# Písemka analýza 3 s řešením — ukázková

---

**1.** Pomocí vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3+1)(3+2)\dots(3+n)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n}.$$

**Řešení:** diverguje, diverguje, konverguje, konverguje

---

**2.** Pomocí součtu vhodné mocninné řady (včetně určení jejího poloměru a oboru konvergence) určete součet číselné řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{3^n}.$$

**Řešení:** 3

---

**3.** Vypočtěte Fourierovu řadu funkce $\mathrm{e}^x$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

**Řešení:**

$$\frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2+1} \cos nx - \frac{n}{n^2+1} \sin nx \right) \right]$$

---

**4.** Vypočtěte následující hodnoty:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\right), \qquad \mathrm{Im}\big(e^{-(x+\mathrm{i}y)} \sin(x + \mathrm{i}y)\big), \qquad \sqrt{4\mathrm{i}}$$

a pro hlavní větev logaritmu také hodnotu

$$(-2 + 2\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}.$$

**Řešení:** $-\mathrm{i} \sinh 1$, $\quad \mathrm{e}^{-x}[\cos x \cos y \sinh y - \sin x \sin y \cosh y]$, $\quad \pm\sqrt{2}(1 + \mathrm{i})$, $2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi}\big(\cos(\frac{3}{4}\pi - \ln(2\sqrt{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{4}\pi - \ln(2\sqrt{2})\big)$.

---

**5.** Nalezněte holomorfní funkci $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, je-li

$$u(x, y) = x \sinh x \cos y - y \sin y \cosh x.$$

**Řešení:** $f(z) = z \sinh z + \mathrm{i}K, K \in \mathbf{R}$.

---

**6.** Určete všechny Laurentovy rozvoje zadané funkce $f(z)$ se středem v bodě $z_0 = 2$:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}.$$

**Řešení:**

$$M_1 = \{z \in \mathbf{C} | 0 < |z-2| < 1\}, \quad f(z) = \frac{2}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(z-2)^n,$$

$$M_2 = \{z \in \mathbf{C} | 1 < |z-2| < \infty\}, \quad f(z) = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^n (z-2)^n.$$

---

**7.** Pomocí reziduové věty vypočtěte integrál

$$\int_0^{4\pi} \frac{\mathrm{d}x}{5 - 4\cos x}.$$

**Řešení:** $\frac{4}{3}\pi$.

---

**8.** Nechť $H = L^2[0, \pi]$ je Hilbertův prostor funkcí integrovatelných s kvadrátem se skalárním součinem

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{\pi} f(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

Ukažte, že operátor $A(y) = y''$ definovaný na $D(A) = \{y \in L^2[0,\pi], y'(0) = y(\pi) = 0\}$ (tzv. *smíšené podmínky*) je hermiteovský, tj.

$$\langle A(y) | z \rangle = \langle y | A(z) \rangle, \quad \forall y, z \in D(A).$$

Nalezněte jeho vlastní čísla a vlastní funkce.

**Řešení:**

$$\lambda_n = -\frac{(2n+1)^2}{4}, \quad y_n = \cos\left(\frac{2n+1}{2} x\right), \quad n \in \mathbf{N}_0$$

---