Příklady k zápočtu

4. října 2006

- Upravte a uveďte podmínky:

$$\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1}$$

$$\left(\frac{m+1}{m+2} - \frac{m-1}{m-2}\right) - \frac{m^2-4}{2m}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b}}{\frac{a^2+b^2}{ab} - 2} : \frac{a^2}{b}$$

- Doplňte jedno ze slov: ,,aspoň, právě, nejvýše“:

  a) každé prvočíslo má ... dva různé dělitele;

  b) dvě různé přímky v rovině mohou mít ... jeden společný bod;

  c) nerovnici $x^2 > 5$ splňují ... tři přirozená čísla.

- Kvantifikované výroky zapsané symbolicky vyjádřete slovy a rozhodněte o jejich pravdivosti.

  a) $\forall x \in \mathbf{R} : x^2 > 0$

  b) $\forall x \in \mathbf{R} : \sqrt{x^2} = \mid x \mid$

  c) $\forall x \in \mathbf{R}\ \forall b \in \mathbf{R} : a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

  d) $\forall x \in \mathbf{R}\ \exists y \in \mathbf{R} : x \cdot y = 10$

- Najděte takové množiny A, B, pro které platí: $\mathrm{A} \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1, 2, 3\},\ \mathrm{B} \setminus \mathrm{A} = \{5, 6\}$

- Jsou dány tři intervaly $\mathrm{A} = \langle -7; 2\rangle,\ \mathrm{B} = \langle -2; 5),\ \mathrm{C} = \langle 2; \infty)$. Zapište:

  a) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$

  b) $\mathrm{A} \cap \mathrm{C}$

  c) $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$

  d) $(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$

  e) $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$

  f) $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}$

- Řešte následující rovnice (goniometrické, exponenciální a logaritmické):

- Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici
$$6^{1+x} + 6^{1-x} = 13.$$
- Řešte v $\mathbf{Z}$ rovnici
$$x^x + x^{-x} = 3(1 + x^{-x}).$$
- Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici
$$2^x \left(\frac{1}{8}\right)^{1-x} + 2^{1-x} \left(\frac{1}{8}\right)^x = 1.$$
- Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici
$$\sqrt{3^{4x} + 1} + \sqrt{2 \cdot 3^{4x} + 3} = 5.$$
- Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici
$$27^{x+1} + 9^{\frac{3}{2}x+1} + 3^{3x+1} = 351.$$
- Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici
$$\frac{2^x \cdot 3^{x+3}}{6^{7-x} \cdot 8^{x-4}} = 9^{x-2}.$$
- Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici
$$5 \cdot 2^{x+2} - 6 \cdot 3^{x+2} = 3^{x+3} + 2 \cdot 2^{x+1}.$$
- Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici
$$\sqrt{5^{3x} + 19} - \sqrt{5^{3x} - 4} = 1.$$
- Řešte rovnici $y = y_0 \cdot \mathrm{e}^{-bx^2}$ o neznámé $x \in \mathbf{R}$, přičemž, $y,\ y_0,\ b \in \mathbf{R}^+$ jsou parametry a současně platí $y_0 > y$.
- Řešte v $\mathbf{R}^2$ soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 4^x \cdot 3^y &= 18 \\ 9^x \cdot 5^y &= 75 \end{aligned}$$
- Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici
$$\log(x^3 + 1) - \log 7 - \log x = \log(x + 1) - \log 6.$$

- Řešte v **R** rovnici

$$\log x + \log \sqrt{x} + \log x^{\frac{1}{4}} + \log x^{\frac{1}{8}} + \cdots = 2.$$

