$$\begin{aligned} 0 &= -4C + \frac{1}{2} - 4C - \frac{1}{2} \\ 0 &= -8C \qquad\qquad\qquad \Rightarrow C = 0, A = 0 \end{aligned}$$

Po dosazení dostáváme

$$\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right).$$

Potom

$$\begin{aligned} s_n \;=\; & \frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right) + \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2n-5)^2} - \frac{1}{(2n-3)^2}\right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{(2n-3)^2} - \frac{1}{(2n-1)^2}\right) + \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)\right] = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right), \end{aligned}$$

a proto

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{1}{8}.$$

Cvičení 6.1. Určete součet řady:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$ $\left[s = \frac{1}{2}\right]$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ $\left[s = \frac{1}{3}\right]$

c) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2n}{n^3+3n^2+2n}$ $\left[s = \frac{1}{8}\right]$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$ $\left[s = \frac{11}{18}\right]$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$ $\left[s = \frac{23}{90}\right]$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ $\left[s = 1\right]$

6.2 Geometrická řada

Příklad 6.2. Určete součet geometrické řady:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Řešení. Nejprve zjistíme první člen a tak, že do n-tého členu dosadíme $n = 1$

$$a = \frac{5}{4}$$

Cvičení 6.2. Určete součet geometrické řady:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ $\left[s = \frac{1}{4}\right]$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^n}$ $[s = 24]$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{5}{4}\right)^n$ $[s = \infty]$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n}$ $\left[s = -\frac{3}{2}\right]$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}}\right)$ $[s = 5]$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 4^n - 3^{n+1}}{6^n}$ $[s = 7]$

$$\text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n \cdot 2n!}{(2n)!}.$$

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8^{n+1}\cdot 2[(n+1)!]}{[2(n+1)]!}}{\frac{8^n \cdot 2n!}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8^{n+1}\cdot 2[(n+1)!]\cdot(2n)!}{8^n\cdot 2n!\cdot(2n+2)!} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{8^n\cdot 8\cdot 2(n+1)\cdot n!\cdot(2n)!}{8^n\cdot 2n!\cdot(2n+2)(2n+1)(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{8(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{2n+1} = 0 < 1, \end{aligned}$$

tj. daná řada konverguje.

Cvičení 7.1. Rozhodněte o konvergenci řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$	[konverguje]	d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$	[diverguje]
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\mathrm{e}^n}$	[konverguje]	e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot n!}{n^n}$	[konverguje]
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$	[konverguje]	f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot n^2}{(2n)!}$	[konverguje]

7.2 Odmocninové kritérium

Příklad 7.2. Rozhodněte o konvergenci řady

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}.$$

Řešení. Užijeme odmocninové kritérium, platí

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{4} = \frac{1}{4} < 1,$$

podle L'Hospitalova pravidla je $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Proto daná řada konverguje.

$$\text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{5n-1}\right)^n.$$

Řešení. Podle odmocninového kritéria dostáváme

$$\text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Řešení. Platí

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{2}e > 1,$$

neboť platí vzorec $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, tj. daná řada je divergentní.

$$\text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} n^n \sin^n \frac{3}{n}.$$

Řešení. Platí

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n \sin^n \frac{3}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \sin \frac{3}{n}.$$

Dostáváme neurčitý výraz typu $\infty \cdot 0$, který upravíme na podíl, abychom mohli použít L'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin \frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{3}{n}}{\frac{1}{n}},$$

nyní dostáváme neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ a můžeme použít L'Hospitalovo pravidlo

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{3}{n^2} \cdot \cos \frac{3}{n}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \cos \frac{3}{n} = 3 > 1,$$

daná řada tedy diverguje.

Cvičení 7.2. Rozhodněte o konvergenci řady:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ [konverguje]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-n}$ [konverguje]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2}{n^2+100}\right)^n$ [diverguje]

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 n}{(5n^2+1)^n}$ [konverguje]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$ [konverguje]

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\operatorname{arctg}^n\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ [diverguje]

$$
\begin{aligned}
q &= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+2)(n+3)}}{\frac{2^n}{(n+1)(n+2)}}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{2^{n+1}(n+1)(n+2)}{2^n(n+2)(n+3)}\right)=\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{2n+2}{n+3}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{-n+1}{n+3}\right)=-\infty<1,
\end{aligned}
$$

z toho plyne, že daná řada diverguje.

