny parciální derivace funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, potom se čtvercová matice ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

nazývá *Hessova matice* (pokud má funkce f v bodě $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ spojité smíšené parciální derivace v bodě $\tilde{x}$, plyne ze Schwarzovy věty, že je Hessova matice v tomto bodě symetrická).

Poznámka 69. Je-li Hessova matice v bodě x^* pozitivně (negativně) definitní, má funkce f v bodě x^* ostré lokální minimum (maximum).

Kvadratická forma určená symetrickou maticí je *pozitivně definitní* právě tehdy, když jsou všechna vlastní čísla kladná (nebo všechny hlavní minory jsou kladné). Kvadratická forma určena symetrickou maticí je *negativně definitní* právě tehdy, když všechna vlastní čísla jsou záporná (nebo všechny hlavní minory střídají znaménka počínaje záporným).

Definice 70. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že bod $x^* \in M$ je bodem *absolutního maxima* (*minima*) funkce f na M, jestliže $f(x) \leq f(x^*)$ ($f(x) \geq f(x^*)$) pro každé $x \in M$.

Věta 71. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní množina (tj. uzavřená a ohraničená) a funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá na M. Pak funkce f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálního extrému ležících uvnitř množiny M nebo v některém hraničním bodě.*

Příklad. Najděte globální extrémy funkce

$$f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)\, \mathrm{e}^{-x^2 - y^2}$$

na množině $M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

Řešení. Globální extrém může být ve stacionárním bodě nebo na hranici množiny. Nejprve proto najdeme všechny stacionární body uvnitř množiny M. K tomu musíme vyřešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$f_x(x, y) = 0, \qquad f_y(x, y) = 0,$$

tedy

$$-2x\, \mathrm{e}^{-x^2 - y^2}(2x^2 + 3y^2 - 2) = 0, \qquad -2y\, \mathrm{e}^{-x^2 - y^2}(2x^2 + 3y^2 - 3) = 0.$$

Protože exponenciální funkce je vždy kladná, jsou pouze čtyři možnosti:

(i) $x = 0, y = 0$,
odkud dostáváme stacionární bod $[0, 0]$;

(ii) $x = 0,\ 2x^2 + 3y^2 - 2 = 0$,
protože první rovnici $x = 0$ můžeme dosadit do druhé rovnice, ihned dostáváme stacionární body $[0, -1]$ a $[0, 1]$;

(iii) $2x^2 + 3y^2 - 3 = 0,\ y = 0$,
podobně jako v předchozím případě dostáváme stacionární body $[-1, 0]$ a $[1, 0]$;

(iv) $2x^2 + 3y^2 - 3 = 0,\ 2x^2 + 3y^2 - 2 = 0$,
odečtením rovnic obdržíme spor ve tvaru $1 = 0$, takže v tomto případě žádný nový stacionární bod nedostaneme.

Protože všech pět získaných bodů patří do množiny M, přidáme si je všechny na seznam kandidátů na hledané globální extrémy.

Nyní otestujeme funkci na hranici množiny M. Nejprve na horní půlkružnici. Dosadíme $y = \sqrt{4 - x^2}$ a najdeme stacionární body výsledné funkce jedné proměnné $g(x) = f(x, \sqrt{4 - x^2}) = (12 - x^2)\,\mathrm{e}^{-4}$ pro $x \in [-2, 2]$. Položíme její derivaci rovnu nule

$$g'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-4} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0,$$

čímž obdržíme bod $[0, \sqrt{4 - 0^2}] = [0, 2]$. Samozřejmě nesmíme zapomenout přidat na náš seznam hraniční body, zde $x = \pm 2$, tedy $[-2, 0]$ a $[2, 0]$.

Podobně otestujeme funkci na dolní půlkružnici. Dosazením $y = -\sqrt{4 - x^2}$ a zopakováním předchozího postupu získáme na seznam další bod $[0, -2]$ (hraniční body už na seznamu máme). Poznamenejme, že v tomto speciálním případě jsme si mohli zjednodušit práci přímo dosazením $y^2 = 4 - x^2$ do funkce f, protože proměnná y se ve objevuje pouze v sudých mocninách. Ani v tomto případě ovšem nesmíme zapomenout přidat na 'seznam kandidátů' body $[-2, 0]$ a $[2, 0]$.

