Přednáška 7

Integrování — jednoduchý integrál

Opakování

Poznámka: Ve všech případech uvažujeme obrazec omezený funkcí $f(x)$ definovanou, nezápornou a spojitou na $[a, b]$ a přímkami $x = a$, $y = b$. Všechny vztahy pro geometrické a fyzikální charakteristiky můžeme použít i pro obecnější případ, kdy bude obrazec omezen opět přímkami $x = a$, $x = b$ a grafy funkcí $g(x) \leq f(x)$ (stačí vzít rozdíl příslušných charakteristik odpovídajících funkci f a g).

• Plocha obrazce ohraničeného grafem $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$:

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Hmotnost obrazce ohraničeného grafem funkce $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$, který má plošnou hustotu $\sigma(x)$ závislou pouze na proměnné x:

$$\mu = \int_a^b \sigma(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Poloha těžiště obrazce ohraničeného grafem funkce $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$, který má plošnou hustotu $\sigma(x)$ závislou pouze na proměnné x:

$$x_T = \frac{1}{\mu}\int\limits_a^b \sigma(x)xf(x)\,\mathrm{d}x, \quad y_T = \frac{1}{\mu}\int\limits_a^b \frac{1}{2}\sigma(x)f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Momenty setrvačnosti obrazce ohraničeného grafem funkce $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$, který má plošnou hustotu $\sigma(x)$ závislou pouze na proměnné x:

$$J_x = \frac{1}{3}\int\limits_a^b \sigma(x)\,f^3(x)\,\mathrm{d}x, \qquad J_y = \int\limits_a^b \sigma(x)\,x^2\,f(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Objem tělesa, které vnikne rotací obrazce omezeného grafem $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ kolem osy x:

$$V = \int\limits_a^b \pi f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Hmotnost tělesa, které vnikne rotací obrazce omezeného grafem $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ kolem osy x a jehož hustota $\varrho(x)$ je funkcí pouze proměnné x:

$$\mu = \int\limits_a^b \pi\varrho(x)f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

• Poloha těžiště tělesa, které vnikne rotací obrazce omezeného grafem $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ kolem osy x a jehož hustota $\varrho(x)$ je funkcí pouze proměnné x:

$$\vec{r}_T = \left(\frac{1}{\mu} \int\limits_a^b \pi \varrho(x)\, x\, f^2(x)\, \mathrm{d}x,\ 0,\ 0 \right) .$$

• Moment setrvačnosti (vzhledem k ose symetrie) tělesa, které vnikne rotací obrazce omezeného grafem $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, $y = 0$ kolem osy x a jehož hustota $\varrho(x)$ je funkcí pouze proměnné x:

$$J_x = \frac{1}{2}\pi \int\limits_a^b \varrho(x)\, f^4(x)\, \mathrm{d}x.$$

• Plocha pláště, který vznikne rotací oblouku grafu funkce $f(x)$ mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ kolem osy x:

$$\mathcal{S} = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x.$$

• Hmotnost pláště, který vznikne rotací oblouku grafu funkce $f(x)$ mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ kolem osy x a který má plošnou hustotu $\sigma(x)$ závislou pouze na proměnné x:

$$\mu = 2\pi \int\limits_a^b \sigma(x)\, f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x.$$

• Poloha těžiště pláště, který vznikne rotací oblouku grafu funkce $f(x)$ mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ kolem osy x a který má plošnou hustotu $\sigma(x)$ závislou pouze na proměnné x:

$$\vec{r}_T = \frac{1}{\mu}\left(2\pi \int\limits_a^b x\,\sigma(x)\,f(x)\,\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x,\ 0,\ 0\right).$$

• Moment setrvačnosti pláště, který vznikne rotací oblouku grafu funkce $f(x)$ mezi body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ kolem osy x a který má plošnou hustotu $\sigma(x)$ závislou pouze na proměnné x, vzhledem k ose symetrie:

$$J_x = 2\pi \int\limits_a^b \sigma(x)\,f^3(x)\,\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