$$
\text{e)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{5n^3+3n^2}.
$$

Podle Raabeova kritéria platí

$$
\begin{aligned}
q &= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\frac{2(n+1)+5}{5(n+1)^3+3(n+1)^2}}{\frac{2n+5}{5n^3+3n^2}}\right)=\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{(2n+7)(5n^3+3n^2)}{\left[5\left(n^3+3n^2+3n+1\right)+3\left(n^2+2n+1\right)\right](2n+5)}\right)=\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{10n^4+6n^3+35n^3+21n^2}{\left(5n^3+15n^2+15n+5+3n^2+6n+3\right)(2n+5)}\right)=\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{10n^4+41n^3+21n^2}{\left(5n^3+18n^2+21n+8\right)(2n+5)}\right)=\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{10n^4+41n^3+21n^2}{10n^4+61n^3+132n^2+121n+40}\right)=\\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{20n^3+111n^2+12n+40}{10n^4+61n^3+132n^2+121n+40}\right)=2>1,
\end{aligned}
$$

tzn. daná řada konverguje.

Cvičení 7.3. Rozhodněte o konvergenci řady:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ [konverguje]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$ [konverguje]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+1}$ [diverguje]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+2)!}$ [konverguje]

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$ [diverguje]

$$\text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n}.$$

Řešení. Funkce $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$ je nerostoucí a nezáporná na intervalu $\langle 1, \infty)$. Platí

$$\begin{aligned} q &= \int_1^{\infty} \frac{\ln^3 x}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{\ln^3 x}{x} dx = \\ &= \left| \begin{array}{lllllll} \text{sub.:} & \ln x & = & s & \text{meze:} & x = t & \rightarrow & s = \ln t \\ & \frac{1}{x}dx & = & ds & & x = 1 & \rightarrow & s = 0 \end{array} \right| = \lim_{t\to\infty} \int_0^{\ln t} s^3 ds = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{t\to\infty} \left[s^4 \right]_0^{\ln t} = \frac{1}{4} \lim_{t\to\infty} \left(\ln^4 t - 0 \right) = \infty, \end{aligned}$$

tzn. daná řada diverguje.

Cvičení 7.4. Rozhodněte o konvergenci řady:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$ [konverguje]

b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4n+4}$ [konverguje]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ [diverguje]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$ [konverguje]

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \ln n)!} 4^n$ [diverguje]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ [konverguje]

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} &= \sin(\pi + \frac{\pi}{2}) + \sin(2\pi + \frac{\pi}{2})\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin(3\pi + \frac{\pi}{2})\frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots = \\ &= -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.\end{aligned}$$

Nyní určíme konvergenci či divergenci řady pomocí Leibnizova kritéria. Nejprve ověříme platnost 2.podmínky

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}\ln n} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-\frac{1}{n}}{1}} = e^0 \neq 0.$$

Nutná podmínka konvergence není splněna, a proto daná řada diverguje.

Cvičení 8.1. Rozhodněte, které řady konvergují absolutně, které konvergují neabsolutně, a které divergují:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$ [konv. abs.]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ [diverguje]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-2)^n}$ [diverguje]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^n(n+1)}$ [konv. abs.]

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ [konv. neabs.]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$ [konv. abs.]

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0 \quad \Rightarrow r = \infty.$$

To znamená, že daná mocninná řada vždy konverguje. Obor konvergence i obor absolutní konvergence je interval $(-\infty, \infty)$.

Cvičení 9.1. Určete poloměr konvergence, obor konvergence a obor absolutní konvergence:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^3}$ $[r = 1,\ \text{OK=OAK=}\langle 1, 1\rangle]$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}$ $[r = 1,\ \text{OK=OAK=}(-1, 1)]$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-8)^n}{n\cdot 5^n}$ $[r = 5,\ \text{OK=}\langle 3, 13),\ \text{OAK=}(3, 13)]$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{7^n}$ $[r = 7,\ \text{OK=OAK=}(-7, 7)]$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}x^n}{(2n+1)!}$ $[r = \infty,\ \text{OK=OAK=}(-\infty, \infty)]$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n\cdot 2^n}$ $[r = 2,\ \text{OK=}(-2, 2\rangle,\ \text{OAK=}(-2, 2)]$

