1 Cvičení

1. Vypočtěte objem následujících těles v $\mathbf{R}^3$:

a) těleso ohraničené rovinami $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ a eliptickým paraboloidem $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ (všechny zúčastněné konstanty považujte za kladné),

b) těleso ohraničené rovinami $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, $0 < a \; < b$, $0 < c < d$, a hyperbolickým paraboloidem $z = \frac{xy}{m}$, $m > 0$.

Výsledky:

$$\text{a) } v(V) = \frac{a^3 b}{6p} + \frac{ab^3}{6q}, \quad \text{b) } \frac{1}{4m}(b^2 - a^2)(d^2 - c^2)\,.$$

2. Jsou dána zobrazení

a) $\alpha \, : \, (0, \infty) \times (0, 2\pi) \ni (\varrho, \varphi) \to \alpha(\varrho, \varphi) = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$,

b) $\alpha \, : \, (0, R) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \ni (r, \vartheta, \varphi) \to \alpha(r, \vartheta, \varphi) = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$.

V obou případech zjistěte, zda je dané zobrazení vzájemně jednoznačné a určete inverzní zobrazení. Rozhodněte, zda jsou tato zobrazení vzájemně diferencovatelná. Určete v obou případech Jacobiho matici zobrazení α a Jacobiho matici inverzního zobrazení, tj. $D\alpha(\varrho, \varphi)$, resp. $D\alpha(r, \vartheta, \varphi)$ a $D\alpha^{-1}(x, y)$, resp. $D\alpha^{-1}(x, y, z)$. Určete také množinu $\alpha(A)$, kde A je definiční obor zobrazení α, specifikovaný v zadání.
Výsledek a): Zobrazení α je vzájemně jednoznačné $\alpha(A) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y \neq 0 \text{ pro } x \geq 0\}$. Platí

$$D\alpha(\varrho, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\varrho\sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \det D\alpha = \varrho\,,$$

$$D\alpha^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \quad \det D\alpha^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Zobrazení α je také vzájemně diferencovatelné.
Výsledek b): Zobrazení α je vzájemně jednoznačné $\alpha(A) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 < R^2, \; y \neq 0 \text{ pro } x \geq 0\}$. Platí

$$D\alpha(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi & \cos\vartheta \\ r\cos\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta \\ -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det D\alpha = r^2 \sin\vartheta\,,$$

$$D\alpha^{-1}(x,\,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+z^2)} & \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+z^2)} & \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det D\alpha^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

Zobrazení α je také vzájemně diferencovatelné.

3. Určete souřadnice těžiště části homogenního elipsoidu se středem v počátku soustavy souřadnic o poloosách a, b a c, ležící v prvním oktantu soustavy souřadnic.
Návod: Použijte zobecněných sférických souřadnic

$$\alpha : [0,\,1] \times \left[0,\,\frac{\pi}{2}\right] \times \left[0,\,\frac{\pi}{2}\right] \ni (r,\,\vartheta,\,\varphi) \longrightarrow \alpha(r,\,\vartheta,\,\varphi) = (x,\,y,\,z)\,,$$

kde $x = ar\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = br\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = cr\cos\vartheta$.
Výsledek: $T = \frac{3}{8}(a,\,b,\,c)$.

4. Určete polohu těžiště (středu hmotnosti) homogenního tělesa V ohraničeného plochami o rovnicích $x^2+y^2 = 2az$, $x^2+y^2+z^2 = 3a^2$, $a > 0$.
Návod: Použijte válcové souřadnice.
Výsledek: $T = \left(0,\,0,\,\frac{5a(6\sqrt{3}+5)}{83}\right)$.

5. Určete hmotnost a polohu středu hmotnosti tělesa (koule) ohraničeného kulovou plochou $x^2+y^2+z^2 = 2az$, $a > 0$, jehož hustota je dána funkcí $s = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $k > 0$ je konstanta. Vadí, že v bodě $(0,\,0,\,0)$ není hustota definována?
Návod: Použijte kulových souřadnic a integrace s proměnnou mezí proměnné r.
Výsledek: $m = \frac{4}{3}\pi a^2 k$, $T = \left(0,\,0,\,\frac{4}{5}a\right)$.

6. Vypočtěte geometrické a fyzikální charakteristiky (plošný obsah, hmotnost, souřadnice středu hmotnosti, momenty setrvačnosti vzhledem k osám x, y, z) následujících rovinných útvarů:

a) útvar omezený křivkami $y = x^2$, $y = 3x^2$, $y = 2x^{-1}$, $y = 4x^{-1}$, plošná hustota $\sigma = \text{konst.}$,

b) útvar omezený křivkami ad a), hustota $\sigma = kxy$, kde $k = 1\,\text{kg}\,\text{m}^{-4}$ je rozměrová konstanta,

c) útvar omezený v prvním kvadrantu křivkami $y = x$, $y = 2x$, $y = 2x^{-2}$, $y = 4x^{-2}$, plošná hustota $\sigma = \text{konst.}$,

d) útvar omezený křivkami ad c), hustota $\sigma = kxy$, kde $k = 1\,\mathrm{kg\,m^{-4}}$ je rozměrová konstanta,

e) homogenní kruhová výseč s konstantní plošnou hustotou σ a poloměrem R vymezená úhlem $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$,

f) kruhová výseč ad e) s plošnou hustotou $\sigma = k\varrho$, kde $k = 1\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$,

g) výseč mezikruží o poloměrech r a R vymezená úhlem $\varphi \in [0,\ \frac{\pi}{4}]$, s plošnou hustotou $\sigma = kx$, $k = 1\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ je rozměrová konstanta.

Výsledky:

a) $S = \frac{2}{3}\ln 3$, $m = \frac{2}{3}\sigma\ln 3$, $T = \left[\frac{9}{4\ln 3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\left(2\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right),\ \frac{9}{5\ln 3}\left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left(2\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}\right)\right]$, $J_x = \frac{6\sigma}{7}\left(\sqrt[3]{9}-1\right)\left(4\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{(2)}\right)$, $J_y = \frac{3\sigma}{5}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)\left(2\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}\right)$, $J_z = J_x + J_y$,

b) $S = \frac{2}{3}\ln 3$, $m = 2k\ln 3$, $T = \left[\frac{6k}{7\ln 3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\left(4\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right),\ \frac{3k}{4\ln 3}\left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left(4\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}\right)\right]$, $J_x = \frac{6k}{5}\left(\sqrt[3]{9}-1\right)\left(8\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)$, $J_y = \frac{3k}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)\left(4\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}\right)$, $J_z = J_x + J_y$,

c) $S = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}\right)$, $m = \sigma S$, $T = \left[\frac{4}{9}\frac{\ln 2}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}\right)},\ \frac{4}{9}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}\right)}\right]$, $J_x = \frac{3\sigma}{10}\left(2\sqrt[3]{4}-1\right)\left(2\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)$, $J_y = \frac{3\sigma}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\left(2\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)$, $J_z = J_x + J_y$,