Ve všech bodech našeho seznamu nyní spočítáme funkční hodnoty a zjistíme, kde nastává globální maximum (zde v bodech $[0, 1]$ a $[0, -1]$ s hodnotou $\frac{3}{\mathrm{e}}$) a kde globální minimum (zde v bodě $[0, 0]$ s hodnotou 0).

Příklad. Zkusme rozhodnout, ve kterých stacionárních bodech funkce

$$f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2 - y^2}$$

z předchozího příkladu jsou lokální extrémy.

Řešení. Připomeňme, že jde o body $[-1, 0]$, $[1, 0]$, $[0, -1]$, $[0, 1]$ a $[0, 0]$. K rozhodnutí budeme potřebovat Hessovu matici funkce f:

$$H_f(x, y) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(4x^4 - 6x^2y^2 - 10x^2 - 3y^2 + 2) & 4xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2 - 5) \\ 4xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2 - 5) & 2\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(4x^2y^2 + 6y^4 - 2x^2 - 15y^2 + 3) \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$H_f(-1, 0) = H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}, \quad H_f(0, -1) = H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{\mathrm{e}} \end{pmatrix},$$

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme definitnost těchto matic. Protože v bodě $[0,0]$ je Hessova matice pozitivně definitní, je zde lokální minimum. V bodech $[0,1]$ a $[0,-1]$ je matice negativně definitní, tedy se v nich nachází lokální maximum. V bodech $[-1,0]$ a $[1,0]$ extrémy nejsou, protože je tam matice indefinitní. Tento výsledek přesně koresponduje s výsledky předchozího příkladu, protože funkce měla globální extrémy v bodech extrémů lokálních a nikoli na hranici množiny.

(279) V bodě $[\mathrm{e},2]$ určete Hessovu matici funkce

$$f(x,y)=x^y.$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 3\,\mathrm{e} \\ 3\,\mathrm{e} & \mathrm{e}^2 \end{pmatrix}\right]$$

(280) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y)=x^2+y^2-xy-2x+y.$$

$$[f_{min}(1,0)=-1]$$

(281) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y)=xy(4-x-y).$$

$$\left[f_{max}\left(\tfrac{4}{3},\tfrac{4}{3}\right)=\tfrac{64}{27}\right]$$

(282) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}(x^2+y^2).$$

$$[f_{min}(0,0)=0]$$

(283) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y)=4x-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}.$$

$$\left[f_{min}\left(\tfrac{1}{2},-1\right)=6;\ f_{max}\left(-\tfrac{1}{2},1\right)=-6\right]$$

(284) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y)=\ln xy-4x-9y.$$

$$\left[f_{max}\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{9}\right)=-2-\ln 36\right]$$

(285) Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z},\quad x,y,z>0.$$

$$\left[f_{min}\left(\tfrac{1}{2},1,1\right)=4\right]$$

(294) Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x,y) = (x-y)^2 + x^2$$

na čtverci s vrcholy $A = [2,0]$, $B = [0,2]$, $C = [-2,0]$, $D = [0,-2]$.

$\left[f_{gl.\,min}(0,0) = 0;\ f_{gl.\,max}(2,0) = 8;\ f_{gl.\,max}(-2,0) = 8\right]$

III. 6. Vázané extrémy

Definice 72. Nechť f je funkce n proměnných, $M \subset D(f)$, $x^* \in M$. Existuje-li okolí $\mathcal{O}(x^*)$ bodu x^* takové, že pro všechna $x \in M \cap \mathcal{O}(x^*)$ platí $f(x) \leq f(x^*)$ ($f(x) \geq f(x^*)$) říkáme, že funkce f má v bodě x^* *lokální maximum* (*minimum*) vzhledem k množině M.

