

## 11. Kombinatorika a pravděpodobnost

1. Pánové Bose a Fermi si každý na svoji farmu pořídili  $n$  prasátek. Každý z nich pro svá prasátka postavil  $k$  chlívků.

- a) Určete, kolika různými způsoby může do svých chlívků umístit prasátka pan Bose, jestliže jeho chlívky jsou dostatečně velké (do každého se vejde libovolný počet prasátek). Boseho prasátka jsou nerozlišitelná.
- b) Pan Fermi si nechal poradit od pana Pauliho a postavil chlívky tak malé, že se do každého vejde pouze jedno prasátko. Určete, kolika různými způsoby může prasátka rozmístit do chlívků pan Fermi, jestliže  $k \geq n$ . Fermiho prasátka jsou také nerozlišitelná.

2. Jaká je pravděpodobnost, že při současném hodu šesti kostkami padne

- a) na každé kostce jiné číslo,
- b) samé jedničky,
- c) alespoň tři dvojky,
- d) právě tři dvojky,
- e) všechna čísla stejná,
- f) všechna čísla lichá,
- g) součet  $n$ ,  $n = 6, \dots, 36$  (k odevzdání není nutné počítat všechny případy).

3. Čtyři osoby si v šatně odložily kabát. Šatnářka při odchodu rozdala kabáty náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že

- a) všechny osoby budou mít svůj kabát,
- b) žádná z osob nebude mít svůj kabát,
- c) alespoň jedna osoba bude mít svůj kabát,
- d) právě jedna osoba bude mít svůj kabát.

4. Dokažte následující kombinatorické identity:

a)

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$$

b)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

c)

$$\sum_{i=0}^r \binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r},$$

d)

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad n > 0; k \geq 0.$$

5. Klíčivost semen je  $\vartheta$  (pravděpodobnost, že semínko vyklíčí), zasadíme-li  $n$  semen, jaká je pravděpodobnost, že

a) vyklíčí alespoň jedno semeno?

b) vyklíčí alespoň  $k$  semen?

c) vyklíčí právě  $k$  semen?

---

### Domácí úkol

11. Každý ze dvou parníků může doplout do přístavu vždy jen jednou za den, v kterýkoli okamžik nezávisle na druhém parníku. První se v přístavišti zdrží jednu hodinu, druhý dvě hodiny. Jaká je pravděpodobnost, že jeden bude muset čekat, až druhý opustí přístaviště?