Vstupní test
internetový

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

17. května 2007

Na vyřešení testu by Vám mělo stačit 25 minut. K jeho řešení nebudete potřebovat kalkulačky, matematických programů ani nápovědy kamaráda. Test není známkován a slouží pouze Vám k odhalení ,,pravdy" o úrovni Vašich matematických schopností; o schopnosti logicky uvažovat a s pomocí získaných znalostí řešit konkrétní problémy.

Pokud tedy nebudete k řešení přistupovat čestně, nepodvádíte nás, ale sebe a sobě značně zkomplikujete své další studium.

Z následujících řešení u každého příkladu vyberte to, které je podle vás správné–může jich být i více. Máte samozřejmě i volbu ,,Nevím"(takže nemusíte hádat, no není to báječné?) a ,,Jiné než uvedené řešení", které také může být správnou odpovědí.

Mnoho zdaru!

Příklad 1 *Řešte v* $\boldsymbol{R}$ *rovnici* $\log(x+1)+\log(x-1)-\log(x-2)=\log 8.$

Řešení 1 ◯ *a)*

$$\log\frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)}=\log 8 \Rightarrow \frac{x^2-1}{(x-2)}=8$$

$$\Rightarrow x^2-8x+15=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 15}}{2}$$

$$x_{1,2}=(5;3)$$

Nyní provedu zkoušku

$x=5: L=\log 6+\log 4-\log 3=\log\frac{24}{3}=\log 8,$
$P=\log 8$
$L=P$

$x=3: L=\log 4+\log 2-\log 1=\log 8,$
$P=\log 8$
$L=P$

———————————————————————————————

◯ *b) Úpravou levé a pravé strany získám následující tvar:*

$$\log x+\log 1+\log x-\log 1-\log x+\log 2=\log 8$$

$$\log x+\log 2=\log 8 \Rightarrow \log x=\log 6 \Rightarrow x=6$$

Nyní provedu zkoušku:

$$L = \log 6 + \log 2 = \log 8,$$
$$P = \log 8 \Rightarrow L = P.$$

◯ *c) Vzhledem k tomu, že se logaritmus vyskytuje na obou stranách mohu obě strany lehce odlogaritmovat.*

$$\log(x+1) + \log(x-1) - \log(x-2) = \log 8$$
$$(x+1) + (x-1) - (x-2) = 8 \Rightarrow x = 6.$$

Nyní provedu zkoušku:

$$L: \ \log 7 + \log 5 - \log 4 = \log 8$$
$$P: \ \log 8$$
$$L = P.$$

◯ d) Nevím.

◯ e) Jiné než uvedené řešení.

Příklad 2 *Řešte v* $\mathbf{C}$ *rovnici* $z^2 - 4\mathrm{i}z - 3 = 0$.

Řešení 2 ◯ *a) Řešení musím hledat ve tvaru binomické rovnice:*

$$z^2 - 4\mathrm{i}z - 3 = (z - 2\mathrm{i})^2 - 4\mathrm{i}^2 - 3 = (z - 2\mathrm{i})^2 + 1 = 0.$$

Zavedu nyní substituci $y = z - 2\mathrm{i}$, *pak rovnice přejde na tvar:*

$$y^2 + 1 = 0.$$

Řešení binomické rovnice má tvar:

$$y_1 = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{i}$$
$$y_2 = \cos\frac{3}{2}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{2}\pi = -\mathrm{i}.$$

Dílčí výsledky dosadím do substituce a získám tak konečný výsledek.

$$y = z - 2\mathrm{i} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 3\mathrm{i}, \\ z_2 = \mathrm{i}. \end{cases}$$

Provedu zkoušku správnosti řešení:

pro první kořen: $z = 3\mathrm{i}$ $L = (3\mathrm{i})^2 - 4\mathrm{i}(3\mathrm{i}) - 3 = -9 + 12 - 3 = 0$
$P = 0$
$L = P.$

pro druhý kořen: $z = i$ $L = (\mathrm{i})^2 - 4\mathrm{i}(\mathrm{i}) - 3 = -1 + 4 - 3 = 0$
$P = 0$
$L = P.$

——

◯ *b)*

Vzhledem k tomu, že se jedná o kvadratickou rovnici, řeším podle zavedeného vzorce pro kořeny kvadratické rovnice

