Písemka analýza 2

---

1. Vypočtěte plochu ohraničenou křivkami $y = 2x$, $y = x$, $y = \sqrt{x}$ a $y = 2\sqrt{x}$.

- jednoduchým integrálem v kartézských souřadnicích,
- dvojnásobným integrálem s proměnnými mezemi nejprve podle proměnné x, potom podle proměnné y,
- dvojnásobným integrálem s proměnnými mezemi nejprve podle proměnné y, potom podle proměnné x,
- dvojným integrálem v pevných mezích pomocí jakobiánu a věty o transformaci (zvolte vhodné souřadnice),
- pomocí Greenovy věty, tj. vypočtěte práci silového pole $\vec{F} = (-y, x)$ po uzavřené křivce ohraničující plochu.

(Každá podotázka 0,4 bodu, celkem 2 body, výsledek je 35/16.)

---

2. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní kružnice s jednotkovou lineární hustotou o poloměru R vzhledem k jejímu průměru.

(Výsledek $J = \pi R^3$. Celkem 2 body.)

---

3. Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (0, 0, x^2y^2z^2)$ plochou zadanou rovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \leq 0$ a orientovanou vnější normálou

- přímo,
- převodem na objemový integrál pomocí Stokesovy věty.

(Každá podotázka za 1 bod, celkem 2 body, výsledek: $-\pi R^8/96$.)

---

4. Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = \mathrm{rot}\vec{G}$, kde $\vec{G} = (ky, -kx, 0)$, kde $k = $ konst., plochou $z = v - \frac{x^2+y^2}{a^2}$, $z \geq 0$, orientovanou vnější normálou

- přímo,
- pomocí integrální věty.

(Každá podotázka za 1 bod, celkem 2 body, výsledek: $-2\pi ka^2v$.)

---

5. Vypočtěte objem, hmotnost, polohu těžiště a moment setrvačnosti kolem osy symetrie pro plný homogenní (hustota $\varrho = $ konst.) kužel o výšce h a poloměru podstavy R. Vypočtěte povrch pláště (bez podstavy), hmotnost pláště (plošná hustota $\sigma = $ konst.), polohu těžiště pláště a moment setrvačnosti pláště kolem osy symetrie pro tento kužel.

- vícenásobným integrálem (zvolte vhodnou parametrizaci),
- pro kontrolu bez bodového hodnocení také jednoduchým integrálem (kužel vznikne rotací úsečky kolem osy x).

(Výsledky: Těleso: $V = \pi R^2 h/3$, $m = \varrho V$ (0,4b), $T(3h/4, 0, 0)$ kužel s osou symetrie x a vrcholem v počátku a $J = \varrho\pi h R^4/10 = 3mR^2/10$ (0,4b), Plášť (bez podstavy): $S = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$, $m = \sigma S$ (0,4b), $T = (2h/3, 0, 0)$ (0,4b), $J = \pi R^3\sqrt{R^2 + h^2}/2 = mR^2/2$ (0,4).
Celkem 2 body za vícenásobný integrál za celý příklad.)
