Domácí cvičení – výběr řešení

1)

$$\frac{m-\frac{4}{m}}{m+2}=\frac{\frac{m^2-4}{m}}{m+2}=\frac{(m^2-4)}{m(m+2)}=\frac{(m+2)\cdot(m-2)}{m(m+2)}=\underline{\underline{\frac{(m-2)}{m}}},\ m\neq 0\,.$$

$$\frac{\frac{x^4-y^2}{x^2y^2}}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{2x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)}=\frac{\frac{x^4-y^2}{x^2y^2}}{\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)\left(\frac{y^2-2xy+x^2}{y^2}\right)}=\frac{\frac{x^4-y^2}{x^2y^2}}{\frac{(x^2+y^2)(y^2-2xy+x^2)}{x^2y^2}}=$$

$$=\frac{x^4-y^2}{(x^2+y^2)(y^2-2xy+x^2)}=\frac{x^4-y^2}{2x^2y^2-2x^3y+x^4+y^4-2y^3x}=\underline{\underline{\frac{x^4-y^2}{(x^2+y^2)^2-2xy(x^2-y^2)}}},$$

$x,y\neq 0.$

$$\frac{x^2-8x+16}{\frac{x+2}{2x+1}-\frac{2x^2+2x-2}{4x^2-2x+1}}=\frac{(x-4)^2}{\frac{(x+2)(4x^2-2x+1)-(2x^2+2x-2)(2x+1)}{(2x+1)(4x^2-2x+1)}}=$$

$$=\frac{(x-4)^2(2x+1)(4x^2-2x+1)}{-(x-4)}=\underline{\underline{-(x-4)(2x+1)(4x^2-2x+1)}},\ x\neq-\frac{1}{2},x\neq 4,\ x\neq\frac{1\pm i\sqrt{3}}{4}$$

2) Určete definiční obory funkcí: $f: y=\log_a\frac{4}{x-3},\ 0\langle a\langle 1..$

Řešení: $\frac{4}{x-3}\rangle 0\Rightarrow x-3\rangle 0\Rightarrow \underline{\underline{x\rangle 3}}\quad Df\in(3,\infty).$

4) Řešte rovnici $1+\frac{a^2-1}{x}=a$ s parametrem $a\in\Re$.

Řešení: $x\neq 0, x+a^2-1=ax\Rightarrow a^2-1=(a-1)x\Rightarrow x=\frac{a^2-1}{a-1}=a+1,\ pro\ a\neq 1,$
$\underline{x\in\Re-\{0\}.}$

A provedeme zkoušku!

5) Určete *a,* resp. *b, c* tak, aby pro kořeny $x_1=2x_2$ (vzpomenete si na Viètovy vztahy?): $ax^2-42x+8=0$.

Řešení: pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $Ax^2+Bx+C=0$, platí $x_1+x_2=-\frac{B}{A}$

$x_1x_2=\frac{C}{A}\Rightarrow 3x_2=\frac{42}{a}\wedge 2x_2^2=\frac{8}{a},x_2=\frac{14}{a}$ dosadíme do druhé rovnice $\frac{392}{a^2}=\frac{8}{a}\Rightarrow \underline{\underline{a=49.}}$ Stejný postup použijeme i pro další dvě rovnice.

6) Napište pomocí parametrů všechny kvadratické rovnice, jejichž kořeny jsou samy dány pomocí parametrů $r,s\in\Re$: $x_1=r^2+s^2$, $x_2=2rs$.

Řešení: rovnici mohu napsat pomocí kořenů následně $(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0 \Rightarrow x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0, tj.$
$x^2-(r^2+s^2+2rs)x+2rs(r^2+s^2)=0 \Rightarrow \underline{\underline{x^2-(r+s)^2+2rs(r^2+s^2)=0.}}$