d) $S = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}\right)$, $m = \frac{3k}{4}\left(\sqrt[3]{4}-1\right)\left(2\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)$, $T = \left[\frac{6k}{5m}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(2\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}\right),\ \frac{3k}{10m}\left(2\sqrt[3]{2}-1\right)\left(2\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}\right)\right]$, $J_x = 3k$, $J_y = 2k\ln 2$, $J_z = J_x + J_y$,

e) $S = \frac{1}{4}\pi R^2$, $m = \frac{\sigma}{4}\pi R^2$, $T = \left[\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}R,\ 0\right]$, $J_x = \frac{1}{8}\sigma R^4\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$, $J_y = \frac{1}{8}\sigma R^4\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$, $J_z = J_x + J_y = \frac{1}{8}\sigma\pi R^4$,

f) $S = \frac{1}{4}\pi R^2$, $m = \frac{1}{6}k\pi R^3$, $T = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2\pi}R,\ 0\right]$, $J_x = \frac{1}{10}kR^5\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$, $J_y = \frac{1}{10}kR^5\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$, $J_z = J_x + J_y = \frac{1}{10}k\pi R^5$,

g) $S = \frac{1}{8}\pi(R^2-r^2)$, $m = \frac{k\sqrt{2}}{6}(R^3-r^3)$, $T = \left[\frac{k}{16m}(R^4-r^4)\left(\frac{\pi}{2}+1\right),\ \frac{k}{16m}(R^4-r^4)\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]$, $J_x = \frac{\sqrt{2}}{60}k(R^5-r^5)$, $J_y = \frac{\sqrt{2}}{12}k(R^5-r^5)$, $J_z = J_x + J_y = \frac{\sqrt{2}}{10}k(R^5-r^5)$.

7. Vypočtěte geometrické a fyzikální charakteristiky (objem, hmotnost, souřadnice středu hmotnosti, tenzor momentu setrvačnosti) následujících prostorových útvarů (polohu středu hmotnosti a složky tenzoru momentu setrvačnosti počítejte vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic, v níž jsou zadány rovnice útvarů):

a) homogenní kužel s hustotou s omezený plochami $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ a $z = h$,

b) nehomogenní kužel s hustotou $s(x,\,y,\,z) = k\sqrt{x^2+y^2}$ omezený plochami ad a), k je rozměrová konstanta jednotkové hodnoty,

c) homogenní koule o rovnici $x^2+y^2+z^2 = R^2$,

d) nehomogenní koule o rovnici ad c) s rozložením hmotnosti daným hustotou $s(x,\,y,\,z) = k|z|$, kde k je rozměrová konstanta jednotkové hodnoty,

e) horní polovina homogenního anuloidu s hustotou $s =$ konst.,

f) horní polovina nehomogenního anuloidu s rozložením hmotnosti zadaným hustotou $s(x,\,y,\,z) = k\sqrt{x^2+y^2}$, kde k je rozměrová konstanta jednotkové hodnoty,

g) homogenní rotační paraboloid s hustotou s, omezený plochami $z = \frac{h}{R^2}(x^2+y^2)$, $z = h$,

h) homogenní elipsoid se středem v počátku soustavy souřadnic a osami podél os soustavy souřadnic x, y z, délky poloos jsou po řadě a, b, c, a hustota útvaru je s. (Použijte zobecněné kulové souřadnice).

Výsledky: Deviační momenty (mimodiagonální složky tenzoru momentu setrvačnosti) jsou ve všech případech nulové.

a) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, $m = \frac{1}{3}s\pi R^2 h$, $T = \left(0,\,0,\,\frac{3}{4}h\right)$, $J_{11} = J_{22} = \frac{1}{20}s\pi h R^4 + \frac{1}{5}s\pi h^3 R^2$, $J_{33} = \frac{1}{10}s\pi h R^4$,

b) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, $m = \frac{1}{6}\pi k h R^3$, $T = (0,\,0,\,\frac{4}{5}h)$, $J_{11} = J_{22} = \frac{1}{30}\pi k\ hR^5 + \frac{1}{9}\pi k\ h^3 R^3$, $J_{33} = \frac{1}{15}\pi k\ hR^5$,

c) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $m = \frac{4}{3}\pi s R^3$, $T = (0,\,0,\,0)$, $J_{11} = J_{22} = J_{33} = \frac{2}{5}mR^2$,

d) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $m = \frac{1}{2}\pi k\ R^4$, $T = (0,\,0,\,0)$, $J_{11} = J_{22} = \frac{1}{4}\pi k R^6$, $J_{33} = \frac{1}{6}\pi k\ R^6$,

e) $V = \pi^2 r^2 R$, $m = \pi^2 s r^2 R$, $T = \left(0,\,0,\,\frac{4r}{3\pi}\right)$, $J_{11} = J_{22} = \frac{1}{8}\pi^2 s R r^2(4R^2 + 5r^2)$, $J_{33} = \pi^2 s R r^2\left(R^2 + \frac{3}{4}r^2\right)$,

f) $V = \pi^2 r^2 R$, $m = \frac{1}{4}\pi^2 k r^2(4R^2 + r^2)$, $T = \left[0,\,0,\,\frac{4}{15m}\pi k\ r^3(5R^2 + r^2)\right]$,
$J_{11} = J_{22} = \frac{1}{2}\pi^2 k r^2\left(R^4 + 2R^2 r^2 + \frac{5}{24}r^4\right)$, $J_{33} = \pi^2 k R^2\left(R^4 + \frac{3}{2}R^2 r^2 + \frac{1}{8}r^4\right)$,

g) $V = \frac{1}{2}\pi R^2 h$, $m = \frac{1}{2}s\pi R^2 h$, $T = \left(0{,}0,\,\frac{2}{3}h\right)$, $J_{11} = J_{22} = \frac{1}{12}\pi s h R^2(R^2 + 3h^2) = \frac{1}{6}m(R^2 + 3h^2)$, $J_{33} = \frac{1}{6}\pi s h R^4 = \frac{1}{3}mR^2$,

h) $V = \frac{4}{3}\pi abc$, $m = \frac{4}{3}s\pi abc$, $T = (0,\,0,\,0)$, $J_{11} = \frac{4}{15}\pi sabc(b^2 + c^2)$, $J_{22} = \frac{4}{15}\pi sabc(a^2 + c^2)$, $J_{33} = \frac{4}{15}\pi sabc(a^2 + b^2)$.