- Řešte v **R** rovnici

$$(\log_x 3) \cdot (\log_{\frac{x}{3}} 3) = \log_{\frac{x^2}{9}} 3.$$

- Řešte v **R** rovnici

$$\log x^{2 \log \sqrt{x}} + \log \frac{1}{x^2} = 3.$$

- Řešte v **R** rovnici

$$\log(x+1) + \log(x-1) - \log(x-2) = \log 8.$$

- Řešte v **R** rovnici

$$\log(2x-3) + \log 3x = \log(8x-12).$$

- Řešte v **R** rovnici

$$\log \sqrt{3x-5} + \log \sqrt{7x-3} = 1 + \log \frac{\sqrt{11}}{10}$$

- Řešte v **N** rovnici

$$3 \cdot 2^{\log x} + 8 \cdot 2^{-\log x} = 5(1 + 10 \log 100^{\frac{1}{5}}).$$

- Řešte v **R** rovnici

$$\log(2^{2 \log x}) - \log(2^{3\sqrt{\log x}}) = 2 \log 2.$$

- Řešte v **R** rovnici

$$\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2.$$

- Využijte svých znalostí logaritmů a bez použití kalkulačky vypočítejte hodnotu 36!. K výpočtu využijte logaritmických tabulek. (Jako správný výsledek se uznává celý postup výpočtu nikoli pouze samotná cifra!)

- Řešte rovnici $2 \sin^2 x + 7 \cos x - 5 = 0$ o neznámé $x \in \mathbf{R}$.

- Pro velikost x vnitřního úhlu trojúhelníku platí, že $\sin x$, $\mathrm{tg} x$, a$\frac{1}{\cos x}$ tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnostii. Určete velikost tohoto úhlu.
- Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici
$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$
- Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici
$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2}$$
- Řešte rovnici
$$\frac{1 - \mathrm{tg} x}{1 + \mathrm{tg} x} = 2\cos 2x$$
- Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $\mid \cos x \mid^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1$.
- Řešte rovnici $2\sin^2 x - 5\cos x - 5 = 0$ o neznámé $x \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$.
- Řešte rovnici $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$ o neznámé $x \in \mathbf{R}$.
- Řešte rovnici $2\sin x = \sqrt{3} \cdot \mathrm{tg}\ x$ o neznámé $x \in \mathbf{R}$.
- Řešte rovnici $\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x = 1 + \mathrm{tg} x$ o neznámé $x \in \mathbf{R}$.
- Řešte nerovnice s neznámou $x \in \mathbf{R}$:

  i) $x^2 - 2x - 15 \geq 0$,

  ii) $3x^2 + 5x - 2 < 0$,

  iii) $2x - x^2 \geq 2 - x$,

  iv) $4x^2 \leq 1$,

  v) $\frac{1-2x}{x^2-1}$

  vi) $\frac{4x-7}{2} - \frac{x-4}{6} \geq 2x - 3$.
- Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $\frac{2-a}{a} = \frac{2}{x-1}$ s parametrem $a \in \mathbf{R}$.
- Řešte v $\mathbf{R}$ rovnici $1 + \frac{a^2-1}{x} = a$ s parametrem $a \in \mathbf{R}$.
- Řešte v $\mathbf{R}^2$ soustavu rovnic
$$\begin{gathered} x + (b-1)y = 1 \\ (b+1)x + 3y = -1, \end{gathered}$$
  $b \in \mathbf{R}$.

- Určete definiční obory funkcí:

  i) x^x,

  ii) $y = (x^2 - 4x + 5)^x$,

  iii) $\ln \frac{1-x}{1+x+x^2}$,

  iv) $\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$,

  e) $\operatorname{tg} x$.

- Jsou dány dvě funkce $f(x) = -2x + 3$, $g(x) = \sqrt{x}$. Napište předpisy pro funkce složené:

  i) $f \circ g$,

  ii) $g \circ f$,

  iii) $f \circ (f \circ g)$,

  iv) $g \circ (g \circ f)$,

  v) $g \circ (f \circ g)$.

- U daných složených funkcí určete funkci vnější a funkci vnitřní:

  i) $y = 6\sqrt{x} - 4$

  ii) $y = \log^2 x$

  iii) $y = \sqrt{x^2 - 4x}$

  iv) $y = \log x^2$

  v) $y = \sqrt{5^x}$

  vi) $y = \log^2 x - 4 \log x$

  vii) $(x^2 + 1)^3$

- Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou na defičním oboru sudé (resp. liché)?

  i) $y = x$,

  ii) $y = \cos x$,

  iii) $y = \frac{1}{x}$,

  iv) $y = x^2$,

  v) $y = \frac{4x}{x^2-4}$,

  vi) $y = \mid x \mid$,

  vii) $y = x^3$,

viii) $y = 2^x$,

ix) $y = \frac{x^2}{|x|+3}$,

x) $y = \log x$.