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4\mathrm{i} \pm \sqrt{-16 + 12}}{2} = \frac{4\mathrm{i} \pm 2\mathrm{i}}{2}$$

$$z_{1,2} = \begin{cases} \mathrm{i} \\ 3\mathrm{i} \end{cases}$$

Provedu zkoušku správnosti řešení:

pro první kořen: $z = 3\mathrm{i}$
$L = (3\mathrm{i})^2 - 4\mathrm{i}(3\mathrm{i}) - 3 = -9 + 12 - 3 = 0$
$P = 0$
$L = P.$

pro druhý kořen: $z = \mathrm{i}$
$L = (\mathrm{i})^2 - 4\mathrm{i}(\mathrm{i}) - 3 = -1 + 4 - 3 = 0$
$P = 0$
$L = P.$

◯ *c)*
Komplexní číslo $z \in \boldsymbol{C}$ *vyjádřím v algebraickém tvaru.*

$$z = x + \mathrm{i}y \Rightarrow (x + \mathrm{i}y)^2 - 4\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) - 3 = 0$$
$$x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 - 4\mathrm{i}x + 4y - 3 = 0$$
$$x^2 - y^2 + 4y - 3 = 0$$
$$2xy - 4x = 0$$

Řeším poslední soustavu dvou rovnic.

$$x(y-2) = 0 \Rightarrow y = 2 \vee x = 0$$

pro $y = 2$ *má první rovnice tvar* $x^2 + 1 = 0 \ \Rightarrow$ *řešení není v* $\boldsymbol{R}$. *Pro* $x = 0$ *je* $-y^2 + 4y - 3 = 0 \Rightarrow$

$$y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = (1; 3) \Rightarrow$$
$$z_1 = \mathrm{i}$$
$$z_2 = 3\mathrm{i}$$

Provedu nyní zkoušku správnosti řešení:

pro první kořen: $z = 3\mathrm{i}$ $L = (3\mathrm{i})^2 - 4\mathrm{i}(3\mathrm{i}) - 3 = -9 + 12 - 3 = 0$
$P = 0$
$L = P.$

pro druhý kořen: $z = \mathrm{i}$ $L = (\mathrm{i})^2 - 4\mathrm{i}(\mathrm{i}) - 3 = -1 + 4 - 3 = 0$
$P = 0$
$L = P.$

◯ *d) Nevím.*

◯ *e) Jiné než uvedené řešení.*

Příklad 3 *Rozhodněte, zda následující úvaha dává správný výsledek:*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+2}\right) = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

pak můžeme vypočítat následující integrál:

$$\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{(x+2)^2} = \left[-\frac{1}{(x+2)}\right]_{-3}^{-1} = \frac{-1}{1} - (\frac{-1}{(-1)}) = -2 \text{ pl.j.}$$

Řešení 3 ◯ *a) V postupu je chyba, je zapotřebí obrátit integrační meze a výsledek vyjde správně (a tedy kladně),*

——

◯ *b) Integrál neexistuje ve smyslu Riemannovy definice,*

——

-

◯ *c) Výsledek je sice absurdní, leč matematicky správný, neboť postup je naprosto korektní,*

——

◯ *d) Nevím.*

——

◯ *e) Postup je špatný, neboť v první hranaté závorce je špatné znaménko.*

——

Příklad 4 *Bakteriální kultura roste tak dlouho, dokud nenaplní Petriho misku podle zákona $F(t) = 1 - e^{-2t}$. Jak rychlý je růst kultury v okamžiku, kdy je miska z poloviny plná?*

Řešení 4 ◯ *a) Nejprve určím čas τ, ve kterém je miska plná z jedné poloviny.*

$$F(\tau) = \tfrac{1}{2} \Rightarrow 1 - e^{-2\tau} = \tfrac{1}{2} \Rightarrow e^{-2\tau} = \tfrac{1}{2}$$
$$\tau = -\tfrac{1}{2} \ln \tfrac{1}{2}.$$

Nyní pro určení rychlosti růstu vypočítám časovou derivaci zadaného vztahu:

$$\frac{d}{dt}F(t) \equiv \dot{F}(t) = 2e^{-2t}$$

a dosadím za $t = \tau \Rightarrow$ rychlost růstu v době polovičního zaplnění misky je $\dot{F}(\tau) = 1$.