8. Určete velikost gravitační síly, kterou působí koule o hustotě $s =$ konst. a poloměru R na bod X jednotkové hmotnosti umístěné ve vzdálenosti $a \geq 0$ od středu koule.
Návod: Zvolte počátek soustavy souřadnic ve středu koule. Osu z jako spojnici počátku soustavy souřadnic a bodu X. Ten pak bude mít polohový vektor $\vec{r}_X = (0,\, 0,\, a)$. Gravitační síla, jíž působí koule na bod X, je

$$\vec{F} = Gs \int\limits_V \frac{\vec{r} - \vec{r}_X}{|\vec{r} - \vec{r}_X|^3} \, \mathrm{d}V \,,$$

kde $G = 6{,}67 \cdot 10^{11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ je univerzální gravitační konstanta. Rozepište výraz do složek a při integraci použijte kulových souřadnic.
Výsledek: pro $a \geq R$ je $\vec{F} = \left(0,\, 0,\, -\frac{4}{3}\pi G s R^3 \cdot \frac{1}{a^2}\right)$, pro $a \leq R$ je $\vec{F} = \left(0,\, 0,\, -\frac{4}{3}\pi G s a\right)$.

2 Cvičení

1. Vypočtěte práci po křivce $\mathcal{C}$, když je zadán výraz pro elementární práci ω nebo silové pole $\vec{F}$. V případě, že parametrizace křivky není zadána, zvolte ji sami:

a) $\mathcal{C} = \{(x,\, y) \in \mathbf{R}^2, y = x^2,\ x \in [0,\, 2]\}$, $\omega = (x + y)\,\mathrm{d}y$,

b) $\mathcal{C} : [0,\, 2\pi] \ni t \to (x\mathcal{C}(t),\, y\mathcal{C}(t)) \in \mathbf{R}^2$, $x\mathcal{C}(t) = a(t - \sin t)$, $y\mathcal{C}(t) = a(1 - \cos t)$, $a > 0$ je konstanta, $\omega = y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$, ($\mathcal{C}$ je oblouk cykloidy),

c) $\mathcal{C} : [-2,\, -1] \ni t \to (x\mathcal{C}(t),\, y\mathcal{C}(t)) \in \mathbf{R}^2$,

$$x\mathcal{C}(t) = \frac{3at}{t^3 + 1}, \quad y\mathcal{C}(t) = \frac{3at^2}{t^3 + 1}, \quad t \neq -1, \quad \omega = \frac{\mathrm{d}x}{y^2} - \frac{\mathrm{d}y}{x^2},$$

(křivka $\mathcal{C}$ je Descartův list),

d) $\mathcal{C} = \{(x,\, y) \in \mathbf{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, křivku orientujte v kladném geometrickém smyslu, $\vec{F} = (x - y,\, x - y)$,

e) Porovnejte hodnoty křivkového integrálu pro práci, $\vec{F} = \left(x(x^2+y^2),\, y(x^2+y^2)\right)$, po částech křivek

$$\mathcal{C}_1 = \{(x,\, y) \in \mathbf{R}^2, y = 1 - x\}, \quad \mathcal{C}_2 = \{(x,\, y) \in \mathbf{R}^2, y = \sqrt{1 - x^2}\},$$

$$\mathcal{C}_3 = \text{části souřadnicových os}\,,$$

spojujících body $A = (1,\, 0)$ (počáteční bod) a $B = (0,\, 1)$ (koncový bod),

f) Porovnejte hodnoty integrálu pro práci, $\vec{F} = (0,\, 0,\, \frac{1}{x^2+y^2})$ po křivce $\mathcal{C}$: $t \to \left(x\mathcal{C}(t),\, y\mathcal{C}(t)\right) \in R^3$, $x\mathcal{C}(t) = a\cos t$, $y\mathcal{C}(t) = a\sin t$, $z\mathcal{C}(t) = bt$, $a > 0$, $b > 0$ jsou konstanty, spojující body $A = (a,\, 0,\, 0)$ a $B = \left(0,\, a,\, \frac{\pi b}{2}\right)$ s integrálem po úsečce AB,

g) Zvolte číslo $\alpha \geq 1$ tak, aby práce síly $\vec{F} = \big(0, (x - \frac{1}{2})^2\big)$ po křivce $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y = x^\alpha\}$ z bodu $A = (0, 0)$ do bodu $B = (1, 1)$ byla minimální,

h) $\mathcal{C}$ je úsečka v rovině spojující body $A = (a, 0)$ a $B = (0, b)$, $\omega = x\,\mathrm{d}y$,

i) $\mathcal{C}$ je úsečka v rovině spojující body $A = (0, \pi)$ a $B = (\pi, 0)$, $\omega = \sin y\,\mathrm{d}x + \sin x\,\mathrm{d}y$,

j) $\mathcal{C}$ je lomená čára $OABC$ v $\mathbf{R}^3$, $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 1, 1)$, $\omega = z\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$,

k) $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y = \sqrt{R^2 - x^2}\}$, počáteční bod $A = (R, 0)$, koncový bod $B = (0, R)$, $\omega = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$,

l) $\mathcal{C} : \big[0, \frac{\pi}{2}\big] \ni t \to \big(x\mathcal{C}(t), y\mathcal{C}(t)\big) \in \mathbf{R}^2$, $x\mathcal{C}(t) = R\cos^3 t$, $y\mathcal{C}(t) = R\sin^3 t$ (čtvrtina asteroidy), počáteční bod $A = (R, 0)$, $\omega = \frac{x^2\,\mathrm{d}y - y^2\,\mathrm{d}x}{x^{5/3} + y^{5/3}}$,

m) určete práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (y, 1)$ po uzavřené křivce složené z částí os souřadnic a oblouku $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + 2y^2 = 1\}$ v prvním kvadrantu, křivka je orientována v kladném geometrickém smyslu,

n) určete práci, kterou vykoná síla $\vec{F} = (y, -x)$ po křivce $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y = 1 - x^2\}$ z bodu $A = (-1, 0)$ do bodu $B = (0, 1)$,

o) určete práci silového pole $\vec{F}$ po čtvrtině kružnice v prvním kvadrantu soustavy souřadnic xy, střed v počátku soustavy souřadnic, poloměr R, orientace po směru hodinových ručiček, vektor $\vec{F}$ směřuje v každém bodě podél kladné osy x a má konstantní velikost F,

p) určete práci silového pole $\vec{F} = (xy, x + y)$ v rovině xy po křivce $\mathcal{C}$, je-li $\mathcal{C}$ p1) úsečka spojující body $O = (0, 0)$ a $B = (1, 1)$, p2) oblouk paraboly $y = x^2$ spojující tytéž body jako v úloze p1), tj. $O = (0, 0)$ a $B = (1, 1)$, p3) lomená čára tvořená úsečkou $\overrightarrow{OC}$ a úsečkou $\overrightarrow{CB}$, kde $O = (0, 0)$, $C = (1, 0)$, $B = (1, 1)$, p4) lomená čára tvořená úsečkou $\overrightarrow{OD}$ a úsečkou $\overrightarrow{DB}$, kde $O = (0, 0)$, $D = (0, 1)$, $B = (1, 1)$,

