

Vstupní test

[Čas na vypracování: 90 minut]

1. Upravte algebraický výraz $\frac{x-5}{x^2-1} + \frac{x+5}{x^2+2x+1} - \frac{2x+6}{x^2-2x+1}$.

Řešení: $\frac{-4(3x^2+6x-1)}{(x-1)^2(x+1)^2}$

2. Řešte v oboru reálných čísel rovnici $\log_2^2(x^2+1) + 2 = 3 \log_2(x^2+1)$.

Řešení: $x = \pm 1, \pm \sqrt{3}$.

3. Řešte rovnici $\cos(x + \frac{\pi}{2}) + \sin 2x = 1 + \sin(x - \frac{\pi}{2}) + \cos 2x$.

Řešení: $x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$

4. Upravte výraz s komplexními čísly $\frac{\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i+1}}{\frac{1}{i-1} + \frac{1}{i+1}}$.

Řešení: $-i$.

5. V oboru reálných čísel řešte nerovnost $\frac{4x+2}{x+2} \geq 3$.

Řešení: $x \in (-\infty, -2) \cup [4, \infty)$.

6. V osudí je jedna bílá kulička, dvě zelené, tři červené, čtyři modré kuličky. Jaká je pravděpodobnost, že při vylosování čtyř kuliček budou všechny mít rozdílné barvy? Jaká je pravděpodobnost, že alespoň tři kuličky budou mít stejnou barvu?

Řešení: Pravděpodobnost rozdílné barvy čtyř kuliček: $\frac{4!}{\binom{10}{4}} = \frac{4}{35}$.

Pravděpodobnost, že alespoň tři kuličky mají stejnou barvu: $\frac{7+25}{210} = \frac{16}{105}$.

7. V reálném oboru řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2z^2 &= 1 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 &= 1 \\ 2x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Kolik má soustava různých řešení?

Řešení: $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$, tedy celkem 8 řešení.

- 8.** Úhlopříčky kosočtverce mají velikost 10 cm a 24 cm. Určete poloměry a středy kružnic opsaných všem pravoúhlým trojúhelníkům, které jsou ohraničeny stranami a úhlopříčkami kosočtverce. Spočítejte a proveďte rovněž konstrukci.

Řešení: Kosočtverec je složen ze čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků. Středy opsaných kružnic jsou totožné se středy stran kosočtverce, jejich poloměry jsou rovny polovině velikosti strany tzn. $\frac{13}{2}$ cm. Soustavu souřadnic zvolím např.: Počátek splývá s jedním z vrcholů a jedna strana splývá s osou x , tak, že celý obrazec se nachází v prvním kvadrantu a delší úhlopříčka má kladnou směrnici. Pak souřadnice středů jsou (v cm)

$$\left[\frac{13}{2}, 0\right], \left[13 + \frac{119}{26}, \frac{60}{13}\right], \left[\frac{13}{2} + \frac{119}{13}, \frac{120}{13}\right], \left[\frac{119}{26}, \frac{60}{13}\right]$$

Konstrukce je zřejmá ze skutečnosti, že úhlopříčky se navzájem půlí a jsou na sebe kolmé.

- 9.** Na elipse s poloosami délky 5 cm a 4 cm najděte všechny body, jejichž vzdálenost od jednoho z ohnisek je 4 cm.

Řešení: Počátek souřadnic zvolíme např. ve středu elipsy, delší poloosa nechť splývá s osou x . Potom dostáváme čtyři řešení $[\pm\frac{5}{3}, \pm\frac{8}{3}\sqrt{2}]$.

- 10.** Určete objem a povrch pravidelného komolého jehlanu, jehož horní a dolní podstavy jsou tvořeny pravidelnými šestiúhelníky o stranách 1 cm a 2 cm a jehož výška je 4 cm.

Řešení: Objem $14\sqrt{3}$ cm³, povrch $6\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{67}}{2}$ cm².