◯ *b) Nejprve určím čas τ, ve kterém je miska plná z jedné poloviny.*

$$F(\tau) = \tfrac{1}{2} \Rightarrow 1 - e^{-2\tau} = \tfrac{1}{2} \Rightarrow e^{-2\tau} = \tfrac{1}{2}$$
$$\tau = -\tfrac{1}{2} \ln \tfrac{1}{2} .$$

Nyní pro určení rychlosti růstu (označím $f(t)$) vypočítám časový integrál zadaného vztahu v mezích od nuly do τ:

$$f(t) = \int_0^\tau (1 - e^{-2t})dt = \tau + \frac{1}{2}e^{-2\tau} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}.$$

◯ *c) Nejprve určím čas τ, ve kterém je miska plná z jedné poloviny.*

$$F(\tau) = \tfrac{1}{2} \Rightarrow 1 - e^{-2\tau} = \tfrac{1}{2} \Rightarrow e^{-2\tau} = \tfrac{1}{2}$$
$$\tau = -\tfrac{1}{2} \ln \tfrac{1}{2}.$$

Rychlost růstu určím jako průměrnou časovou hodnotu počátečního a koncového stavu:

$$\frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = \frac{1}{\ln 2}.$$

◯ *d)Nevím.*

◯ *e)Jiné než uvedené řešení.*

Příklad 5 *Předpokládejte, že funkce* $y = x^2$ *je na intervalu* $x \in \langle 1.98, 1.99 \rangle$ *aproximovatelná lineární funkcí. Určete za tohoto předpokladu* $y(1.987)$. *Jaké relativní chyby se při této aproximaci dopouštíme?*

Řešení 5 ◯ *a)*

Lze-li funkci na daném intervalu aproximovat lineární funkcí, pak závislost dané funkce je $y = x$. *Z této závislosti snadno zjistím funkční hodnotu v bodě* $x = 1.987$*; ta je* $y(1.987) = 1.987$. *Chybu (relativní), které se dopustíme aproximací kvadratické funkce na daném intervalu lineární závislostí je*

$$|\frac{y_{lin} - y_{kvad}}{y_{kvad}}| = \frac{3.9482 - 1.9870}{3.9482} \doteq 0.5.$$

Chyba (relativní) je tedy velká a lze říci, že aproximovat kvadratickou funkci na daném intervalu lineární závislostí není vhodné.

———————————————————————————————————————

◯ *b)*

Lze-li funkci na daném intervalu aproximovat lineární funkcí, pak závislost dané funkce je $y = kx$. *Nejprve, ale musím určit funkční hodnoty kvadratické závislosti v počátečním a koncovém bodě, tj.* $y(1.98) = 1.98^2 = 3.9204$ a $y(1.99) = 1.99^2 = 3.9601$. *Nyní určím směrnici přímky (lineární závislosti), procházející těmito body a její posunutí na ose* y. *Směrnice:*

$$k = \frac{(3.9601 - 3.9204)}{(1.99 - 1.98)} = 3.97$$

$$q = y = kx \Rightarrow q = 3.9601 - 3.97 \cdot 1.99 = 3.9402$$

Nyní mám určenou lineární závislost

$$y = 3.97x - 3.9402$$

Dosazením do této rovnice $x = 1.987 \Rightarrow y = 3.9482$. *Nyní ještě stanovím relativní chybu aproximace:*

$$|\frac{y_{lin} - y_{kvad}}{y_{kvad}}| < 5.4 \cdot 10^{-6}.$$

To znamená, že v rámci zaokrouhlovacích chyb je aproximace dané funkce na daném intervalu velmi vhodná.

———————————————————————————————————————

◯ *c) Danou funkci nelze aproximovat lineární funkcí, neboť grafem funkce je parabola a nikoli přímka, tím pádem nemá ani otázka smysl.*

◯ *d) Jiné než uvedené řešení.*

◯ *e) Nevím*

Příklad 6 *Rozhodněte o počtu řešení následující soustavy rovnic:*

$$(\aleph)\quad \begin{aligned} 2x^0 + \ x^1 - \ x^2 &= 0 \\ x^0 + \ x^1 + 2x^2 &= 4 \\ 4x^0 + 3x^1 + 3x^2 &= 5 \end{aligned}$$

Řešení 6 ◯ *a) soustava má právě jedno řešení, protože jsme schopni úpravami soustavu ($\aleph$) upravit tak, že vyjádříme postupně každou neznámou;*

———————————————————————————————————————

◯ *b) soustava ($\aleph$) má nekonečně mnoho řešení, protože úpravami dospějeme k situaci, kdy proměnná x^0 je volnou a ostatní proměnné lze vyjádřit pomocí této proměnné;*

———————————————————————————————————————

◯ *c) soustava nemá žádné řešení, protože úpravami soustavy ($\aleph$) dostanu výraz se nula na jedné straně nula rovná nenulovému číslu;*