9.2 Součet mocninné řady

Příklad 9.2. Určete součet číselných řad pomocí součtu mocninné řady

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}.$$

Řešení. Nejprve sečteme mocninnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. Tato řada je geometrická s kvocientem $q = x$, kde $|x| < 1$. Dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ a $\int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n}$. Proto můžeme napsat, že

$$\int^{\frac{1}{3}} x^{n-1} dx = \frac{1}{n\cdot 3^n}.$$

Nyní zjistíme součet zadané číselné řady

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{3}} x^{n-1} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \right) dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{1-x} = \Big[-\ln|1-x| \Big]_0^{\frac{1}{3}} = \\ &= -\ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \ln 1 = -\ln\frac{2}{3} = \ln\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

$$\text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \left(\frac{1}{5}\right)^{2n}.$$

Řešení. Uvažujme mocninnou řadu ve tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{2n}$. Součet řady určíme z rovnosti $\left(x^{2n+1}\right)' = (2n+1)x^{2n}$. Dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(x^{2n+1}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} \right)'.$$

Tato řada je geometrická s kvocientem $q = -x^2$, kde $|x| < 1$ a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} = x - x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n+1} = \frac{x}{1+x^2}.$$

Proto můžeme napsat, že

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} \right)' = \left(\frac{x}{1+x^2} \right)' = \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Dosazením za $x = \frac{1}{5}$ dostaneme hledaný součet řady. Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \left(\frac{1}{5}\right)^{2n} = \frac{1 - \frac{1}{5^2}}{\left(1 + \frac{1}{5^2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{25}}{\left(1 + \frac{1}{25}\right)^2} = \frac{24 \cdot 25^2}{25 \cdot 26^2} = \frac{150}{169}.$$

Cvičení 9.2. Určete součet číselných řad pomocí součtu mocninné řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n}$ $\left[\ln \frac{4}{3}\right]$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ $\left[\frac{80}{27}\right]$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\left[\frac{8}{7}\right]$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Nyní obě řady navzájem vynásobíme a dostaneme Maclaurinovu řadu pro funkci $\mathrm{e}^x \sin x$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x \sin x &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) = \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{24} + \cdots = \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \cdots \end{aligned}$$

Cvičení 9.3. Rozviňte následující funkce v Maclaurinovu řadu

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ $\left[1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!} + \cdots\right]$

b) $f(x) = \sin 2x$ $\left[2x - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} + \cdots\right]$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ $\left[1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^9 + \cdots\right]$

d) $f(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^x$ $\left[1 + 2x + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \cdots\right]$

e) $f(x) = \ln(1 + e^x)$ $\left[\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots\right]$

Příklad 9.4. Rozložte v Taylorovu řadu následující funkce

$$\text{a)}\, f(x) = \sqrt{x^3} \text{ v bodě } x_0 = 1.$$

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} & \Rightarrow \quad & f'(1) = \tfrac{3}{2}, \\ f''(x) &= \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & \Rightarrow \quad & f''(2) = \tfrac{3}{2^2}, \\ f'''(x) &= -\tfrac{3}{2^2}\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} & \Rightarrow \quad & f'''(3) = -\tfrac{3}{2^3}. \end{aligned}$$

Dosazením do Taylorovy řady dostáváme

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{2^2\cdot 2!}(x-1)^2 - \frac{3}{2^3\cdot 3!}(x-1)^3 + \cdots = \\ &= 1 + \frac{3}{2}\left[(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2\cdot 2!} - \frac{(x-1)^3}{2^2\cdot 3!} + \cdots\right]. \end{aligned}$$

$$\text{b)} f(x) = \frac{1}{x} \text{ v bodě } x_0 = 3.$$

Řešení. Platí

$$\begin{array}{lcl} f'(x) = -\frac{1}{x^2} & \Rightarrow & f'(1) = -\frac{1}{3^2}, \\ f''(x) = \frac{2}{x^3} & \Rightarrow & f''(2) = \frac{2}{3^3}, \\ f'''(x) = -\frac{6}{x^4} & \Rightarrow & f'''(3) = -\frac{6}{3^4}. \end{array}$$