q) určete práci silového pole $\vec{F}$ v rovině xy po křivce $\mathcal{C}$, jíž je q1) oblouk elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ v prvním kvadrantu soustavy souřadnic, orientace v kladném smyslu, q2) celá tato elipsa, orientace v kladném smyslu, vektor $\vec{F}$ směřuje v každém bodě do počátku soustavy souřadnic a jeho velikost je číselně rovna vzdálenosti působiště (bodu umístění vektoru $\vec{F}$) od počátku soustavy souřadnic,

r) určete práci silového pole $\vec{F}$ v rovině xy po křivce $\mathcal{C}$, jíž je úsečka spojující body $B = (a, b, c)$ a $C = (2a, 2b, 2c)$, vektor $\vec{F}$ směřuje v každém bodě do počátku soustavy souřadnic a jeho velikost je nepřímo úměrná vzdálenosti působiště od roviny $z = 0$, $a, b, c > 0$,

s) určete práci silového pole $\vec{F}$ v $\mathbf{R}^3$ po křivce $\mathcal{C}$, jíž je oblouk kružnice o parametrických rovnicích $x = \cos t$, $y = 1$, $z = \sin t$ mezi body $M = (1, 1, 0)$ (počáteční bod) a $N = (0, 1, 1)$ (koncový bod), vektor $\vec{F}$ směřuje v každém bodě k ose z a je na ni kolmý, jeho velikost je nepřímo úměrná vzdálenosti působiště od osy z,

t) v následujících situacích dokažte konzervativnost zadaných silových polí v rovině xy či prostoru $\mathbf{R}^3$ (nezávislost práce na tvaru křivky spojující dva zadané body M a N), tuto práci vypočtěte (výpočet proveďte jednak stanovením funkce U, pro niž je $\mathrm{d}U = \omega_F^{(1)}$, jednak přímou integrací formy po vhodně zvolené křivce spojující body M a N, výsledek nebude záviset na volbě křivky): t1) $\vec{F} = (2\alpha xy,\, \beta x^2)$ (α a β jsou tzv. rozměrové konstanty, jejichž hodnota je 1, pouze zajišťují správný fyzikální rozměr veličiny, v dalších zadáních je nebudeme uvádět), $M = (1, 0)$, $N = (0, 3)$, t2) $\vec{F} = (0, 0, -mg)$, $m, g > 0$ jsou konstanty $M = (x_M, y_M, z_M)$, $N = (x_N, y_N, z_N)$, t3) $\vec{F} = \left(-\frac{\mu x}{r^3}, -\frac{-\mu y}{r^3}, -\frac{\mu z}{r^3}\right)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\mu > 0$, $M = (a, b, c)$, $r_N \to \infty$, t4) $\vec{F} = -k^2(x, y, z)$, $M = (x_M, y_M, z_M)$, $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = R^2$, $N = (x_N, y_N, z_N)$, $x_N^2 + y_N^2 + z_N^2 = r^2$, $R > r$, t5) $\vec{F} = \left(-\frac{y}{(x-y)^2}, \frac{x}{(x-y)^2}\right)$, $M = (0, -1)$, $N = (1, 0)$, oblouk neprotíná přímku $y = x$ (zdůvodněte), t6) $\vec{F} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)$, $M = (0, 0)$, $N = (1, 1)$, t7) $\vec{F} = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$, $M = (1, 1, 1)$, $N = (x_0, y_0, 1)$, křivka i body M, N leží v oblasti vymezené nerovnostmi $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Výsledky: a) $\frac{40}{3}$, b) $6\pi a^2$, c) $\frac{1}{3a}\left(4\ln 2 + \frac{63}{24}\right)$, d) $2\pi ab$, e) všechny tři integrály jsou nulové, f) integrál po křivce $\mathcal{C}$ je $\frac{\pi b}{2a^2}$, integrál po úsečce AB je $\frac{\pi^2 b}{4a^2}$, g) $\alpha = \sqrt{2}$, h) $\frac{ab}{2}$, i) 0, j) $\frac{3}{2}$, k) 0, l) $\frac{3\pi}{16}R^{4/3}$, m) $-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$, n) $\frac{4}{3}$, o) $A = -FR$, p1) $A_1 = \frac{4}{3}$, p2) $A_2 = \frac{17}{12}$, p3) $A_3 = \frac{3}{2}$, p4) $A_4 = 1$, q1) $A_1 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$, q2) $A_2 = 0$, r) $-\frac{k}{c}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ln 2$, k je konstanta úměrnosti vystupující ve vyjádření velikosti síly $\vec{F}$, s) $A = \frac{k}{2}\ln 2$, t1) 0, t2) $mg(z_M - z_N)$, t3) $-\frac{\mu}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, pro $\mu = Gm_1m_2$, kde $G \doteq 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ je gravitační konstanta, má tato práce význam gravitační potenciální energie soustavy tvořené částicemi o hmotnostech m_1 a m_2, t4) $\frac{1}{2}k^2(R^2 - r^2)$, t5) 1, t6) $1 + \sqrt{2}$, t7) $\ln x_0 y_0$.

2. Řešte následující úlohy (plošný integrál druhého druhu). Není-li zadána parametrizace integračního oboru, vhodně ji zvolte. Integrály počítejte přímo (nikoli pomocí Greenovy věty).

a) Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (x^2, y^2, xyz)$ povrchem krychle $[0, 1]^3 \subset \mathbf{R}^3$ orientovaným vnější normálou.

b) Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (0, 0, x^2y^2z^2)$ dolní polovinou kulové plochy

$S = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbf{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ orientované normálou směřující ven z objemu, který by byl obepnutý celou kulovou plochou.

c) Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (x,\, y^2,\, yz)$ pláštěm kužele $S = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbf{R}^3, \frac{x^2+y^2}{R^2} = \frac{(z-h)^2}{h^2},\, 0 \le z \le h\}$ orientovaného normálou směřující ven z objemu kužele.

d) Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = r^2\, \vec{r}, \vec{r} = (x,\, y,\, z)$, povrchem čtyřstěnu o vrcholech
$A = (-\frac{a}{6}\sqrt{3},\, \frac{a}{2},\, 0), B = (-\frac{a}{6}\sqrt{3},\, -\frac{a}{2},\, 0), C = (\frac{a}{3}\sqrt{3},\, 0,\, 0), D = (0,\, 0,\, a\sqrt{\frac{2}{3}})$.
Povrch je orientován vnější normálou.

e) Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (x,\, y,\, z)$ dolní polovinou kulové plochy o poloměru R, která se dotýká souřadnicové roviny xy v počátku soustavy souřadnic. Plocha je orientována normálou směřující ven z objemu, který obepíná celá kulová plocha.

f) Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (xy,\, yz,\, xz)$ povrchem čtyřstěnu určeného rovinami $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ a $x + y + z = 1$, orientovaného vnější normálou.

g) Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (y - z,\, z - x,\, x - y)$ částí kuželové plochy o rovnici $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z \le 1$, orientované normálou směřující dovnitř objemu kužele.

h) Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (x,\, y,\, z)$ částí roviny o rovnici $x+y+z = a$, kde $a > 0$ je konstanta, v prvním oktantu soustavy souřadnic. Rovina je orientována normálou směřující do poloroviny obsahující počátek soustavy souřadnic.

i) Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (x^3,\, y^3,\, z^3)$ kulovou plochou $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ orientovanou vnější normálou.

j) Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (xz,\, x^2y,\, y^2z)$ částí válcové plochy o rovnici $x^2 + y^2 = 1$ omezené nerovnostmi $x \ge 0,\ y \ge 0,\ 1 \ge z \ge 0$ a orientované normálou směřující ven z objemu válce.

