Řešení testu

1. Upravte algebraický výraz $\dfrac{x-1}{x^2+2x}+\dfrac{2x}{x^2-4}-\dfrac{3(x+1)}{x^2-2x}$.

Řešení: Výraz upravíme a převedeme na společného jmenovatele

$$
\begin{aligned}
&\frac{x-1}{x^2+2x}+\frac{2x}{x^2-4}-\frac{3(x+1)}{x^2-2x}=\\
&=\frac{x-1}{x(x+2)}+\frac{2x}{(x-2)(x+2)}-\frac{3(x+1)}{x(x-2)}=\\
&=\frac{(x-1)(x-2)+2x^2-3(x+1)(x+2)}{x(x+2)(x-2)}=\\
&=\frac{x^2-3x+2+2x^2-3(x^2+3x+2)}{x(x+2)(x-2)}=\\
&=\frac{x^2-3x+2+2x^2-3x^2-9x-6)}{x(x+2)(x-2)}=\\
&=\frac{-4(3x+1)}{x(x-2)(x+2)}.
\end{aligned}
$$

2. Zapište definiční obor reálné funkce $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x}{3-2x}}$.

Řešení: Definiční obor logaritmu jsou kladná reálná čísla. Musí tedy být

$$\frac{x}{3-2x}>0.$$

Čitatel má kořen v 0, jmenovatel v $3/2$. V intervalu $(-\infty,0)$ je výraz záporný, v intervalu $(0,3/2)$ kladný a v intervalu $(3/2,\infty)$ zase záporný. Definiční obor funkce je tedy $(0,3/2)$.

3. Řešte v reálných číslech rovnici $\sqrt{x-7}-\sqrt{5-x}=3$.

Řešení: Definiční obor druhé odmocniny jsou nezáporná reálná čísla. Musí tedy platit $x\geq 7$ a $x\leq 5$, což se navzájem vylučuje. Rovnice tedy nemá řešení.

4. Jeden dělník potřebuje na opracování součástky o 7 minut méně než druhý dělník. Kolik součástek vyrobí každý z nich za 4 hodiny, když první za ten čas vyrobí o 28 součástek více?

Řešení: Dobu, kterou potřebuje první dělník k opracování jedné součástky označíme x minut, druhý dělník potom potřebuje k opracování součástky $x+7$ minut. Za čtyři hodiny (tzn. 240 minut) opracuje první dělník $240/x$ součástek a druhý dělník $240/(x+7)$ součástek. Protože první dělník vyrobí o 28 součástek více než druhý, musí platit

$$
\begin{aligned}
\frac{240}{x} - \frac{240}{x+7} &= 28 \\
\frac{1}{x} - \frac{1}{x+7} &= \frac{7}{60} \\
\frac{x+7-x}{x(x+7)} &= \frac{7}{60} \\
\frac{7}{x(x+7)} &= \frac{7}{60} \\
\frac{1}{x^2+7x} &= \frac{1}{60} \\
x^2+7x-60 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2+4.60}}{2} \\
x_{1,2} &= \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} \\
x_{1,2} &= \frac{-7 \pm 17}{2} \\
x_1 = 5 \quad x_2 &= -12.
\end{aligned}
$$

Smysl má zřejmě pouze kladné řešení $x = 5$ minut. Tedy první dělník opracuje součástku za 5 minut. Za čtyři hodiny vyrobí $240/5 = 48$ součástek. Druhý dělník opracuje jednu součástku za $5 + 7 = 12$ minut. Za čtyři hodiny vyrobí $240/12 = 20$ součástek.

5. V oboru reálných čísel řešte následující soustavu nerovnic

$$4x - 3 \leq 2x + 3, \qquad 3 - x < 2x + 7.$$

Řešení: Nerovnice musí být splněny zároveň, tedy

$$
\begin{aligned}
4x - 3 &\leq 2x + 3 & \qquad 3 - x &< 2x + 7 \\
2x &\leq 6 & -4 &< 3x \\
x &\leq 3 & -4/3 &< x
\end{aligned}
$$

Celkem tedy $x \in (-4/3, 3]$.