Po dosazení dostáváme Taylorovu řadu ve tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x-3) + \frac{2}{3^3 \cdot 2!}(x-3)^2 - \frac{6}{3^4 \cdot 3!}(x-3)^3 + \cdots = \\ &= \frac{1}{3}\left[1 - \frac{x-3}{3} + \frac{(x-3)^2}{3^2} - \frac{(x-3)^3}{3^3} + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Cvičení 9.4. Rozložte v Taylorovu řadu následující funkce

$$\text{a)} f(x) = \frac{1}{x} \text{ v bodě } x_0 = -2$$

$$\left[f(x) = -\tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{x+2}{2} + \tfrac{(x+2)^2}{4} + \cdots + \tfrac{(x+2)^n}{2^n} + \cdots\right)\right]$$

$$\text{b)} f(x) = \ln x \text{ v bodě } x_0 = 1$$

$$\left[f(x) = (x-1) - \tfrac{(x-1)^2}{2} + \tfrac{(x-1)^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\tfrac{(x-1)^n}{n} + \cdots\right]$$

$$\text{c)} f(x) = \sin\frac{x\pi}{4} \text{ v bodě } x_0 = 2$$

$$\left[f(x) = 1 - \left(\tfrac{\pi}{4}\right)^2 \tfrac{(x-2)^2}{2!} + \left(\tfrac{\pi}{4}\right)^4 \tfrac{(x-2)^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \left(\tfrac{\pi}{4}\right)^{2n} \tfrac{(x-2)^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right]$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{t}\int_{-t}^{t}\frac{x}{2}\sin\frac{n\pi}{t}x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u' = \sin\frac{n\pi}{t}x & u = -\frac{t}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{t}x \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right| = \\
&= \frac{1}{2t}\left(\left[-\frac{xt}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{t}x\right]_{-t}^{t} + \frac{t}{n\pi}\int_{-t}^{t}\cos\frac{n\pi}{t}x\,dx\right) = \\
&= \frac{1}{2t}\left[-\frac{xt}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{t}x + \frac{t^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{t}x\right]_{-t}^{t} = \\
&= \frac{1}{2t}\left(-\frac{t^2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{t^2}{n^2\pi^2}\sin n\pi - \frac{t^2}{n\pi}\cos(-n\pi) - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\sin(-n\pi)\right) = \\
&= \frac{1}{2t}\left(-\frac{t^2}{n\pi}(-1)^n - \frac{t^2}{n\pi}(-1)^n\right) = \frac{(-1)^n}{2t}\left(-\frac{2t^2}{n\pi}\right) = -\frac{(-1)^n t}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

$$b_1 = \frac{t}{\pi},\ b_2 = -\frac{t}{2\pi},\ b_3 = \frac{t}{3\pi},\ \dots$$

Výsledný Fourierův rozvoj funkce je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{t} = \frac{t}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{t} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{t} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{t} + \cdots\right).$$

Cvičení 10.1. Rozviňte ve Fourierovu řadu v daném základním intervalu periodicity funkci

$$\text{a)} f(x) = x \quad \text{v } \langle -\pi, \pi\rangle$$

$$\left[f(x) = 2\left(\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \tfrac{1}{4}\sin 4x + \cdots\right)\right]$$

$$\text{b)} f(x) = \begin{cases} -\pi, & \text{v } (-\pi, 0), \\ x, & \text{v } (0, \pi). \end{cases}$$

$$\left[f(x) = -\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{2}{\pi}\left(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 3x + \tfrac{1}{25}\cos 5x + \cdots\right) + 3\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x - \tfrac{3}{5}\sin 3x + \cdots\right]$$

$$\text{c)} f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{v } \langle 0, \pi\rangle, \\ 0, & \text{v } \langle \pi, 2\pi\rangle. \end{cases}$$

$$\left[f(x) = \tfrac{1}{\pi} + \tfrac{1}{2}\sin x - \tfrac{2}{\pi}\left(\tfrac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \tfrac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \tfrac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \cdots\right)\right]$$

$$\text{d)} f(x) = x^2 \quad \text{v } (0, 2\pi)$$

Nyní provedeme rozvoj v kosinovou řadu, pro jejíž pomocnou funkci platí

$$F(x) = \begin{cases} x \sin x, & x \in (0, \pi), \\ -x \sin(-x) = x \sin x, & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Fourierovy koeficienty jsou

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \big[x \sin(1-n)x + x \sin(1+n)x \big] dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos(1-n)x}{1-n} + \frac{\sin(1-n)x}{(1-n)^2} - \frac{x \cos(1+n)x}{1+n} + \frac{\sin(1+n)x}{(1+n)^2} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi \cos(1-n)\pi}{1-n} + 0 - \frac{\pi \cos(1+n)\pi}{1+n} + 0 + 0 - 0 + 0 - 0 \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi(-1)^{n+1}}{1-n} - \frac{\pi(-1)^{n+1}}{1+n} \right] = \frac{(-1)^{n+1}(-2)}{(1-n)(1+n)}. \end{aligned}$$