———————————————————————————————————————

◯ *d)Jiné než uvedené řešení.*

———————————————————————————————————————

◯ *e) Nevím.*

———————————————————————————————————————-

Příklad 7 *V osudí je jedna bílá, dvě zelené, tři červené, čtyři modré kuličky. jaká je pravděpodobnost, že při vylosování čtyř kuliček budou všechny mít rozdílné barvy? Jaká je pravděpodobnost, že alespoň tři kuličky budou mít stejnou barvu?*

Řešení 7 ○ *a) Nejprve zodpovím na první otázku. Ptáme se na pravděpodobnost vylosování (B, Z, Č, M). Jde tedy jen o to kolika různými způsoby můžeme vytáhnout tuto čtveřici. Jde tedy o permutaci této čtveřice a to je možné 4! způsoby. Pravěpodobnost tohoto jevu je*

$$p_{ruzne} = \frac{4!}{\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}} = 0,114$$

V druhé části máme určit pravděpodobnost s jakou lze vytáhnout tři kuličky stejné barvy. Zde máme dvě možnosti výběru: musíme určit počet možností kterými lze vybrat ze třech červených tři a ze čtyřech modrých vybrat opět tři. V prvním případě ke třem červeným vybíráme $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ *a k modrým pak* $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Pravděpodobnost vytažení tří kukiček jedné barvy tak je dána podílem:*

$$p_{3stejne} = \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}} = 0,152.$$

————————————————————————————————————-

○ *b)*

Pravděpodobnost vytažení bílé kuličky je $\frac{1}{10}$*, zelené* $\frac{2}{10}$*, červené* $\frac{3}{10}$ *a modré* $\frac{4}{10}$*. To znamená, že pravděpodobnost vylosování čtyřech kuliček různých barev je dána jako součin toho, že danou barvu vytáhnu a ostatní nikoli, tedy*

$$\begin{aligned} p_{ruzne} &= \frac{(\frac{1}{10})(1-\frac{2}{10})(1-\frac{3}{10})(1-\frac{4}{10}) + (\frac{2}{10})(1-\frac{1}{10})(1-\frac{3}{10})(1-\frac{4}{10})}{10} + \\ &+ \frac{(\frac{3}{10})(1-\frac{2}{10})(1-\frac{1}{10})(1-\frac{4}{10}) + (\frac{4}{10})(1-\frac{2}{10})(1-\frac{3}{10})(1-\frac{1}{10})}{10} = \\ &= 0,044 \end{aligned}$$

Nyní určím pravděpodobnost, že vylosuji tři kuličky stejné barvy. Postup bude obdobný jako v předchozím případě.

$$p_{3stejne} = \frac{(\frac{1}{10})(1-\frac{2}{10})(1-\frac{3}{10})(1-\frac{4}{10}) + 3(\frac{3}{10}) + 3(\frac{4}{10})}{10} = 0,213$$

—————————————————————————————————————-

◯ *c)*

Pravděpodobnost vytažení bílé kuličky je $\frac{1}{10}$*, zelené* $\frac{2}{10}$*, červené* $\frac{3}{10}$ *a modré* $\frac{4}{10}$*. To znamená, že pravděpodobnost vylosování čtyřech kuliček různých barev je dána jako součin jednotlivých pravěpodobností (nesmím ovšem zapomenout, že některé barvy jsou zastoupeny více kuličkami a proto musímtento počet ve výpočtu zohlednit), tj.*

$$p_{ruzne} = (\frac{1}{10})(2\frac{2}{10})(3\frac{3}{10})(4\frac{4}{10}) = 0,057.$$

Odpověď na druhou otázku je následovná: musíme zjistit kolika způsoby může nastat situace, kdy tři kuličky budou mít stejnou barvu, tj. (1B,3Č), 2×(1Z,3Č), 4×(1M,3Č), 3×(1Č,3M)a 1×(1M,3M). Celkem tedy máme jedenáct možností. Pravděpodobnost dostaneme jako podíl:

$$p_{3stejne} = \frac{11}{10} = 1,1.$$

—————————————————————————————————————

◯ *d)*

Nevím.

—————————————————————————————————————

◯ *e)*

Jiné než uvedené řešení.

—————————————————————————————————————

Literatura

[1] Beran L., Ondráčková I.: Prověřte si své matematické nadání, SNTL Praha 1988

[2] Petáková J., Matematika příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus Praha 1998

[3] Kolektiv autorů: Matematika pro gymnázia, Prometheus Praha 2004

[4] Kolektiv autorů: Odmaturuj z matematiky 1–3, Didaktis Brno 2004

Autoři projektu byli při tvorbě testu inspirováni právě uvedenou literaturou.