Křivkový integrál

Parametrizovaná křivka je zadána svojí parametrizací $\mathcal{C} : [a, b] \to \mathbf{R}^3$.

$$\mathcal{C} : x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b].$$

Křivka je *(po částech) hladká* jestliže (až na konečně mnoho bodů) jsou všechny tři funkce spojité i se svou první derivací a platí $||\vec{v}|| \neq 0$, kde

$$\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right).$$

Poznámka: Křivku lze také chápat jako množinu bodů v $\mathbf{R}^3$, která je obrazem dané parametrizace $\mathcal{K} = \mathcal{C}([a, b])$. Různé parametrizace $\mathcal{C}$ tak mohou zadávat stejnou křivku $\mathcal{K}$.

Příklad: Parametrizujte kružnici, parabolu, přímku několika různými způsoby.

Poznámka:

- *uzavřená* křivka má počáteční a koncový bod tentýž,
- *oblouk* je parametrizovaný prostým zobrazením (neprotíná se),
- *Jordanova* křivka je spojitým obrazem kružnice.

Příklady známých křivek

- kružnice $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = 0$, $t \in [0, 2\pi]$
- elipsa $x = A\cos t$, $y = B\sin t$, $z = 0$, $t \in [0, 2\pi]$
- šroubovice $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = kt$, $t \in [0, 2\pi]$
- cykloida $x = A(t - \sin t)$, $y = A(1 - \cos t)$, $z = 0$, $t \in [0, 2\pi]$
- asteroida $x = A\cos^3 t$, $y = A\sin^3 t$, $z = 0$, $t \in [0, 2\pi]$
- Archimedova spirála $\varrho = A\varphi$ $\varphi \in [0, 2\pi]$ v polárních souřadnicích
- Hyperbolická spirála $\varrho = \frac{A}{\varphi}$, $\varphi \in (0, \infty)$ v polárních souřadnicích
- Logaritmická spirála $\varrho = A\mathrm{e}^{B\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$ v polárních souřadnicích

Křivkový integrál prvního druhu

Délka oblouku:

$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}l = \int\limits_a^b ||\vec{v}||\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

Integrál z funkce $f = f(x, y, z)$ po křivce $\mathcal{C}$:

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\mathrm{d}l = \int\limits_a^b (f \circ \mathcal{C})\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t$$

Geometrické a fyzikální charakteristiky křivek

- Hmotnost oblouku s lineární hustotou $\lambda(x(t), y(t), z(t))$:

$$m = \int\limits_a^b \lambda(x(t),\, y(t),\, z(t))\,\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

- Poloha těžiště oblouku s lineární hustotou $\lambda(x(t), y(t), z(t))$:

$$x_T = \frac{1}{m}\int\limits_a^b x(t)\,\lambda(x(t),\, y(t),\, z(t))\,\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\,\mathrm{d}t\,,$$

$$y_T = \frac{1}{m}\int\limits_a^b y(t)\,\lambda(x(t),\, y(t),\, z(t))\,\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$z_T = \frac{1}{m}\int\limits_a^b z(t)\,\lambda(x(t),\,y(t),\,z(t))\,\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2+(\dot{z}(t))^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

• Momenty setrvačnosti oblouku s lineární hustotou $\lambda(x(t), y(t), z(t))$:

$$J_x = \int\limits_a^b (y^2(t)+z^2(t))\lambda(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2+(\dot{z}(t))^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$J_y = \int\limits_a^b (x^2(t)+z^2(t))\lambda(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2+(\dot{z}(t))^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$J_z = \int\limits_a^b (x^2(t)+y^2(t))\lambda(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(\dot{x}(t))^2+(\dot{y}(t))^2+(\dot{z}(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka: Křivkový integrál prvního druhu nezávisí na zvolené parametrizaci křivky.

Příklad: Vypočtěte délku kružnice, délku závitu šroubovice, sestavte integrál pro délku části paraboly $y = x^2$ mezi body $[0, 0]$ a $[1, 1]$. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní kružnice vzhledem k ose procházející jejím středem a kolmé na rovinu, v níž kružnice leží.