Výsledky: a) $\frac{9}{4}$, b) $-\frac{\pi^2 R^8}{96}$, c) $\frac{1}{3}\pi R^2 h$, d) $-\frac{a^5\sqrt{2}}{81}$, e) πR^3, f) $\frac{1}{8}$, g) 0, h) $-\frac{1}{2}a^3$, i) $\frac{12}{5}\pi R^5$, j) $\frac{3}{16}\pi$.

3. Vypočtěte následující křivkové integrály prvního druhu po rovinných křivkách. Objemový element (element délky) je značen $\mathrm{d}l$. Není-li uvedena parametrizace křivky, parametrizujte ji. Výsledek integrace nebude na parametrizaci záviset. Některé integrály mohou být nevlastní.

a) $\int\limits_{\mathcal{C}} xy\,\mathrm{d}l,\ \mathcal{C} = \partial A$ (hranice), $A = \{(x,\, y) \in \mathbf{R}^2, |x| + |y| \le a\},\ a > 0$ je konstanta,

b) $\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, kde $\mathcal{C}$ je úsečka spojující body $O = (0,\,0)$ a $A = (1,\,2)$,

c) $\int\limits_{\mathcal{C}} xy\,\mathrm{d}l$, kde $\mathcal{C}$ je čtvrtina elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ v prvním kvadrantu soustavy souřadnic,

d) $\int\limits_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}l$, kde $\mathcal{C}$ je *evolventa kružnice*, parametrizovaná rovnicemi $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $a > 0$ je konstanta, $t \in [0,\,2\pi]$,

e) $\int\limits_{\mathcal{C}} y^2\,\mathrm{d}l$, $\mathcal{C}$ je prvý oblouk cykloidy o parametrických rovnicích $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $a > 0$ je konstanta, $t \in [0,\,2\pi]$,

f) $\int\limits_{\mathcal{C}} (x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}l$, $\mathcal{C}$ je oblouk *logaritmické spirály* $\varrho = a\exp(m\varphi)$, $a,\, m > 0$, mezi body $A = (a, 0)$ a $O = (0,\,0)$, ϱ a φ jsou polární souřadnice,

g) $\int\limits_{\mathcal{C}} (x+y)\,\mathrm{d}l$, $\mathcal{C}$ je pravý list *lemniskaty* $\varrho^2 = a^2\cos 2\varphi$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4},\,\frac{\pi}{4}\right]$, ϱ a φ jsou polární souřadnice.

h) $\int\limits_{\mathcal{C}} xy\,\mathrm{d}l$, $\mathcal{C}$ je oblouk kružnice $x^2+y^2 = R^2$ v prvním kvadrantu soustavy souřadnic, výsledek porovnejte s výsledkem části c) této úlohy,

i) $\int\limits_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}l$, $\mathcal{C}$ je křivka o kartézské rovnici $y = \frac{3}{8}x^2$, $x \in [0,\,4]$.

Výsledky: a) 0, b) $\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, c) $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$, d) $\frac{a^2}{3}\left[(1+4\pi^2)^{3/2}-1\right]$, e) $\frac{256}{15}a^3$, f) $-\frac{a^5\sqrt{1+m^2}}{5m}$, g) $a^2\sqrt{2}$, h) $\frac{1}{2}R^3$, i) $\frac{16}{27}(10\sqrt{10}-1)$.

4. Vypočtěte následující křivkové integrály prvního druhu po prostorových křivkách v $\mathbf{R}^3$. Objemový element (element délky) je značen $\mathrm{d}l$. Není-li uvedena parametrizace křivky, parametrizujte ji. Některé integrály mohou být nevlastní.

a) $\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}l}{x^2+y^2+z^2}$, $\mathcal{C}$ je oblouk šroubovice parametrizované rovnicemi $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $a, b > 0$ jsou konstanty, $t \in [0,\,2\pi]$,

b) $\int\limits_{\mathcal{C}} yz\,\mathrm{d}l$, $\mathcal{C}$ je oblouk šroubovice z části a) této úlohy,

c) $\int\limits_{\mathcal{C}} (x+z)\,\mathrm{d}l$, křivka $\mathcal{C}$ je parametrizována rovnicemi $x = t$, $y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z = t^3$, $t \in [0,\,1]$,

d) $\int\limits_{\mathcal{C}} \sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}l$, $\mathcal{C}$ je průsečnice ploch $x^2+y^2+z^2 = a^2$ a $x - y = 0$,

e) $\int\limits_{\mathcal{C}} \mathrm{d}l$, $\mathcal{C}$ je oblouk *kuželové šroubovice* $x = a\,\mathrm{e}^t\cos t$, $a\,\mathrm{e}^t\sin t$, $z = a\,\mathrm{e}^t$, $a > 0$ je konstanta, mezi body $O = (0,\,0,\,0)$ a $A = (a,\,0,\,a)$,

f) $\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{a}}\,\mathrm{d}l$, $\mathcal{C}$ je křivka o rovnici $y^2 = 2px$, $y \in [0,\, p]$,

g) $\int\limits_{\mathcal{C}} xy\,\mathrm{d}l$, $\mathcal{C}$ je obvod obdélníka $OABC$, $O = (0,\, 0)$, $A = (4,\, 0)$, $B = (4,\, 2)$, $C = (0,\, 2)$,

h) $\int\limits_{\mathcal{C}} xy\,\mathrm{d}l$, $\mathcal{C}$ je oblouk hypeboly $x = \cosh t$, $y = \sinh t$, $0 < t < \frac{1}{2}\mathrm{arcosh}\,4$,

i) $\int\limits_{\mathcal{C}} (x+y)\,\mathrm{d}l$, $\mathcal{C}$ je obvod trojúhelníka ABC v souřadnicové rovině xy, $A = (0,\, 0)$, $B = (1,\, 0)$, $C = (0,\, 1)$,

j) $\int\limits_{\mathcal{C}} x^2\,\mathrm{d}l$, $\mathcal{C}$ je kružnice v $\mathbf{R}^3$, vzniklá jako průsečnice ploch $x^2+y^2+z^2 = R^2$ a $x+y+z = 0$,

k) $\int\limits_{\mathcal{C}} \left(R + \frac{x^2}{R}\right)\mathrm{d}l$, kde $\mathcal{C}$ je kružnice v rovině xy se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem R; ukažte, že hodnota integrálu je číselně rovna obsahu části pláště válce $x^2 + y^2 = R^2$ ohraničené rovinou $z = 0$ a plochou $z = R + \frac{x^2}{R}$.