6. Na jakou výši vzroste vklad 7.520 Kč za 35 let, je-li roční úroková sazba 5 %?

Řešení: Jedná se o geometrickou posloupnost s počátečním členem $x = 7520$ a kvocientem $q = 1.05$. Za 35 let tedy vzroste vklad na $7520.(1.05)^{35} = 41480$ Kč.

7. Řešte rovnici $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

Řešení: K řešení využijeme součtové vzorce (zejména $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ a $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$)

$$\begin{gathered}
\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x \\
\sin x + 2\sin x\cos x + \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x = 1 + \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \\
\sin x + 2\sin x\cos x + 2\sin x\cos^2 x + \cos^2 x\sin x - \sin^3 x = \\
= 1 + \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \\
\sin x(1 + 2\cos x + 2\cos^2 x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x) = \\
= 1 + \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x \\
\sin x(2\cos x + 4\cos^2 x) = \cos x + 2\cos^2 x \\
2\sin x\cos x(1 + 2\cos x) - \cos x(1 + 2\cos x) = 0 \\
(2\sin x - 1)\cos x(1 + 2\cos x) = 0
\end{gathered}$$

Součin tří funkcí je roven nule, je-li alespoň jeden součinitel roven nule, tedy

$$\sin(x) = 1/2 \quad \text{nebo} \quad \cos x = 0 \quad \text{nebo} \quad \cos x = -1/2.$$

Z toho plynou následující řešení

$x = \pi/6 + 2k\pi,\ x = 5\pi/6 + 2k\pi,\ \ x = \pi/2 + k\pi,\ \ x = 2\pi/3 + 2k\pi,\ x = 4\pi/3 + 2k\pi.$

8. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla

$$\left(\frac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right)^2 - \left(\frac{1-2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}\right)^2.$$

Řešení: Upravíme na společného dělitele

$$\begin{gathered}
\left(\frac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right)^2 - \left(\frac{1-2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}\right)^2 = \\
= \frac{(1+2\mathrm{i})^4 - (1-2\mathrm{i})^4}{(1-2\mathrm{i})^2(1+2\mathrm{i})^2} = \\
= \frac{[(1+2\mathrm{i})^2 - (1-2\mathrm{i})^2][(1+2\mathrm{i})^2 + (1-2\mathrm{i})^2]}{[(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})]^2} = \\
= \frac{(8\mathrm{i})(-6)}{5^2} = -48/25\mathrm{i}.
\end{gathered}$$

Je tedy reálná část nulová a imaginární rovna $-48/25$.

9. Kolik různých signálů lze vytvořit z 5 praporků různých barev, jestliže každý signál lze utvořit umístěním jednoho až pěti praporků vedle sebe?

Řešení: Napřed určíme kolika způsoby lze poskládat pět praporků pěti různých barev. První praporek je možno volit 5 způsoby, druhý 4 způsoby, atd. Podobně budeme postupovat i pro menší počet praporků. Celkem tedy pro počty možností dostaneme

5 praporků:	5.4.3.2.1	= 120
4 praporky:	5.4.3.2	= 120
3 praporky:	5.4.3	= 60
2 praporky:	5.4	= 20
1 praporek:	5	= 5
Celkem:		= 325

Různých signálů lze tedy vytvořit 325.

10. Dokažte úplnou indukcí, že součet čtverců prvních n přirozených čísel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Řešení: Ověříme dosazením, zda vzorec platí pro malá n. Např. pro $n = 1$ dostaneme $1 = 1$, pro $n = 2$ zase $5 = 5$, atd. Předpokládejme obecně, že vzorec platí až po $n - 1$ a ukážeme, že platí pro n.