Výsledky: $2\pi r$, $2\pi\sqrt{r^2+k^2}$, $\int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\mathrm{d}t$, mr^2.

Křivkový integrál druhého druhu

Práce silového pole $\vec{F}$ po křivce $\mathcal{C}$:

$$\vec{F}(x,y,z) = (F^1(x,y,z), F^2(x,y,z), F^3(x,y,z))$$

$$W = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b (\vec{F} \circ \mathcal{C}) \cdot \vec{v} \mathrm{d}t = \int_a^b (F^1 \dot{x} + F^2 \dot{y} + F^3 \dot{z}) \mathrm{d}t.$$

Poznámka: Složky síly $F^i = F^i(x,y,z) = F^i(x(t), y(t), z(t))$ v posledním integrálu již chápeme jako složené se zobrazením, které je parametrizací křivky, přesněji bychom měli psát $F^i \circ \mathcal{C}$.

Poznámka: Zvolíme-li jinou parametrizaci téže křivky tak, že bude zaměněn počáteční a koncový bod křivky, změní křivkový integrál druhého druhu znaménko. Jinak na parametrizaci nezávisí. Pozor, v případě, že by se nejednalo o silové pole, ale síla by závisela také na rychlosti, tj. $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ bude obecně práce na parametrizaci záviset.

Příklad: Vypočtěte práci síly $\vec{F} = (y, x)$ mezi body $[0,0]$ a $[1,1]$ po

- parabole $y = x^2$,
- úsečce $y = x$,
- parabole $y = \sqrt{x}$,
- s využitím následující věty.

Výsledek: $W = 1$.

Věta o nezávislosti na cestě:
Nechť (1) G je jednoduše souvislá otevřená množina, (2) $\vec{F}$ je hladké vektorové pole na $\overline{G}$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

A. Práce síly $\vec{F}$ po každé uzavřené křivce je nulová,

B. Práce síly $\vec{F}$ nezávisí na cestě (ale pouze na počátečním a koncovém bodě),

C. Platí $\mathbf{rot}\vec{F} = \vec{o}$,

D. Existuje funkce $\varphi = \varphi(x, y, z)$ na G (*kmenová funkce*) tak, že $\vec{F} = \mathbf{grad}\varphi$, zejména pak platí

$$W = \int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \varphi(K) - \varphi(Z),$$

kde Z je začáteční a K koncový bod křivky. Vektorovému poli pak říkáme *konzervativní*.

Poznámka: Ve fyzice se obvykle používá funkce *potenciálu* daná vztahem $\mathbf{grad}\varphi = -\vec{F}$. Potenciál je určený jednoznačně, až na aditivní konstantu.

Poznámka: Na vhodném příkladě ukažte, proč jsou ve větě nutné předpoklady o jednoduché souvislosti množiny G. Např.

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right).$$

Přednáška 8

Integrování — vícenásobný integrál

Fubiniova věta

Pro spojitou funkci $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbf{R}$ platí

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$
$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Poznámka: Větu lze zobecnit místo obdélníku na libovolný kartézský součin měřitelných množin v libovolné dimenzi.

Nechť $A = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 | a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$ je množina omezená grafy $g(x)$ a $h(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$.

$$\iint_A f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Fyzikální charakteristiky plošného obrazce A a tělesa B:

$f(x,y)$	$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
1	obsah plochy S_A
$\sigma(x,y)$	hmotnost m_A
$y\sigma(x,y)$	lineární moment U_x, těžiště $y_T = \frac{U_x}{m_A}$
$x\sigma(x,y)$	lineární moment U_y, těžiště $x_T = \frac{U_x}{m_A}$
$y^2\sigma(x,y)$	moment setrvačnosti J_x
$x^2\sigma(x,y)$	moment setrvačnosti J_y
$r^2(x,y)\sigma(x,y)$	moment setrvačnosti J_o