Výsledky: a) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\pi b}{a}$, b) $-2\pi ab\sqrt{a^2+b^2}$, c) $\frac{56\sqrt{7}-1}{54}$, d) $2\pi a^2$, e) $a\sqrt{3}$, f) $\sqrt{\frac{2p^5}{a}}\,\frac{1+\sqrt{2}}{30}$, g) 24, h) $\frac{7}{6}$, i) $1+\sqrt{2}$, j) $\frac{2}{3}\pi R^3$, k) $3\pi R^2$.

5. Vypočtěte určené geometrické a fyzikální charakteristiky drátů (drát je popsán křivkou $\mathcal{C}$). Není-li řečeno jinak, považujte drát za homogenní a jeho lineární hustotu berte pro jednoduchost jako jednotkovou, $s(x,\, y) = 1$ (rovinné dráty), resp. $s(x,\, y,\, z) = 1$ (prostorové dráty). Rozměrové konstanty (veličiny jednotkové hodnoty sloužící pouze k zajištění správného fyzikálního rozměru) nevypisujeme, podobně jako v úlohách o práci silových polí.

a) statický moment $M_x = \int\limits_{\mathcal{C}} y\,\mathrm{d}l$ vzhledem k ose x, $\mathcal{C}$ je polovina elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ležící v horní polorovině soustavy souřadnic,

b) poloha středu hmotnosti půlkružnice se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem R ležící horní polorovině soustavy souřadnic,

c) hmotnost, polohu středu hmotnosti a moment setrvačnosti vzhledem k ose x jednoho oblouku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$, $t \in [0,\, 2\pi]$,

d) souřadnice středu hmotnosti poloviny oblouku cykloidy z části c) této úlohy, tj. $t \in [0,\, \pi]$,

e) hmotnost elipsy $\mathcal{C}$ o rovnici $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, jejíž lineární hustota je dána funkcí $s(x,\, y) = |y|$,

f) momenty setrvačnosti prvého závitu šroubovice $\mathcal{C}$ o parametrických rovnicích $a = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = bt$, $t \in [0,\, 2\pi]$, vzhledem k souřadnicovým osám x, y a z,

g) hmotnost prvého závitu šroubovice z části f) této úlohy, je-li lineární hustota v daném bodě úměrná vzdálenosti tohoto bodu od počátku soustavy souřadnic,

h) hmotnost a polohu středu hmotnosti oblouku křivky o kartézské rovnici $y = \frac{a^2-x^2}{2a}$, $a > 0$ je konstanta, ležícího v horní polorovině soustavy souřadnic,

i) moment setrvačnosti kružnice o poloměru R vzhledem k jejímu průměru,

j) hmotnost oblouku Archimédovy spirály $\varrho = a\varphi$, $a > 0$, s lineární hustotou $s = \alpha\varphi$, $\alpha > 0$, $\varphi \in [0,\, 2n\pi]$, $n \in \mathbf{Z}$,

k) délku hladké křivky $\mathcal{C}$, jejíž rovnice v polárních souřadnicích je $\varrho = f(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1,\, \varphi_2]$ (odvoďte obecný vztah pro výpočet této délky pomocí integrálu podle proměnné φ),

l) polohu středu hmotnosti kardioidy $\varrho = a(1-\cos\varphi)$, $a > 0$, $\varphi \in [0,\, 2\pi]$,

m) statický moment poloviny lemniskáty $\varrho = \sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4},\, \frac{\pi}{4}\right]$ vzhledem k ose y, tj. integrál $M_y = \int\limits_{\mathcal{C}} x\,\mathrm{d}l$,

n) hmotnost prvého závitu šroubovice z části f) této úlohy, je-li lineární hustota popsána funkcí $s(x,\, y,\, z) = (x^2+y^2+z^2)$,

o) délku oblouku kuželové šroubovice $\mathcal{C}$ o parametrických rovnicích $x = a\,\mathrm{e}^t\cos t$, $y = a\,\mathrm{e}^t\sin t$, $z = a\,\mathrm{e}^t$, $a > 0$ je konstanta, mezi body $O = (0,\, 0,\, 0)$ a $B = (a,\, 0,\, a)$.

Výsledky: a) $M_x = b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ pro $a > b$, $M_x = b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}$, pro $b > a$ b) $x_T = 0$, $y_T = \frac{2R}{\pi}$, c) $m = 8a$, $x_T = \pi a$, $y_T = \frac{4a}{3}$, $J_x = \frac{256}{15}a^3$, d) $x_T = \frac{4}{3}a$, $y_T = \frac{4}{3}a$ e) $m = 2\left(b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$, f) $J_x = J_y = \pi\sqrt{R^2+b^2}\,\left(R^2 + \frac{8}{3}\pi^2 b^2\right)$, $J_z = 2\pi R^2\sqrt{R^2+b^2}$,
g) $m = \sqrt{R^2+b^2}\left(\pi\sqrt{R^2+4\pi^2b^2} + \frac{R^2}{2b}\ln\frac{2\pi b+\sqrt{R^2+4\pi^2b^2}}{R}\right)$, h) $m = a\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$, $x_T = 0$, $y_T = \frac{a}{8}\frac{\sqrt{2}+5\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}$, i) $J = \pi R^3$, j) $m = \frac{1}{3}\alpha a\left[(1+4\pi^2n^2)^{3/2} - 1\right]$, k) $l(\mathcal{C}) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[f'(\varphi)]^2 + f^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi$, l) $x_T = -\frac{4}{5}a$, $y_T = 0$, m) $M_y = \sqrt{2}$, n) $m = \sqrt{R^2+b^2}\,\left(2\pi R^2 + \frac{8}{3}\pi^3 b^2\right)$, o) $l = a\sqrt{3}$.