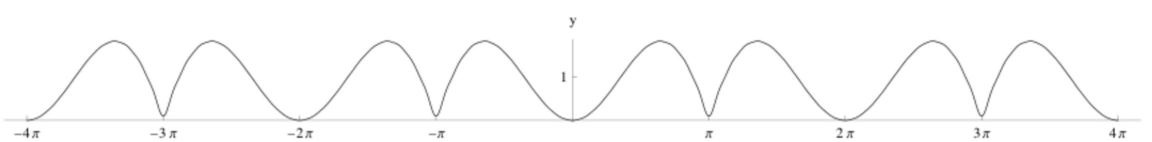
$$a_0 = 2, \; a_2 = -\frac{2}{3}, \; a_3 = \frac{1}{4}, \; \ldots$$

Koeficient a_1 získáme výpočtem příslušného integrálu. Platí

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \sin 2x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi = \\ &= \frac{1}{2\pi} (-\pi - 0 + 0 + 0) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dosazením dostaneme Fourierovu řadu kosinovou

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos x - \frac{2}{3} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 3x + \cdots, \text{pro } x \in \langle 0, \pi \rangle.$$



Obr. 8. Sudé periodické rozšíření funkce $x \sin x, x \in \langle 0, \pi \rangle$

Cvičení 10.2. Rozviňte danou funkci v intervalu $(0, \pi)$ ve Fourierovu a) sinovou a b) kosinovou řadu

$$\text{a)} \, f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$$

[a) $\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{6} \sin 6x + \cdots$ v $(0, \pi)$]

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{13} < 10^{-5}.$$

Přibližná hodnota výrazu je

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} &\doteq \frac{\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{3}\frac{1}{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{5}\frac{1}{5} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{7}\frac{1}{7} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{9}\frac{1}{9} - \\ &- \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{11}\frac{1}{11} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{13}\frac{1}{13} \doteq 0,5236. \end{aligned}$$

Cvičení 11.1. Určete přibližnou hodnotu výrazu s chybou menší než je uvedeno

a) $\cos 10^\circ$ (10^{-4}) $[0,9848]$

b) $\sin 10^\circ$ (10^{-6}) $[0,17364]$

c) e^2 (10^{-3}) $[7,389]$

d) $\arcsin 0,45$ (10^{-3}) $[0,466]$

Příklad 11.2. Určete přibližnou hodnotu výrazu pomocí prvních n členů

$$\text{a)}\, \frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \quad [n = 4].$$

Řešení. Položíme-li $-\frac{1}{4} = x$ dostáváme funkci e^x. První 4 členy rozvoje této funkce jsou

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Dosazením za $x = -\frac{1}{4}$ určíme přibližnou hodnotu zadaného výrazu

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} \doteq 1 - \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)^3\frac{1}{3\cdot 2} \doteq 0,779$$

$$\text{b)}\, \sqrt[3]{1,015} \quad [n = 3].$$

Řešení. Nejprve upravíme zadaný výraz do tvaru $(1+x)^a$, kde $x \in (-1, 1)$

$$\sqrt[3]{1,015} = \sqrt[3]{1 + 0,015} = (1 + 0,015)^{\frac{1}{3}}.$$

Pro první tři členy rozvoje v Maclaurinovu řadu platí

$$\text{d)}\ln\frac{5}{6}\quad [n=5].$$

Řešení. Pro zjištění hodnoty výrazu využijeme rozvoje v Maclaurinovu řadu funkce $\ln(1+x)$. Platí

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots$$

Z rovnice $\ln(1+x)=\ln\frac{5}{6}$ dostáváme $x=-\frac{1}{6}$. Po dosazení určíme přibližnou hodnotu daného výrazu

$$\ln\frac{5}{6}\doteq-\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{6}\right)^2\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{6}\right)^3\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)^4\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{6}\right)^5\frac{1}{5}\doteq-0,18.$$

Cvičení 11.2. Určete přibližnou hodnotu výrazu pomocí prvních n členů

a) $\frac{1}{e}$ (n = 3) [0, 3678]

c) ln 5 (n = 9) [1, 6094]

b) $(1,5)^2$ (n = 3) [2, 25]

d) $\ln\frac{1}{2}$ (n = 3) [−0, 693]