Věta 73. *Nechť funkce n proměnných f, $g_1, \ldots, g_m$, $1 \leq m \leq n$, mají spojité parciální derivace prvního řádu v otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$ a nechť v každém bodě množiny U má matice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

hodnost m. Přičemž množina M je určena systémem rovností $g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0$. Má-li funkce f v bodě $x^* \in M$ lokální extrém vzhledem k M, existují reálná čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tak, že jsou splněny rovnosti

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x^*), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Poznámka 74. Funkce

$$L(x,\lambda) = f(x) - \lambda \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x)$$

se nazývá *Lagrangeova funkce* a konstanty $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *Lagrangeovy multiplikátory*. Tímto jsme získali funkci n proměnných, do níž jsou vazebné podmínky již zabudovány. Dále postupuje jako při vyšetřování lokálních extrémů s tím, že neznámým je nejen hledaný bod x^* ale i Lagrangeovy multiplikátory. Metodu Lagrangeových multiplikátorů lze použít i v případě, kdy množina M je zadána systémem nerovností.

Poznámka 75. *Neexistence* extrému Lagrangeovy funkce $L(x,\lambda)$ v některém jejím stacionárním bodě *neznamená*, že i funkce f nemá v tomto bodě lokální extrém.

Příklad. Pomocí Lagrangeových multiplikátorů najděme stacionární body funkce

$$f(x,y,z) = xyz$$

na množině M dané rovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$.

Řešení. Nejprve sestrojíme Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xyz - \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \lambda_2(x + y + z).$$

Stacionární body dostaneme jako řešení soustavy rovnic

$$
\begin{aligned}
L_x &= yz - 2x\lambda_1 - \lambda_2, &(10)\\
L_y &= xz - 2y\lambda_1 - \lambda_2, &(11)\\
L_x &= xy - 2z\lambda_1 - \lambda_2, &(12)\\
L_{\lambda_1} &= x^2 + y^2 + z^2 - 1,\\
L_{\lambda_2} &= x + y + z.
\end{aligned}
$$

Z rovnic (10), (11) a (12) vyloučíme λ_2 jejich vzájemným odečtením. Po úpravě dostaneme soustavu

$$
\begin{aligned}
(10) - (11) \Rightarrow (y-x)(z+2\lambda_1) &= 0,\\
(11) - (12) \Rightarrow (z-y)(x+2\lambda_1) &= 0,\\
x^2 + y^2 + z^2 &= 1, &(13)\\
x + y + z &= 0. &(14)
\end{aligned}
$$

První dvě rovnice jsou ve tvaru 'součin = 0', tj. jsou splněny, jestliže je v každé některá závorka nulová. Odtud dostaneme informace, které nám (po dosazení do (13) a (14)) dají stacionární body a příslušné multiplikátory:

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right] \left(\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right), \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right] \left(\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right),\\
&\left[-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right] \left(\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right), \left[\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right] \left(\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right),\\
&\left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right] \left(\lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right), \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right] \left(\lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{6}\right).
\end{aligned}
$$

Příklad. Najděme lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25}$$

na množině M dané rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Řešení. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,z,\lambda) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

a derivujeme ji podle všech proměnných. Tyto parciální derivace položíme rovny nule a řešíme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých:

$$
\begin{aligned}
x\left(\frac{1}{2} + 2\lambda\right) &= 0,\\
y\left(\frac{2}{9} + 2\lambda\right) &= 0,\\
z\left(\frac{2}{25} + 2\lambda\right) &= 0,\\
x^2 + y^2 + z^2 &= 1.
\end{aligned}
$$

Vždy zvolíme λ tak, aby jedna z prvních tří rovnic byla splněna ($= 0$), další dvě vyřeší položení příslušných proměnných $= 0$ a třetí proměnnou vypočítáme ze čtvrté rovnice. Dostaneme 6 stacionárních bodů $[\pm 1, 0, 0], [0, \pm 1, 0], [0, 0, \pm 1]$ a k nim příslušné hodnoty λ $\left(\text{postupně } -\frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{25}\right)$. Zda v nich nastává extrém zjistíme z definitnosti formy dané

$$\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yx} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix}.$$