6. Vypočtěte plošné integrály prvního druhu. V případě, že parametrizace plochy S není zadána, parametrizujte plochu vhodným způsobem.

a) $\int\limits_S xy\,\mathrm{d}S$, S je část roviny $x+y+z=1$ ležící v prvním oktantu soustavy souřadnic $\langle O;\, x,\, y,\, z\rangle$,

b) $\int\limits_S \mathrm{d}S$, S je část kulové plochy $x^2+y^2+z^2=R^2$ ležící uvnitř válce $x^2+y^2=Rx$, $z>0$ (hodnota integrálu je rovna obsahu plochy S),

c) $\int\limits_S \mathrm{d}S$, S je část hyperbolické paraboloidální plochy $z=xy$ ležící uvnitř válce $x^2+y^2=1$ a omezená nerovnostmi $x>0$, $y>0$, (hodnota integrálu je rovna obsahu plochy S),

d) $\int xy\,\mathrm{d}S$, S je část rotační paraboloidální plochy $z=\frac{1}{2a}(x^2+y^2)$, $a>0$, ležící v prvním oktantu soustavy souřadnic a současně uvnitř válce $x^2+y^2=R^2$,

e) $\int\limits_S xyz\,\mathrm{d}S$, S je trojúhelník o vrcholech $A=(1,\,0,\,0)$, $B=(0,\,1,\,0)$, $C=(0,\,0,\,1)$,

f) $\int\limits_S \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$, S je povrch čtyřstěnu o vrcholech $O=(0,\,0,\,0)$, $A=(1,\,0,\,0)$, $B=(0,\,1,\,0)$, $C=(0,\,0,\,1)$,

g) $\int \mathrm{d}S$, S je povrch anuloidu vzniklého rotací kružnice $(x-R)^2+z^2=r^2$, $R>r>0$, kolem osy z, (hodnota integrálu je rovna obsahu povrchu), pokuste se získat hodnotu obsahu povrchu pomocí jednoduché geometrické úvahy bez integrování.

Výsledky: a) $\frac{\sqrt{3}}{24}$, b) $R^2(\pi-2)$, c) $\frac{\pi}{6}(\sqrt{8}-1)$, d) $\frac{a^4}{30}\left[\left(\frac{3R^2}{a^2}-2\right)\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right)^{3/2}+2\right]$, e) $\frac{\sqrt{3}}{120}$, f) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$, g) $4\pi^2 rR$.

7. Vypočtěte předepsané geometrické a fyzikální charakteristiky plošných útvarů. V případě, že parametrizace plochy S není zadána, parametrizujte plochu vhodným způsobem. Není-li řečeno jinak, považujte plošnou hustotu útvaru za konstantní a rovnu jedné, $s(x,\,y,\,z)=1$.

a) moment setrvačnosti pláště kužele $Rz=v\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le v$, vzhledem k ose z,

b) poloha středu hmotnosti horní poloviny kulové plochy $x^2+y^2+z^2=R^2$,

c) obsah části dvojdílné hyperboloidální plochy $z^2-x^2-y^2=1$, $1\le z\le\sqrt{2}$,

d) obsah a moment setrvačnosti (vzhledem k ose z) povrchu rotačního anuloidu),

e) moment setrvačnosti povrchu pravidelného čtyřstěnu o straně a vzhledem k ose procházející jeho vrcholem a těžištěm protější strany (pro usnadnění výpočtu zvolte vhodně soustavu souřadnic, abyste mohli využít symetrie útvaru),

f) obsah povrchu rotačního elipsoidu $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$,

g) obsah části plochy $x^2 + y^2 = 2z$ ležící uvnitř válce $x^2 + y^2 = 3$,

h) hmotnost a souřadnici z_T středu hmotnosti části kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ohraničené rovinami $x = 0$, $y = 0$, $x + y = R$ a nerovností $z \geq 0$,

i) moment setrvačnosti kulové plochy o poloměru R vzhledem k ose procházející jejím středem,

j) obsah povrchu koule o poloměru R,

k) obsah pláště kužele o poloměru podstavy r a výšce v,

l) obsah pláště paraboloidu o rovnici $x^2 + y^2 - 2z = 0$, $0 \leq z \leq z_0$.

Výsledky: a) $J_z = \frac{\pi}{2} R^3 \sqrt{R^2 + v^2}$, b) $x_T = y_T = 0$, $z_T = \frac{R}{2}$, c) $P_S = \pi(\sqrt{6} - 1) - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \ln \frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$, d) $P_S = 4\pi^2 rR$, $J_z = 2\pi^2 rR(2R^2 + 3r^2)$, e) $J = \frac{a^4\sqrt{3}}{12}$, f) $P_S = 2\pi a \left[a + \frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right]$ pro $a > b$, $P_S = 2\pi a \left[a + \frac{b^2}{\sqrt{b^2-a^2}} \arcsin \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right]$, g) $P_S = \frac{14\pi}{3}$, h) $m = \frac{\pi R^2}{2}(\sqrt{2} - 1)$, $z_T = \frac{R}{\pi}(\sqrt{2} + 1)$, i) $J = \frac{8}{3}\pi R^4$, j) $4\pi R^2$, k) $\pi r\sqrt{r^2 + v^2}$, l) $\frac{2\pi}{3}\left[(1 + 2z_0)^{3/2} - 1\right]$.

8. Vyjádřete objemový element plochy $\omega_0 = \mathrm{d}S$, která vznikne rotací křivky o polární rovnici $\varrho = f(\varphi)$ kolem osy x. Vypočtěte obsah plochy, která vznikne rotací kardioidy $\varrho = a(1 - \cos\varphi)$, $a > 0$, kolem její osy souměrnosti. Úhel otočení křivky kolem uvedené osy označte $\psi \in [0, 2\pi]$.
Výsledek: $\mathrm{d}S = f(\varphi) \sin\varphi \sqrt{[f'(\varphi)]^2 + f^2(\varphi)}\, \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}\psi$, $P_S = \frac{32}{5}\pi a^2$.

9. Další geometrické a fyzikální aplikace integrálu. Řešte následující fyzikální úlohy:

a) Vypočtěte teplo přijaté ideálním plynem při ději popsaném funkcí $p(V) = aV^2$, $a > 0$ je konstanta, je-li počáteční objem V_1 a koncový V_2. Elementární teplo je dáno formou $\delta Q = \omega = \frac{m}{\mu} C_v \, \mathrm{d}T + p \, \mathrm{d}V$, veličiny p (tlak), V (objem) a T (absolutní teplota) splňují stavovou rovnici $pV = \frac{m}{\mu} RT$, $C_V =$ konst. je molární tepelná kapacita při stálém objemu, m je hmotnost plynu, μ jeho molární hmotnost, R univerzální plynová konstanta.

b) Vypočtěte práci jednoho molu van der Waalsova plynu (stavová rovnice je $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$, a, $b > 0$ jsou konstanty, význam ostatních veličin je stejný jako v části a) této úlohy, při izotermické expanzi (konstantní teplota $T = T_0$) z objemu V_1 na objem V_2; elementární práce je dána formou $\delta A = \omega = p \, \mathrm{d}V$.

