Výstupní test

[Čas na vypracování: 90 minut]

1. V komplexním oboru řešte rovnici $\dfrac{x^2-8x+16}{\dfrac{x+2}{2x+1}-\dfrac{2x^2+2x-2}{4x^2-2x+1}}=0.$

Řešení: Po úpravě $(4-x)(1+8x^3)=0$, tedy $x=4,-\frac{1}{2},\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i},\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

2. Řešte v oboru reálných čísel rovnici $2^{5x}2^{x^2}=\dfrac{1}{4^2}$.

Řešení: $x=-1,-4$.

3. Řešte rovnici $\operatorname{tg} x-3\operatorname{tg} 3x=0$.

Řešení: $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

4. Určete absolutní hodnotu a argument komplexního čísla $\dfrac{\mathrm{i}+2}{\mathrm{i}-2}-\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}$.

Řešení: Označme výraz z, pak $|z|=\frac{2\sqrt{2}}{5}$, $\arg z=-\frac{\pi}{4}$.

5. V oboru reálných čísel řešte soustavu nerovnic

$$\frac{x-2}{x+2}\geq 2,\quad x^2+3>4x.$$

Řešení: $x\in[-6,-2)$.

6. Napište Pythagorovu větu a dokažte, že platí.

Řešení: Např. do čtverce o straně $a+b$ vepíšeme čtverec o straně c. Větší čtverec je tím rozdělen na čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky a menší čtverec. Pro obsahy platí

$$4\tfrac{1}{2}ab+c^2=(a+b)^2\quad\Rightarrow\quad c^2=a^2+b^2.$$

7. Jaká je pravděpodobnost, že ze sady důkladně zamíchaných mariášových karet dostaneme ze sedmi karet alespoň šest od stejné barvy? Mariášové karty obsahují osm karet v každé ze čtyř barev.

Řešení: $\frac{4\left(\binom{8}{7}+\binom{8}{6}24\right)}{\binom{32}{7}}$.

8. V reálném oboru řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} \frac{1}{x^2} & + & \frac{1}{y^2} & - & \frac{2}{z^2} & = & 0\\ \frac{1}{x^2} & - & \frac{2}{y^2} & + & \frac{1}{z^2} & = & 0\\ -\frac{2}{x^2} & + & \frac{1}{y^2} & + & \frac{1}{z^2} & = & 0. \end{array}$$

Řešení: $x=\pm t, y=\pm t, z=\pm t$.

9. Určete podmínku kdy lze rovnoramennému lichoběžníku opsat kružnici. Určete poloměr této opsané kružnice a její střed, jsou-li zadány obě základny.

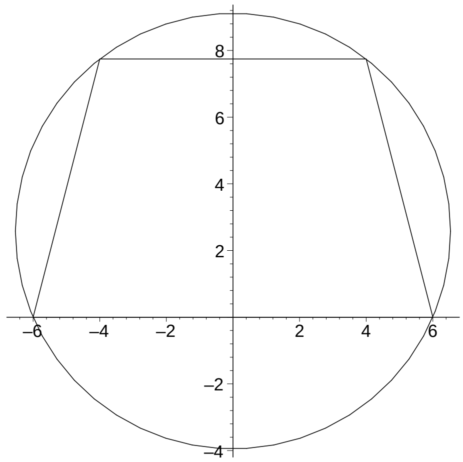
Řešení: Zvolíme souřadné osy tak, aby osa y byla osou symetrie lichoběžníka a osa x procházela jednou základnou lichoběžníka. Délky základen označíme $2a$ a $2b$. Ypsilonová souřadnice středu opsané kružnice je potom

$$\frac{v^2 + b^2 - a^2}{2v}$$

a její poloměr

$$\frac{\sqrt{v^4 + 2v^2(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)^2}}{2v}.$$

Obrázek pro $a = 6$, $b = 4$, $v = 8$.



10. Na parabole najděte všechny body, jejichž vzdálenost od vrcholu paraboly je stejná jako vzdálenost ohniska od řídící přímky.

Řešení: Vzdálenost řídící přímky od ohniska paraboly označíme $2p$. Řídící přímka nechť je rovnoběžná s osou x, vrchol paraboly nechť prochází počátkem soustavy souřadnic a parabola se nachází v polorovině $y \geq 0$. Potom řešením jsou body $[\pm x, y]$, $x = 2p\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2} - 1}, y = 2p(\sqrt{2} - 1)$.