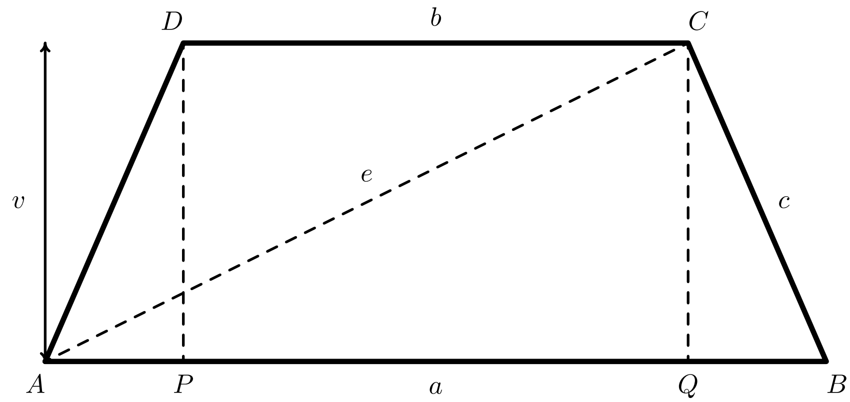
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + n^2 &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2 = \\ = \frac{n[(n-1)(2n-1)+6n]}{6} &= \frac{n[2n^2-3n+1+6n]}{6} = \\ = \frac{n[2n^2+3n+1]}{6} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \end{aligned}$$

11. V rovnoramenném lichoběžníku je základna $b = 19$ cm, výška $v = 12$ cm a úhlopříčka $e = 27$ cm. Určete jeho úhly a zbývající strany. Proveďte rovněž konstrukci.

Řešení: Náčrt situace je na Obr. 1. Pravoúhlé trojúhelníky AQC a PBD jsou shodné, z Pythagorovy věty je tedy

$$|PB| = |AQ| = \sqrt{e^2 - v^2} \approx 24.2\,\text{cm}, \quad |QB| = |AP| = |AQ| - b \approx 5.2\,\text{cm},$$

$$|AB| = a = 2\sqrt{e^2 - v^2} - b \approx 29.4\,\text{cm}.$$



Obrázek 1: Pravidelný lichoběžník

Dále využijeme pravoúhlého trojúhelníka QBC k výpočtu strany c

$$c = \sqrt{v^2 + \left(\sqrt{e^2 - v^2} - b\right)^2} \approx 13.0\,\mathrm{cm}.$$

Dále spočteme velikost úhlu QBC, např. jako

$$\frac{v}{c} = \sin|\angle QBC|, \quad |\angle QBC| \approx 67°$$

Úhel PAD je shodný s úhlem QBC, také úhly ADC a DCB jsou shodné. Spočteme je například s uvážením skutečnosti, že součet vnitřních úhlů čtyřúhelníka je 360°.
Konstrukce lichoběžníka:

1. Zkonstruujeme úsečku CD o velikosti b.
2. Ve vzdálenosti v od úsečky CD zkonstruujeme přímku p.
3. Zkonstruujeme kružnici K se středem v C a poloměrem e.
4. Bod A je průsečíkem přímky p a kružnice K takovým, že úhel DCA je ostrý.
5. Zkonstruujeme kružnici L se středem v D a poloměrem e.
6. Bod B je průsečíkem přímky p a kružnice L takovým, že úhel CDB je ostrý.

Tím je konstrukce lichoběžníka ukončena.

12. Určete směrnici k v rovnici přímky $y = kx + 5$, má-li její graf vzdálenost od počátku $\sqrt{5}$.

Řešení: Rovnice přímky kolmé na přímku $y = kx + 5$ a procházející počátkem soustavy souřadnic je

$$y = -\frac{x}{k}.$$

Pro průsečík těchto dvou přímek získáme rovnici

$$-\frac{x}{k} = kx + 5.$$

Čtverec vzdálenosti průsečíku od počátku soustavy souřadnic má být 5, tedy

$$x^2 + y^2 = 5, \quad x^2 + \left(-\frac{x}{k}\right)^2 = 5.$$

Získáme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} -\frac{x}{k} &= kx + 5 \\ x^2 + \left(-\frac{x}{k}\right)^2 &= 5. \end{aligned}$$

Chceme spočíst k, vyjádříme tedy například x z prvé rovnice a dosadíme do rovnice druhé.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5}{k + \frac{1}{k}} \\ x^2 &= \frac{5}{1 + \frac{1}{k^2}} \\ \frac{25}{\left(k + \frac{1}{k}\right)^2} &= \frac{5}{1 + \frac{1}{k^2}} \\ \frac{5}{k^2 + 2 + \frac{1}{k^2}} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2}} \\ 5k^2 + 5 &= k^4 + 2k^2 + 1 \\ (k^2 - 4)(k^2 + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Druhý součinitel poslední rovnice nemá v reálném oboru řešení, první součinitel má řešení $k = \pm 2$.