c) Určete intenzitu $\vec{H}$ magnetického pole v ohnisku F parabolického drátu o rovnici $x^2 = 2py$, kterým protéká konstantní proud I. Platí $\vec{H} = \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{I}{4\pi} \frac{\vec{r} \times \vec{\tau}}{r^3} \, \mathrm{d}l$, kde $\vec{r}$ je polohový vektor obecného bodu drátu $X = (x, y, z)$ vzhledem k bodu, v němž intenzitu počítáme, a $\vec{\tau}$ je jednotkový vektor tečný k drátu a orientovaný ve směru proudu.

d) Určete velikost intenzity magnetického pole $\vec{H}$ ve vzdálenosti od nekonečného přímého vodiče, jímž protéká konstantní proud I (vzorec pro výpočet intenzity viz část c) této úlohy).

e) Je dána kulová plocha S o poloměru R a ve vzdálenosti v od jejího středu bod M. Označme ξ vzdálenost bodu M od obecného bodu Q na kulové ploše a α úhel, který svírá spojnice QM s vnější normálou k ploše v bodě Q. Vypočtěte integrál $\int\limits_S \frac{\cos\alpha}{\xi^2}\,\mathrm{d}S$ (tzv. *potenciál dvojvrstvy*).

f) Rozložení tlaku v kapalině je dáno funkcí $p(x,\, y,\, z)$. Celková tlaková síla, jíž působí okolní kapalina na část o objemu V o hraniční ploše $S = \partial V$, která je v kapalině libovolně vymezena, je dána integrálem $\vec{F}_S = -\int\limits_c p\vec{n}\,\mathrm{d}S$, kde $\vec{n}$ je vektorové pole vnější normály k ploše S. Dokažte, že platí $\vec{F}_S = (-\int\limits_S p\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,\, -\int\limits_S p\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x,\, -\int\limits_S p\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$. Pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty dokažte, že $\vec{F}_S = \int\limits_V \operatorname{grad} p\,\mathrm{d}V$.

g) Užitím výsledku části f) této úlohy vypočtěte celkovou tlakovou sílu, jíž působí kapalina na vnitřní plášť nádoby $\frac{x^2+y^2}{a^2} = 2z$ naplněné touto kapalinou do výšky h. Hustota kapaliny je $s = \text{konst.}$, rozložení tlaku je dáno funkcí $p(x,\, y,\, z) = p(z) = sg(h-z) + p_0$. Ukažte, že velikost celkové tlakové síly je rovna mg, kde m je hmotnost kapaliny v nádobě. (Situace odpovídá nádobě s kapalinou umístěné v homogenním gravitačním poli o intnzitě $\vec{g} = (0,\, 0,\, -g)$.)

Výsledky: a) $Q = \frac{a}{R}\left(C_V + \frac{R}{3}\right)\left(V_2^3 - V_1^3\right)$, b) $A = RT_0 \ln\frac{V_2-b}{V_1-b} + a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)$, c) $\vec{H} = \left(0,\, 0,\, \frac{I}{2p}\right)$, d) $H = \frac{I}{2\pi d}$, e) 0 pro $v > R$, -4π pro $v < R$, g) $\vec{F}_S = (0,\, 0,\, -\pi sga^2h^2)$.

10. Vypočtěte celkovou tlakovou sílu, kterou působí ideální kapalina o hustotě s na dno, resp. na plášť válcové nádoby o poloměru R a výšce h_0. Řešte tyto situace:

a) Nádoba je umístěna v homogenním gravitačním poli Země o intenzitě (tíhovém zrychlení) $\vec{g}$. Osa nádoby je nesouhlasně rovnoběžná s vektorem $\vec{g}$.

b) Nádoba navíc rotuje stálou úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$ kolem své osy.

Objem kapaliny je v obou případech stejný a rovný $V = \pi R^2 h$, kde $h \leq h_0$. Použijte přímého výpočtu příslušných plošných integrálů tvaru $\vec{F} = \int\limits_S (-p(x,\, y,\, z))\vec{n}\,\mathrm{d}S$, kde funkce $p(x,\, y,\, z)$ určuje rozložení tlaku v kapalině, S je příslušná plocha a $\vec{n}$ vektorové pole normály směřující ven z kapaliny.

Výsledky: a) $\vec{F}_{\text{dno}} = (0,\, 0,\, \pi R^2 p_{\text{at}} + sgV)$, $\vec{F}_{\text{plášť}} = \vec{0}$, b) $\vec{F}_{\text{dno}} = (0,\, 0,\, F)$, $F = \pi R^2 p_{\text{at}} + sgV\left(1 + \frac{\omega^2 R^2}{4gv}\right)\frac{v}{h}$, přičemž v je vzdálenost vrcholu parabolického povrchu rotující kapaliny od dna nádoby.

11. Řešte *vnitřní Dirichletovu úlohu* pro nabitý vodič v elektrostatické rovnováze: máme určit elektrostatický potenciál $\phi(\vec{r})$ uvnitř nabitého vodiče reprezentovaného uzavřenou ohraničenou oblastí $V \subset \mathbf{R}^3$ s hraniční plochou $S = \partial V$ orientovanou vnější normálou. Okrajová podmínka je $\phi|_S = \phi_0 = \text{konst}$. Požadujeme, aby funkce $\phi(\vec{r})$ byla spojitá.
Návod: Uvědomte si, že musí potenciál $\phi(\vec{r})$ splňovat Laplaceovu rovnici $\Delta\phi = 0$. Dále použijte první Greenovy identity a dokažte jednoznačnost řešení.

12. Řešte *Neumannovu úlohu* pro nabitý vodič (uzavřená ohraničená oblast $V \subset \mathbf{R}^3$ s hraniční plochou $S = \partial V$ orientovanou vnější normálou $\vec{n}$) v elektrostatické rovnováze: máme určit intenzitu $\vec{E}$ elektrostatického pole uvnitř a na povrchu nabitého vodiče v elektrostatické rovnováze, je-li dán celkový náboj vodiče Q.
Návod: Na základě vztahu mezi Q a ϕ (v integrálním tvaru) dokažte, že pro potenciál na povrchu vodiče platí $\frac{Q}{\phi_0} = \frac{Q'}{\phi_0'} = C$ (veličina C je *kapacita* vodiče). Pro zjištění vztahu mezi ϕ a celkovým nábojem Q vyjádřete tok vektorového pole $\vec{E}$ plochou S pomocí celkového náboje a užijte vztah mezi $\vec{E}$ a ϕ. Označte $Q' = kQ$ a vyjádřete vztah mezi ϕ, Q a ϕ', Q'. Ukažte, že $\int\limits_S \partial_n \left(k\phi - \phi'\right) \mathrm{d}S = 0$.

13. Vypočtěte intenzitu elektrického pole vodiče v elektrostatické rovnováze, na jehož povrchu je celkový náboj rozložen s povrchovou hustotou σ.
Výsledek: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n}$, kde $\vec{n}$ je vnější jednotková normála k povrchu vodiče.