---

7) Řešte v $\Re$ následující rovnice:

$$3^x+3^{x+2}+3^{x+3}=80, \quad 3^x(1+3^2+3^3)=80 \Rightarrow 3^x=\frac{80}{37}/\log_3 \Rightarrow x=\log_3\frac{80}{37} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{\log 80/37}{\log 3}}}.$$

$$\log_4^2(x^2+1)-3\log_4(x^2+1)-4=0, \quad sub.\ y=\log_4(x^2+1) \to y^2-3y-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2}=\left\langle \begin{matrix}4\\-1\end{matrix}\right. \Rightarrow 4=\log_4(x^2+1) \Rightarrow \log_4 4^4=\log_4(x^2+1) \Rightarrow 4^4=x^2+1 \Rightarrow \underline{\underline{x=\pm\sqrt{4^4-1}}}$$

$$-1=\log_4(x^2+1) \Rightarrow \log_4 4^{-1}=\log_4(x^2+1) \Rightarrow \underline{\underline{x=\pm\sqrt{4^{-1}-1}\notin\Re}}$$

$$\sqrt[2x+7]{4^{13-x}}=1024 \Rightarrow \sqrt[2x+7]{4^{13-x}}=4^5 \Rightarrow 4^{13-x}=4^{5(2x+7)} \Rightarrow 13-x=10x+35 \Rightarrow \underline{\underline{x=-2}}.$$

$$2^{5x}\cdot 2^{x^2}=\frac{1}{4^2} \Rightarrow 2^{5x}\cdot 2^{x^2}=2^{-4} \Rightarrow 5x+x^2+4=0 \Rightarrow \underline{\underline{x_{1,2}=-1;-4.}}$$

8) Máme vypočítat log3, tedy lze psát $\log 3 = x \Rightarrow 3=10^x$ je tedy zapotřebí nalézt takovou mocninu deseti, která by byla rovna třem. Podle pravidel pro práci s mocninami můžeme psát $10^x=10^a\cdot 10^b$, kde x=a+b. Z přiložené tabulky lze zjistit, že vyhovuje součin čísel 2,154*1,389=2,992 a tedy $x=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\underline{\underline{\frac{10}{21}}}$. A vskutku pohled do tabulek či prostý výpočet na kalkulačce potvrdí správnost našeho výsledku.

9) Příklad se řeší podobným způsobem. Zde provedu výpočet 25!. Máme řešit v podstatě následující rovnici:

$$25! = x/\log \Rightarrow \log(25!)=\log x \to \log(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 24\cdot 25)=\log 1+\log 2+\log 3+$$
$$+\ldots+\log 24+\log 25=\log x$$

Což lze upravit

$$0+\log 2+\log 3+2\log 2+\log 5+2\log 3+\log 7+3\log 2+2\log 3+\log 2+$$
$$+\log 5+\log 11+\log 3+2\log 2+\ldots=22\log 2+10\log 3+6\log 5+3\log 7+2\log 11+$$
$$+\log 13+\log 17+\log 19+\log 23=25{,}191$$

Získáme tak součet několika logaritmů, pomocí tabulek získáme číselnou hodnotu levé strany naší rovnice (označme ji q) a opět platí po jejím odlogaritmování $10^q=x \Rightarrow 10^{25{,}191}=10^{25}\cdot 10^{0{,}191}=x$ v tabulkách se podíváme je-li nějaká hodnota blízká hodnotě *0,191*. Zjistíme, že není, nevadí. Hledejme dvě hodnoty jejichž rozdíl dává hodnotu blízkou naší. Ukazuje se, že $\log 3-\log 2=0{,}176\ a\ \log 8-\log 5=0{,}204$ (*) zprůměrováním těchto dvou hodnot se dostanu k číslu velmi blízkému mnou hledanému, tj. 0,190. Odlogaritmuji-li poslední dvě rovnice dostanu 3/2 a 8/5, které po zprůměrování dostanu číslo $10^{0,190} = 1,550$ a dosazením této hodnoty do (*) dostávám výsledek $25! = 1,550 \cdot 10^{25}$. Jen pro zajímavost výsledek získaný kalkulačkou je $1,551 \cdot 10^{25}$. Musíte tedy uznat, že náš ruční výpočet je velmi dobrý.