Tj., pokud je výraz

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yx} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix}$$

kladný pro všechna $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) \neq (0, 0, 0)$, pak je pozitivně definitní, pokud záporný, pak je negativně definitní a pokud najdeme dva vektory takové, že je daný výraz pro jeden kladný a pro druhý záporný, pak je indefinitní. $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$ ovšem bereme jen z tečného prostoru množiny M, tedy takové, jež splňují podmínku

$$2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y + 2z\mathrm{d}z = 0.$$

Dosazením bodu $[1, 0, 0]$ do této podmínky dostaneme, že $\mathrm{d}x = 0$. Vyšetřovaný výraz je tedy $\left(\text{pro tento bod } \lambda = -\frac{1}{4}\right)$

$$-\frac{5}{18}(\mathrm{d}y)^2 - \frac{21}{50}(\mathrm{d}z)^2,$$

který je pro každé $(\mathrm{d}y, \mathrm{d}z) \neq (0, 0)$ záporný. Vyšetřovaná forma je tedy negativně definitní a v bodě $[1, 0, 0]$ je ostré lokální maximum. Podobně zjistíme, že maximum nastává i v bodě $[-1, 0, 0]$ a minimum v bodech $[0, 0, \pm 1]$. V bodech $[0, \pm 1, 0]$ extrém funkce nemá, protože je zde forma indefinitní.

(295) Určete vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = 2x^2 + 4y^2$$

na množině $x^2 + y^2 = 9$.

$[f_{max}(0, 3) = 36;\ f_{max}(0, -3) = 36;\ f_{min}(3, 0) = 18;\ f_{min}(-3, 0) = 18]$

(296) Určete vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = \sqrt{3}x - y + 2$$

na množině $x^2 + 2x + y^2 = 0$.

$\left[f_{max}\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 4 - \sqrt{3};\ f_{min}\left(-\frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}\right]$

(297) Určete vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = x + y$$

na množině $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

$\left[f_{min}\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2};\ f_{max}\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}\right]$

III. 7. Implicitně zadané funkce

Definice 76. Nechť F je funkce dvou proměnných. Označme množinu

$$M = \{[x, y] \in D(f) : F(x, y) = 0\}$$

a nechť $F(x_0, y_0) = 0$. Jestliže existuje okolí $\mathcal{U} = \{[x, y] \in D(F) : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$ bodu $[x_0, y_0]$ takové, že množina $M \cap \mathcal{U}$ je totožná s grafem funkce $y = f(x)$, $|x - x_0| < \delta$, řekneme, že funkce f je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ *definovaná implicitně* rovnicí $F(x, y) = 0$.

Věta 77 (O existenci implicitní funkce jedné proměnných). *Nechť je funkce F spojitá na čtverci $R = \{[x, y] \in D(F) : |x - x_0| < a, |y - y_0| < a\}$ a nechť $F(x_0, y_0) = 0$. Dále předpokládejme, že funkce F má spojitou parciální derivaci $\frac{\partial}{\partial y}F(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ a platí $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Pak existuje okolí bodu $[x_0, y_0]$, v němž je rovností $F(x, y) = 0$ implicitně definována právě jedna funkce $y = f(x)$, která je spojitá.*

Věta 78. *Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty a funkce F má na R spojité parciální derivace prvního řádu. Pak má funkce f, která je implicitně určena v okolí bodu $[x_0, y_0]$ rovnicí $F(x, y) = 0$, derivaci v bodě x_0 a platí*