- V dané posloupnosti závisín-tý člen a_n na čísle n. Znáte-li několik prvních členů, napište alespoň tři další členy a odhadněte vzorec pro a_n.

  i) 4, 8, 12, 16, 20, ...;

  ii) 1, 4, 9, 16, 25,...;

  iii) -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...;

  iv) $-\frac{1}{27},\ -\frac{1}{9},\ -\frac{1}{3},\ -1,\ -3, \ldots$.

- Zapište vzorcem pro n-tý člen

  i) posloupnost všech přirozených sudých čísel,

  ii) posloupnost všech přirozených lichých čísel,

- Přičteme-li k daným číslům -6, 2, 26 reálné číslo x, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete, které číslo musíme přičíst. Potom určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, která takto vznikne.

- Hranu krychle o hraně a zvětšíme dvakrát. Kolikrát se zvětší

  i) objem krychle,

  ii) povrch krychle.

- Délka tělesové úhlopříčky krychle je $3\sqrt{6}$ cm. Vypočítejte

  i) délku hrany krychle,

  ii) povrch krychle,

  iii) objem krychle.

- Napište vzorce pro objem koule, kvádru, jehlanu, kužele, válce. Dále pak vzorce pro povrchy zmíněných těles.jaký je rozměr objemu a povrchu?

- Body $A[1;3]$, $B[4;1]$ určují vektor $\vec{u}$, tj. $\vec{u} = B - A$

  i) Vypočítejte souřadnice vektoru $\vec{u}$.

  ii) Vypočítejte souřadnice bodu X tak, aby orientovaná úsečka CX, $C[-3;-2]$ též určovala vektor $\vec{u}$.

- Jsou dány vektory $\vec{u} = (4; 3; 0)$, $\vec{v} = (-2; -4; 1)$. Vypočítejte souřadnice následujících vektorů:

  i) $\vec{w}_1 = \vec{u} + \vec{v}$,

  ii) $\vec{w}_2 = \vec{u} - \vec{v}$,

  iii) $\vec{w}_3 = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u}$,

  iv) $\vec{w}_4 = \vec{u} \times \vec{v}$,

  v) $\vec{w}_5 = \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u}$,

  vi) $\vec{w}_6 = \vec{u} \times \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v}$,

  vii) $\vec{w}_7 = \vec{u} \times \vec{u}$.

- Vypočítejte velikost úhlu vektorů $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$;

  i) $\vec{u}_1 = (3; 1)$, $\vec{u}_2 = (1; 2)$; ii) $\vec{u}_1 = (-2; 4)$, $\vec{u}_2 = (6; -2)$

  iii) $\vec{u}_1 = (1; i)$, $\vec{u}_2 = (-1; -i)$

- Vypočítejte velikosti úhlů v trojúhelníku ABC, víte-li, že $\beta = 2\alpha$, $b : a = \sqrt{3} : 1$.

- Síla $F = 200N$ se rozkládá na dvě složky $F_1 = 150N$, $F_2 = 100N$. Vypočítejte úhel, který svírají síly $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$.

- Změní se nějak výsledek předchozí úlohy pokud zadání zapíši následovně?

  Síla $F = 200N$ se rozkládá na dvě složky $F_1 = 150N$, $F_2 = 100N$. Vypočítejte úhel, který svírají síly F_1, F_2.

- Předpokládejme, že Země má tvar koule o poloměru r km. Ve výšce h km nad povrchem Země je stacionární družice.

  i) Určete vzdálenost stacionární družice od místa na povrchu Země, ze kterého by bylo možné pozorovat družici právě na horizontu.

  ii) Vyjádřete povrch části Země, který lze z této družice spatřit.

- Načrtněte kružnici (určete souřadnice středu a poloměr), jestliže znáte její rovnici:

  i) $x^2 + y^2 = 9$,

  ii) $(x - 1)^2 + y^2 = 16$,

  iii) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$.

- Načrtněte elipsu (určete délky poloos, excentricitu a souřadnice středu), jestliže znáte její rovnici:

  i) $4x^2 + 9y^2 = 36$,

  ii) $25x^2 + y^2 = 100$,

  iii)$(x-1)^2 + 2(y+3)^2 = 1$.

