Domácí cvičení

1) Zjednodušte následující výrazy

$$\frac{m-\frac{4}{m}}{m+2},\quad \frac{\frac{x^4-y^2}{x^2y^2}}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{2x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)},\quad \frac{x^2-8x+16}{\frac{x+2}{2x+1}-\frac{2x^2+2x-2}{4x^2-2x+1}},\quad 6x+$$
$$+\left(\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x+2}\right)\div\frac{4x}{x^4-2x^3+8x-16}$$

2) Určete definiční obory funkcí: $f: y=\log_a\frac{4}{x-3},\ 0\langle a\langle 1,\quad f: y=\frac{1}{2^{\cos x}}$

3) Načrtněte grafy následujících funkcí:
$\cos x,\ \sin x,\ \sin 2x,\ x^2,\ \log x,\ \ln x,\ e^x,\ e^{-x},\ |\sin x|,\ |\ln x|,\ \tan x,\ \tan|x|.$

4) Řešte rovnici $1+\frac{a^2-1}{x}=a$ s parametrem $a\in\Re$.

5) Určete *a,* resp. *b, c* tak, aby pro kořeny $x_1=2x_2$ (vzpomenete si na Viètovy

$ax^2-42x+8=0$

vztahy?): $25x^2-45x+c=0$

$9x^2+bx+2=0$

6) Napište pomocí parametrů všechny kvadratické rovnice, jejichž kořeny jsou

$x_1=r^2+s^2,\ x_2=2rs$

samy dány pomocí parametrů $r,\ s\in\Re$:

$x_1=r+s,\ x_2=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}$

7) Řešte v $\Re$ následující rovnice:
$3^x+3^{x+2}+3^{x+3}=80,\ \sqrt[2x+7]{4^{13-x}}=1024,\ \log_3(x+6)+\log_3(x-2)=0,$
$\log_4^2(x^2+1)-3\log_4(x^2+1)-4=0,\ 3^{2\log x}=729,\ 4\tan^2 x+3\tan x-7=0,$
$2^{5x}\cdot 2^x=\frac{1}{4^2},\ \sin x+\cos x=\frac{1}{2},\ \tan x-3\tan 3x=0,$
$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin 2x=1+\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos 2x,\quad \sin x\cdot(1-\cos 2x),$
$\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x=0.$

8) Rozumíte opravdu logaritmům a umíte s nimi pracovat? Tak bez použití kalkulaček (ano, bude to těžké) vypočtěte: $\log 3=?$, víte-li, že
$10^{1/2}=3{,}162\quad 10^{1/5}=1{,}585$
$10^{1/3}=2{,}154\quad 10^{1/6}=1{,}468.$
$10^{1/4}=1{,}778\quad 10^{1/7}=1{,}389$

9) Bez použití kalkulačky vypočítejte následující součin:
$81\cdot 45\cdot 36\cdot 27\cdot 24=?$ při této příležitosti by jste mohli potřebovat logaritmické tabulky. Ať se vám výpočet podaří či ne jistě nebudete závidět svým předchůdcům, kteří neměli možnosti současné výpočetní techniky a na

druhou stranu snad poznáte, jak mocný nástroj pro „ruční“ počítání logaritmy jsou. Pokud by se vám předešlý příklad zdál odtržený od praxe a jednoduchý můžete se pokusit o výpočet, např. 25!.

n	log(n)	n	log(n)	n	log(n)
1	0,000	4	0,602	7	0,845
2	0,301	5	0,699	8	0,903
3	0,477	6	0,778	9	0,945

10) Zakreslete do Gaussovy roviny následující komplexní čísla a určete k nim čísla komplexně sdružená, absolutní hodnotu (modul) a jejich modul: $2,\ 3i,\ 2+4i,\ -1+i,\ 3-2i, 1+2i.$

11) Pokuste se dokázat následující tvrzení: Pro každé $z \in \mathbf{C}$ platí $z \cdot z^* \in \Re$, kde z^* označuje číslo komplexně sdružené k číslu z.

12) Upravte komplexní čísla: $\dfrac{10}{2-i},\ \dfrac{7-i}{4+2i},\ \dfrac{i+2}{i-2}-\dfrac{1-i}{1+3i},\ \dfrac{\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i+1}}{\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i+1}}.$

13) Kolik různých přirozených čísel je možné utvořit z číslic 0,1,2,3,4. smí-li každá tato číslice být v čísle obsazena nejvýš jednou?

14) V urně je šest lístků téhož tvaru očíslovaných 1,2,...,6. Kolika různými způsoby je lze vytáhnout, jestliže se tažený lístek do urny nevrací a přihlíží se k pořadí, v jakém byly lístky taženy?

15) Kolik různých vrhů lze provést a) dvěma, b) třemi kostkami, je-li na každé ze šesti stěn 1 až 6 teček?

16) Zjistěte počet přirozených pěticiferných čísel, která lze utvořit z číslic 1,2,5,6,8 v případě, že se číslice nesmějí opakovat. Poté určete pravděpodobnost, že namátkou vybrané číslo z takto utvořených pěticiferných čísel je dělitelné a) pěti, b) čtyřmi.

17) Ze šesti mužů a čtyř žen se má vybrat sedmičlenná skupina: a) Kolika způsoby je to možné? b) Kolika způsoby je to možné, jestliže v ní mají být právě dvě ženy? c) Vypočítejte pravděpodobnost, že v náhodně vybrané sedmičlenné skupině budou alespoň tři ženy.

18) Jaká je pravděpodobnost, že ze sady důkladně promíchaných mariášových karet dostaneme ze sedmi karet alespoň šest stejné barvy? Mariášové karty obsahující osm karet v každé ze čtyř barev.

19) Napište osovou rovnici elipsy se středem v počátku, procházející body $M = [8, 3], N = [6, 4]$. Určete také ohniska elipsy.

20) Délky stěnových úhlopříček kvádru jsou v poměru $\sqrt{10} : \sqrt{17} : 5$. Určete rozměry kvádru, je-li jeho objem V=96cm³.

21) Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC $\left(|\angle BCA| = \pi/2\right)$, kde $|BC| = a, |AC| = b, |AB| = c$. Vypočítejte poměr objem tří těles, která vzniknout rotací tohoto trojúhelníku postupně kolem každé jeho strany.

22) Určete poloměr a střed kružnice opsané rovnoramennému lichoběžníku, jsou-li zadány obě základny a výška.

23) Parabola $(x-3)^2 = 2p(y+2)$ má tečnu $x + y + 2 = 0$. Určete parametr p a souřadnice dotyku T. (Malá nápověda: nezapomeňte, že tečna má s parabolou společný jediný bod.)

24) Na elipse s poloosami délky 5 mm, 4 mm najděte všechny body, jejichž vzdálenost od jednoho z ohnisek je 3 mm.

25) Na parabole najděte všechny body, jejichž vzdálenost od vrcholu paraboly je stejná jako vzdálenost ohniska od řídící přímky.