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}. \tag{15}$$

Věta 79 (O existenci implicitní funkce více proměnných). *Nechť funkce $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $M = = \{[x, y] = [x_1, \ldots, x_n, y] \in \mathbb{R}^{n+1}, F(x, y) = 0\}$, $[x^*, y^*] \in M$ a nechť F je spojitá na množině $R = \{[x, y] = [x_1, \ldots, x_n, y] : \left|x_i - x_i^*\right| < a, i = 1, \ldots, n, |y - y^*| < a\}$. Dále předpokládejme, že F má spojitou parciální derivaci F_y v bodě $[x^*, y^*]$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \neq 0$. Pak existuje okolí $[x^*, y^*]$, v němž je rovnicí $F(x, y) = F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ implicitně určena právě jedna funkce $y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$.*

Má-li navíc funkce F v bodě $[x^*, y^*]$ spojité parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x_i}F$, má implicitní funkce f v bodě $x^* = [x_1, \ldots, x_n]$ parciální derivace a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*, y^*)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*)}.$$

Poznámka 80. K určení derivací vyšších řádů (pro funkci implicitní funkci jedné nebo více proměnných) lze samozřejmě také sestavit vzorec, s jehož pomocí tyto derivace vypočteme. Druhý způsob je ten, že zderivujeme identitu $F(x, y) = 0$ podle jednotlivých proměnných $x_1, \ldots, x_n$ s tím, že člen y je vlastně funkcí $y(x)$ a nelze jej explicitně zderivovat (proto píšeme jen y_{x_i} pro $i = 1, \ldots, n$). Z takto zderivované identity poté hledanou (parciální) derivaci vyjádříme.

Poznámka 81. Pro implicitně zadanou funkci $F(x, y, z)$ je tečná rovina v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ určena rovnicí

$$t : F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

pro $F_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, $F_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ a $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ je normála dána vztahem

$$n : \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)} = \frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)},$$

a pokud $F_x(x_0, y_0, z_0) = 0$ nebo $F_y(x_0, y_0, z_0) = 0$ nebo $F_z(x_0, y_0, z_0) = 0$, je normála zadána parametricky rovnicemi

$$n : \begin{cases} x &= x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0)t, \\ y &= y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0)t, \\ z &= z_0 + F_z(x_0, y_0, z_0)t. \end{cases}$$

Příklad. Pokusme se určit, zda je graf funkce dané implicitně

$$\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2} = 0$$

v okolí bodu $[1, 3]$ nad nebo pod tečnou.

Řešení. Jde o implicitně zadanou funkci jedné proměnné $y = y(x)$. K rozhodnutí potřebujeme znát hodnotu druhé derivace v daném bodě (resp. její znaménko). Derivujme rovnost ze zadání podle x

$$9x - 3y^2 - 3x2yy' + 3y^2y' = 0,$$

tedy

$$y' = -\frac{9x - 3y^2}{3y^2 - 6xy},$$

odkud po dosazení bodu $[1, 3]$ dostaneme hodnotu $y' = 2$. Protože se ve jmenovateli nula neobjevila, funkce daná implicitně v okolí daného bodu existuje. Derivujme rovnost podruhé (pozor na derivace součinů – y je funkcí proměnné x)

$$9 - 12yy' - 6xy'^2 - 6xyy'' + 6yy'^2 + 3y^2y'' = 0.$$

Do výsledného vzorce dosadíme známé hodnoty $x = 1, y = 3$ a $y' = 2$. Tím snadno obdržíme hodnotu $y'' = \frac{15}{9} > 0$. Graf je tedy v okolí daného bodu nad tečnou.

Příklad. Na elipse o rovnici

$$x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$$

najděme body, v nichž je normála rovnoběžná s osou y.

Řešení. Normála v bodě $[x_0, y_0]$ je dána

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tF_x(x_0, y_0), \\ y &= y_0 + tF_y(x_0, y_0), \end{aligned}$$

kde pro $F(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 8$ máme $F_x = 2x - 2$ a $F_y = 6y - 6$. Protože rovnoběžnost s osou y je totéž jako kolmost na osu x a kolmost znamená nulový skalární součin, dostáváme

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2x_0 - 2 \\ 6y_0 + 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

Odtud ihned vidíme, že $x_0 = 1$, což dosadíme do rovnice elipsy a vypočítáme y_0. Tím získáme hledané body $[1, 1], [1, -3]$.