- Vypočítejte:

  i) $2 + \mathrm{i} + 3(7 - \mathrm{i})$,

  ii) $\frac{3\mathrm{i}+1}{2+\mathrm{i}}$,

  iii) $1 + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4$.

- Nakreslete obrazy komplexních čísel $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$, $z_2 = 3 - \mathrm{i}$. Potom graficky určete:

  i) $z = z_1 + z_2$, ii) $\tilde{z} = z_1^* - z_2$,

  iii) $4\mathrm{i}$, iv) $\frac{1+5\mathrm{i}}{3}$.

- Vypočítejte součin a podíl dvou komplexních čísel z_1, z_2. Výsledek zapište v goniometrickém i v algebraickém tvaru.

  i) $z_1 = 2(\cos 105° + \mathrm{i} \sin 105°)$, $z_2 = 4(\cos 225° + \mathrm{i} \sin 225°)$

  ii) $z_1 = 2(\cos \frac{5}{3}\pi + \mathrm{i} \sin \frac{5}{3}\pi)$, $z_2 = 4(\cos \frac{1}{6}\pi + \mathrm{i} \sin \frac{1}{6}\pi)$

- Umocněte:

  i) $(\cos \frac{\pi}{18} + \mathrm{i} \sin \frac{\pi}{18})^6$, ii) $(1 + \mathrm{i})^6$, iii) $(\cos \frac{3}{32}\pi + \mathrm{i} \sin \frac{3}{32}\pi)^8$

- Vypočítejte všechny druhé komplexní odmocniny z čísla

  i) 4, ii) -4

- Řešte kvadratické rovnice s neznámou $x \in \mathbf{C}$

  i) $x^2 - 5x + 5 = 0$,

  ii) $x^2 - 20 = \mathrm{i}x(2\mathrm{i} - x)$

  iii) $x^2 - 6\mathrm{i}x - 9 = 0$

- Řešte v $\mathbf{C}$ rovnici $(z-3)^2 + (z^* + \mathrm{i})^2 = 4$

- Odvoďte vztahy pro $\cos 2x$ a $\sin 2x$ a také pro $\cos 3x$ a $\sin 3x$.

- Vypočítejte:

  i) $2!+0!$ ii) $3!+(3!)!$ iii) $\frac{8!}{4!}$ iv) $\frac{8!}{4 \cdot 4!}$

- Upravte, určete podmímky pro n.

  i) $\frac{(n+1)!}{n!}$ ii) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

- Kolik značek Morseovy abecedy lze sestavit z teček a čárek, vytváříme-li skupiny o jednom až čtyřech prvcích?

- Kolik přirozených čísel větších než 15 lze vytvořit z číslic $0, 1, 2, 3, 5$, jestliže se žádná číslice neopakuje?

- Zjistěte počet přirozených čtyřciferných čísel, které lze utvořit z číslic 1, 5, 6, 8, 9 v případě, že se číslice mohou opakovat.

- Určete počet prvků konečné množiny, z nichž lze vytvořit pětkrát více uspořádanách trojic než uspořádaných dvojic, ve kterých se žádný prvek neopakuje.

- Při výrobě určité součástky je třeba provést čtyři operace A, B, C, D, pro které platí následující podmínky:

  1. Operace B nesmí být první a operace A nesmí být poslední.

  2. Operaci C musíme provést dříve než operaci D.

  Kolik různých postupů existuje při výrobě této součástky?

- Ze sady 36 karet se namátkou vyberou 3 karty. Najděte pravděpodobnost toho, že

  i) mezi vybranými kartami bude právě jedno eso,

  ii) nebude ani jedno eso,

  iii) bude alespoň jedno eso.

- Ideální plyn obsahuje stejný počet dvou druhů molekul $N_1 \equiv N_2 \equiv N$. Vypočtěte pravděpodobnost toho, že také v polovině směsi molekul bude stejný počet molekul látek 1 a 2.

- Pomocí matematické indukce dokažte platnost binomické věty.

Literatura

[1] Beran L., Ondráčková I.: Prověřte si své matematické nadání, SNTL Praha 1988

[2] Petáková J., Matematika příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus Praha 1998

[3] Bušek I., Řešené maturitní příklady z matematiky, SPN Praha 1985

[4] Kvasnica J., Matematický aparát fyziky, Academia Praha 1997