

Zkouškový Test z Matematiky 1

(Čas na řešení: 60 minut)

1. Definujte determinant matice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Dále uveďte alespoň čtyři různé vlastnosti determinantu a spočítejte determinant následující matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bodování: Každá vlastnost za 0,3b, výpočet determinantu za 0,8b.

2. Necht $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T, \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)^T \in \mathbb{R}^3$, tj, \vec{v} a \vec{w} jsou dva trojrozměrné vektory. Definujte a geometricky interpretujte jejich vektorový součin

$$\vec{v} \times \vec{w}.$$

Dále napište alespoň tři vlastnosti vektorového součinu.

Bodování: Definice vektorového součinu za 0,5 bodu, geometrická interpretace za 0,6 bodu, každá vlastnost za 0,3 bodu (maximálně je možno získat 0,9 bodu za vlastnosti).

3. Definujte pojmy funkce nerostoucí a periodická. Definujte konvexnost funkce v bodě x_0 . Uveďte příklad funkce (pomocí grafu i předpisu) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která:

(a) je nerostoucí a není konvexní pro $x > 0$,

(b) je periodická s periodou π a je konvexní na celém svém definičním oboru.

Bodování: Definice nerostoucí funkce za 0,3b, definice periodické funkce za 0,3b, definice konvexnosti za 0,4b, (a) za 0,4b, (b) za 0,6b.

4. Definujte pojmy asymptota funkce $f(x)$ pro $x \rightarrow \pm\infty$. Popište výpočet parametrů asymptoty. Uveďte příklad funkce, která:

(a) má asymptotu $y = -2$ pro $x \rightarrow \infty$,

(b) má asymptotu $y = x$ pro $x \rightarrow \pm\infty$.

Bodování: Definice asymptoty za 0,4b, výpočet parametrů za 0,6b, (a) za 0,4b, (b) za 0,6b.

5. Vysvětlete, co znamená, že integrace "je lineární operace". Napište vzorec pro integraci pomocí substituce. Toto pravidlo ilustруйте na vhodně zvoleném příkladu.

Bodování: Vysvětlení linearity za 0,6b, vzorec pro integraci za 0,6b, příklad za 0,8b.