$f(x,y,z)$	$\iiint_B f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
1	objem plochy V_B
$\varrho(x,y,z)$	hmotnost m_B
$x\varrho(x,y,z)$	lineární moment U_{yz}, těžiště $x_T = \frac{U_{yz}}{m_A}$
$y\varrho(x,y,z)$	lineární moment U_{xz}, těžiště $y_T = \frac{U_{xz}}{m_A}$
$z\varrho(x,y,z)$	lineární moment U_{xy}, těžiště $z_T = \frac{U_{xy}}{m_A}$
$(y^2+z^2)\varrho(x,y,z)$	moment setrvačnosti J_x
$(x^2+z^2)\varrho(x,y,z)$	moment setrvačnosti J_y
$(x^2+y^2)\varrho(x,y,z)$	moment setrvačnosti J_z
$r^2(x,y,z)\varrho(x,y,z)$	moment setrvačnosti J_o

kde $\varrho(x,y,z)$ resp. $\sigma(x,y)$ je hustota, r vzdálenost od osy o.

Věta o transformaci

Předpoklady:

- $M \subset \mathbf{R}^2$ otevřená množina v rovině (u, v),
- $g : M \to \mathbf{R}^2$ injektivní zobrazení do roviny (x, y) dané funkcemi $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ spojitými i s parciálními derivacemi prvního řádu,
- na M platí $J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ a je to ohraničená funkce,
- M, $g(M)$ jsou měřitelné a f spojitá a ohraničená na $g(M)$.

$$\iint_{g(M)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M (f \circ g)(u,v)|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Poznámka: Věta platí v libovolné dimenzi. Pro trojný integrál a výpočet objemu v $\mathbf{R}^3$ bude Jacobiho matice řádu tři.

Příklad: Dokažte $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Příklad: Vypočtěte objem anuloidu a koule přímo a pomocí věty o transformaci.
Výsledek: $2\pi^2 Rr^2$, $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Příklad: Vypočtěte plochu ohraničenou křivkami $y = x$, $y = 2x$, $y = \frac{1}{x}$ a $y = \frac{2}{x}$.

- jednoduchým integrálem v kartézských souřadnicích,

- dvojnásobným integrálem s proměnnými mezemi nejprve podle proměnné x, potom podle proměnné y,
- dvojnásobným integrálem s proměnnými mezemi nejprve podle proměnné y, potom podle proměnné x,
- dvojným integrálem v pevných mezích pomocí jakobiánu a věty o transformaci (zvolte vhodné souřadnice),
- pomocí Greenovy věty, vypočtěte práci silového pole $\vec{F} = (-y, x)$ po uzavřené křivce ohraničující plochu.

Výsledek: $\ln \sqrt{2}$

Záměna derivace a integrálu

O funkcích $f(x, y)$, $g(y)$, $f_y(x, y)$, $g'(y)$ předpokládáme spojitost.

$$g(y) = \int\limits_a^b f(x, y) \mathrm{d}x \implies g'(y) = \int\limits_a^b f_y(x, y) \mathrm{d}x$$

$$g(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) \mathrm{d}x \implies$$

$$g'(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f_y(x, y) \mathrm{d}x + f(\psi(y), y)\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y)$$

Přednáška 9

Plošný integrál a integrální věty

Uvažujme parametrizaci plochy

$$\mathcal{S} : [t_1, t_2] \times [s_1, s_2] \ni [t, s] \to \mathcal{S}(t, s) = (x(t, s), y(t, s), z(t, s)).$$

Parametrizace zadává ***hladký kousek plochy***, jsou-li funkce x, y, z spojité i se svými parciálními derivacemi a platí-li $||\vec{f_t} \times \vec{f_s}|| \neq 0 \; \forall t, s$, kde

$$\vec{f_t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right), \quad \vec{f_s} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s} \right).$$

Plošný integrál prvního druhu

Obsah plochy:

$$S = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S = \int_{t_1}^{t_2} ||\vec{f_t} \times \vec{f_s}|| \mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Integrál z funkce $f = f(x, y, z)$ přes plochu $\mathcal{S}$:

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{s_1}^{s_2} (f \circ \mathcal{S})||\vec{f_t} \times \vec{f_s}|| \mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Poznámka: Plošný integrál nezávisí na volbě parametrizace plochy

Příklad: Vypočtěte povrch anuloidu (toroid) a koule (sféra) jednoduchým i plošným integrálem.