12)

$$\frac{10}{2-i} = \frac{10}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{10(2+i)}{5} = \underline{\underline{4+2i,}}$$

$$\frac{\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i+1}}{\frac{1}{i-1} + \frac{1}{i+1}} = \frac{\frac{i+1-i+1}{(i-1)(i+1)}}{\frac{i+1+i-1}{(i-1)(i+1)}} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = \underline{\underline{-i}}$$

13) Kolik různých přirozených čísel je možné utvořit z číslic 0,1,2,3,4. Smí-li každá tato číslice být v čísle obsazena nejvýš jednou?

Řešení:

Z daných pěti číslic je možné vytvořit čísla jednociferná až pěticiferná.

-jednociferná: 4,

-dvojciferná: $V(2,5) = \frac{5!}{3!} = 20$, ovšem toto číslo zahrnuje i čísla 01, 02, … což jsou jednociferná, která musíme odečíst tedy dvouciferných je 16.

-trojciferných: $V(3,5) = \frac{5!}{2!} = 60 - V(2,4) = 48$.

-čtyřciferná: $V(4,5) - V(3,4) = \underline{\underline{96}}$

-pěticiferná: $V(5,5) = P(5) - P(4) = \underline{\underline{96}}$, tedy celkem je možné vytvořit 260 přirozených čísel.

14) V urně je šest lístků téhož tvaru očíslovaných 1,2,…,6. Kolika různými způsoby je lze vytáhnout, jestliže se tažený lístek do urny nevrací a přihlíží se k pořadí, v jakém byly lístky taženy?

Řešení:

Úloha se prostě ptá, jak můžeme šestici uspořádat co do pořadí aniž by se jednotlivá čísla opakovala, tedy 6!=720.

15) Kolik různých vrhů lze provést a) dvěma, b) třemi kostkami, je-li na každé ze šesti stěn 1 až 6 teček?

Řešení:

Ad a) hledáme uspořádané dvojice, jejichž prvky se mohou opakovat. Jde tedy o variace s opakováním. $V'(2,6) = 6^2 = \underline{\underline{36}}$ různých vrhů.

Ad b) obdobně jako v prvním příkladě $V'(3,6) = 6^3 = \underline{\underline{216.}}$

16) Zjistěte počet přirozených pěticiferných čísel, která lze utvořit z číslic 1,2,5,6,8 v případě, že se číslice nesmějí opakovat. Poté určete pravděpodobnost, že namátkou vybrané číslo z takto utvořených pěticiferných čísel je dělitelné a) pěti, b) čtyřmi.

Řešení:

Ad a) hledáme způsob kolikrát a jak můžeme uspořádat 5 různých čísel, aby se neopakovala, tj. hledáme permutaci (pořadí) tj. 5!=120.

Ad b) dělitelné pěti jsou ta čísla v našem případě končící 5, ostatní jsou různé. Těchto čtveřic může být 4! $\Rightarrow P = \frac{4!}{5!} = \underline{\underline{0{,}2}}$.

Ad c) dělitelné čtyřmi je-li poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi. Pro námi uvažované čísla tj. 12, 16, 28, 68, 52, 56 tedy šest dvojic. Ostatní čísla mohou být v libovolném pořadí, tzn. jejich počet je 3!. Celkem mám 6 dvojic, kde může být 3! Různých pořadí tedy celkem 6·3! A pravděpodobnost výběru čísla dělitelného 4 je:

$P_4 = \frac{6 \cdot 3!}{5!} = \frac{3}{10} = \underline{\underline{0{,}3}}$.

19) Napište osovou rovnici elipsy se středem v počátku, procházející body $M = [8, 3]$, $N = [6, 4]$. Určete také ohniska elipsy.

Řešení:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{64}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1, \frac{36}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow 64b^2 + 9a^2 = a^2b^2, 36b^2 + 16a^2 = a^2b^2,$$

$$\Rightarrow a = 10, b = 5 \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 100.$$

$$|F_1F_2| = 2e, e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow |F_1 0| = e = \sqrt{a^2 - b^2} = \underline{\underline{5\sqrt{3}}}$$

$$F_1 = [-5\sqrt{3}, 0]$$

$$F_2 = [5\sqrt{3}, 0]$$