Příklad 11.3. Určete následující limity

$$\text{a)}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{1+x^2}}{x}.$$

Řešení. Pro vyjádření odmocnin použijeme binomický rozvoj funkcí $\sqrt{1-x}$ a $\sqrt[3]{1+x^2}$. Platí

$$(1-x)^{\frac{1}{2}}=1+\binom{\frac{1}{2}}{1}(-x)+\binom{\frac{1}{2}}{2}(-x)^2+\cdots=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{3}}=1+\binom{\frac{1}{3}}{1}x^2+\cdots=1+\frac{x^2}{3}+\cdots$$

Poté dosadíme do limity jednotlivé rozvoje a dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{1+x^2}}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots\right)-\left(1+\frac{x^2}{3}+\cdots\right)\right]=\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(-\frac{x}{2}-\frac{11x^2}{24}+\cdots\right)=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$\text{b)} \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x^2} - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right].$$

Řešení. Použijeme rozvoj v Maclaurinovu řadu funkce $\ln(1+x)$. Platí

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3x^6} + \cdots$$

Po dosazení do limity dostáváme

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x^2} - x^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{3x^6} + \cdots\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^4} + \cdots\right) = -1.$$

Cvičení 11.3. Určete následující limity

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^5} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ $\left[-\frac{1}{12}\right]$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

Příklad 11.4. Vyjádřete mocninnou řadou

$$\text{a)} \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2} dt.$$

Řešení. Provedeme rozvoj funkce e^t v Maclaurinovu řadu. Platí

$$\mathrm{e}^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Poté získanou řadu dosadíme do integrálu a po integraci dostaneme požadovanou mocninnou řadu

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2} dt &= \int_0^x \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + \frac{1}{2!} + \frac{t}{3!} + \cdots\right) dt = \\
&= \left[-\frac{1}{t} + \ln|t| + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{2\cdot 3!} + \cdots\right]_0^x = \\
&= -\frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \cdots + \frac{x^n}{n(n+1)!} + \cdots
\end{aligned}$$

Cvičení 11.4. Vyjádřete mocninnou řadou

a) $\int\limits_0^x \frac{e^t}{t}\,dt$ $\left[\ln|x| + x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \cdots\right]$

b) $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ $\left[1 + \frac{x^5}{2\cdot 5} + \frac{x^9}{8\cdot 3} + \frac{5x^{13}}{16\cdot 13} + \cdots\right]$

c) $\int\limits_0^x \sin t^2\,dt$ $\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} + \cdots\right]$

d) $\int\limits_0^x \ln\frac{1+t}{t}\,dt$ $\left[x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \cdots\right]$

Příklad 11.5. Určete přibližnou hodnotu výrazu pomocí prvních n členů nebo se zadanou přesností

$$\text{a)} \int_{0,1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{x}dx \quad [n = 6].$$

Řešení. Maclaurinův rozvoj funkce e^x je

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Dosazením do integrálu zjistíme přibližnou hodnotu výrazu

$$\begin{aligned}\int_{0,1}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{x}dx &\doteq \int_{0,1}^{1} \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!}\right) dx \doteq \\ &\doteq \left[\ln|x| + x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!}\right]_{0,1}^{1} \doteq 3,518.\end{aligned}$$

$$\text{b)} \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \quad [\text{na tisíciny}].$$

Řešení. Nejprve určíme binomický rozvoj dané funkce. Platí

$$\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}x^4 + \cdots = 1 - \frac{x^4}{2} + \cdots$$

Druhý člen rozvoje splňuje danou podmínku

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 < 10^{-3}.$$

Po dosazení do integrálu dostaneme

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \doteq \int_0^{0,5} \left(1 - \frac{x^4}{2}\right) dx \doteq \left[x - \frac{x^5}{10}\right]_0^{0,5} \doteq 0,497.$$

Cvičení 11.5. Určete přibližnou hodnotu výrazu pomocí prvních n členů nebo se zadanou přesností

a) $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3}\, dx \quad (10^{-3}) \qquad [32,831]$

b) $\int\limits_{0}^{0,5} \cos \frac{x^2}{1}\, dx$ (na tisíciny) $[0,500]$

c) $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{dx}{1+x^4} \quad (10^{-4}) \qquad [0,4940]$

d) $\int\limits_{2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\, dx \quad (\mathrm{n}=4) \qquad [2,834]$