Výsledky: $4\pi^2 rR$, $4\pi R^2$.

Fyzikální charakteristiky plošných útvarů

$f(x,y,z)$	$\iiint_S f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
1	obsah plochy S
$\sigma(x,y,z)$	hmotnost m
$x\sigma(x,y,z)$	lineární moment U_{yz}, těžiště $x_T = \frac{U_{yz}}{m_A}$
$y\sigma(x,y,z)$	lineární moment U_{xz}, těžiště $y_T = \frac{U_{xz}}{m_A}$
$z\sigma(x,y,z)$	lineární moment U_{xy}, těžiště $z_T = \frac{U_{xy}}{m_A}$
$(y^2+z^2)\sigma(x,y,z)$	moment setrvačnosti J_x
$(x^2+z^2)\sigma(x,y,z)$	moment setrvačnosti J_y
$(x^2+y^2)\sigma(x,y,z)$	moment setrvačnosti J_z
$r^2(x,y,z)\sigma(x,y,z)$	moment setrvačnosti J_o

kde $\sigma(x,y,z)$ je plošná hustota hustota, r vzdálenost od osy o.

Plošný integrál druhého druhu

Tok vektorového pole $\vec{F}$ plochou $\mathcal{S}$:

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\vec{n}\mathrm{d}S = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{s_1}^{s_2} (\vec{F}\circ\mathcal{S})\frac{\vec{f}_t \times \vec{f}_s}{||\vec{f}_t \times \vec{f}_s||}||\vec{f}_t\times\vec{f}_s||\mathrm{d}s\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{s_1}^{s_2} (\vec{F}\circ\mathcal{S})(\vec{f}_t \times \vec{f}_s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Poznámka: Integrál při změně pořadí vektorů změní znaménko. Pořadí je třeba volit podle toho, zda má být plocha orientovaná vnější, nebo vnitřní normálou. Jinak na volbě parametrizace nezávisí.

Příklad: Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Výsledek: $\frac{Q}{\varepsilon_0}$.

Integrální věty

Věta o nezávislosti na cestě: byla uvedena v prezentaci 7.

Greenova věta: Nechť G je jednoduše souvislá oblast v $\mathbf{R}^2$, $\mathcal{C}$ je uzavřená kladně orientovaná křivka ohraničující plochu D, $\vec{F}$ je hladké vektorové pole na $\overline{G}$. Pak

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\mathrm{d}r = \iint_{\mathcal{D}} (F_x^2 - F_y^1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Speciálně pro $\vec{F} = (-y, x)$ platí $F_x^2 - F_y^1 = 2$ a obsah plochy

$$S_D = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} (-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y).$$

Příklad: Pomocí Greenovy věty vypočtěte plochu elipsy.
Řešení: $x = A\cos t$, $y = B\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} ((-B\sin t)(-A\sin t) + (A\cos t)(B\cos t))\mathrm{d}t = \pi AB.$$

Gaussova – Ostrogradského věta:
Nechť $\mathcal{S}$ je uzavřená plocha ohraničující objem (jednoduchý obor) $\mathcal{V}$ orientovaná vnější normálou, $\vec{F}$ je hladké vektorové pole,

$$\oint\!\!\oint_{\mathcal{S}=\partial\mathcal{V}} \vec{F}\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{div}\vec{F}\mathrm{d}V.$$

Stokesova věta:
Nechť $\mathcal{C}$ je souhlasně orientovaná uzavřená křivka tvořící okraj $\mathcal{S}$ (který lze rozložit na konečný počet částí popsaných grafy funkcí), $\vec{F}$ je hladké vektorové pole,

$$\oint_{\mathcal{C}=\partial\mathcal{S}} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{rot}\vec{F}\mathrm{d}\vec{S}.$$

Příklady: Využití integrálních vět na výpočty toků vektorových polí převodem na trojný nebo jednoduchý integrál.